Lista 14. Limite e Continuidade de Funções

(1) Se $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua então a função $|f| : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$|f|(x) = |f(x)|, \forall x \in D_f$, também é contínua.

Vale a recíproca ? Prove ou dê contra-exemplo.

(2) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, prove que

(i) $\max\{a, b\} = \dfrac{1}{2}[(a+b) + |a-b|]$

(ii) $\min\{a, b\} = \dfrac{1}{2}[(a+b) - |a-b|]$

(3) Dadas as funções $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos:

$$\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \forall x \in D$$
$$\min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \forall x \in D$$

Prove que se f e g são contaínuas em $x_0 \in D$ então $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ também são contínuas em x_0.

(4) Determine o conjunto dos pontos em que as seguintes funções são contínuas, justificando:

(i) $h(x) = x^2 + 1$

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

(iii) $u(x) = \dfrac{1}{x}$

(iv) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

(v) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 2 \\ 1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$

(vi) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(vii) $f(x) = [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$

(Esboce o gráfico dessa função. Quanto vale $f(4,1)$? E $f(-4,1)$?)

(viii) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x > 1 \\ 3x-1 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$

(5) Sejam $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas, e suponha que, para algum $x_0 \in D$, $f(x_0) < g(x_0)$. Prove que existe $r > 0$ tal que, para todo $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, $f(x) < g(x)$.

(6) (Cauchy, 1821) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Prove:

(i) $f(0) = 0$.

(ii) $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(iii) Se f é contínua em 0 então f é contínua em $\mathbb{R}$.

(iv) Se $f(1) = a$ então $f(n) = an$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

(v) Se $f(1) = a$ então $f(\frac{p}{q}) = a\frac{p}{q}$, $\forall p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.

(vi) Se $f(1) = a$ e f é contínua em $\mathbb{R}$ então $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$.

(7) Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $I \bigcap \mathbb{Q} = \{x \in I : x \text{ é racional }\}$.

(i) Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, e suponhamos que $f(r) = 0, \forall r \in I \bigcap \mathbb{Q}$. Mostre que $f(x) = 0, \forall x \in I$.

(ii) Sejam $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $f(r) = g(r)$, $\forall r \in I \bigcap \mathbb{Q}$.

Prove que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in I$.

(8) Seja $f :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{se } x = \dfrac{p}{q} \text{ na forma irredutível} \\ & \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$

Prove que f é contínua em $x \in]0, 1[\quad \longleftrightarrow \quad x \notin \mathbb{Q}$.

(9) Prove, pela definição, que as seguintes funções são contínuas:

(i) $f(x) = \sqrt{x}$

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(10) Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Prove que $1/2$ é o único número real em que f é contínua.