

Aula 17: Compactos III

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1º Semestre de 2023 - Curso de Topologia

Na aula passada – Algumas caracterizações de compactos

Vamos agora trabalhar com um conceito que é usado muitas vezes com a compacidade.

Definição 1

Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto de acumulação** de $A \subset X$ se $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Note que se x é ponto de acumulação de A , então $x \in \bar{A}$. Mas não necessariamente vale a volta (ver exercício).

Proposição 2

Seja (X, τ) espaço T_1 . Então $x \in X$ é ponto de acumulação de $A \subset X$ se, e somente se, para todo V aberto tal que $x \in V$ temos que $V \cap A$ é infinito.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja V aberto tal que $x \in V$. Suponha $V \cap A$ finito. Então $V' = V \setminus (A \setminus \{x\})$ é um aberto (usamos aqui T_1) tal que $x \in V'$ e $V' \cap A \subset \{x\}$ e, portanto, x não é ponto de acumulação.

($\Leftarrow$) Por outro lado, se para todo V aberto tal que $x \in V$ temos que $V \cap A$ é infinito, então $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ e, portanto, x é ponto de acumulação de A .

Algumas caracterizações de compactos

A compacidade implica na existência de pontos de acumulação para conjuntos infinitos.

Proposição 3

Seja (X, τ) compacto. Então todo suconjunto infinito admite ponto de acumulação.

Demonstração. Seja $A \subset X$ um conjunto infinito. Suponha que todo $x \in X$ não é ponto de acumulação de A . Assim, para todo $x \in X$, existe V_x aberto tal que $x \in V_x$ e $V_x \cap A \subset \{x\}$. Note que isso dá uma cobertura aberta para X e, portanto, tem subcobertura finita. Assim, existem $x_1, \dots, x_n \in X$ tais que $X \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Em particular, $A \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Mas note que isso implica que $A \subset \{x_1, \dots, x_n\}$, contradição com a infinitude de A .

Na aula passada paramos aqui!

Há uma caracterização para a compacidade no caso geral em termos de um conceito próximo ao de ponto de acumulação.

Definição 4

Seja (X, τ) espaço topológico. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto de acumulação completo** de $A \subset X$ se, para todo V aberto tal que $x \in V$, temos $|V \cap A| = |A|$.

$|B|$ é a cardinalidade B

Algumas caracterizações de compactos

A próxima demonstração é muito parecida com a demonstração para pontos de acumulação.

Proposição 5

Seja (X, τ) um espaço compacto. Então todo subconjunto infinito de X admite um ponto de acumulação completo. *(vale a volta – Proposição 9)*

Demonstração. Seja $A \subset X$ infinito e suponha que A não admite ponto de acumulação completo. Então, para todo $x \in X$, existe V_x aberto tal que $x \in V_x$ e $|V_x \cap A| < |A|$. Pela compacidade, existem $x_1, \dots, x_n \in X$ tais que $\bigcup_{i=1}^n V_{x_i} = X$. Note que

$$A = (V_{x_1} \cap A) \cup \dots \cup (V_{x_n} \cap A)$$

e assim obtemos uma contradição pois cada $|V_{x_i} \cap A| < |A|$. **De fato:**

- ▶ $V_{x_i} \cap A$ é finito para para todo $i = 1, \dots, n$ — óbvio, pois A é infinito
- ▶ Ao menos um $V_{x_i} \cap A$ infinito — aqui $|(V_{x_1} \cap A) \cup \dots \cup (V_{x_n} \cap A)| = \max_{i=1, \dots, n} |V_{x_i} \cap A|$

Para o próximo resultado, precisamos de um conceito de teoria dos conjuntos.

Definição 6

Dizemos que uma ordem total $\leq$ sobre X é uma **boa ordem** se todo subconjunto não vazio admite mínimo.

Proposição 7 (Princípio da boa ordem)

Todo conjunto admite uma boa ordem.

Esse resultado pode ser suposto como axioma na teoria dos conjuntos de fato, ele é equivalente ao axioma da escolha.

Algumas caracterizações de compactos

Muitas vezes ajuda utilizar a seguinte versão do princípio da boa ordem.

Proposição 8 (Princípio da ótima ordem)

Todo conjunto X admite uma boa ordem $\leq$ tal que, para todo $x \in X$,

$$|\{y \in X : y < x\}| < |X|$$

Demonstração. Dado $x \in X$, defina $\downarrow x = \{y \in X : y < x\}$.

Se não existe algum $x \in X$ tal que $|\downarrow x| = |X|$, terminamos. Caso contrário, seja x o menor com tal propriedade. Note que

- ▶ $\downarrow x$ é bem ordenado
- ▶ $\downarrow x$ tem uma bijeção com X (x é o menor com esta propriedade)

Algumas caracterizações de compactos

Seja $f : X \rightarrow \downarrow x$ uma bijeção. Podemos induzir uma nova boa ordem, $\leq\leq$, sobre X com tal bijeção:

$$w \neq z \in X, \quad w << z \Leftrightarrow f(w) < f(z).$$

Dado $z \in X$, considere $\downarrow\downarrow z := \{w \in X : w << z\} = \{w \in X : f(w) < f(z)\}$. Como $f(z) < x$, temos da minimalidade de x que $|\downarrow\downarrow z| < |X|$ para todo $z \in X$, como desejado.

Algumas caracterizações de compactos

Usando esse resultado, podemos terminar a caracterização de compacidade por pontos de acumulação completo.

Proposição 9

Seja (X, τ) espaço tal que todo subconjunto infinito admite ponto de acumulação completo. Então X é compacto.

Demonstração. Algo mais avançado, não será feito no curso.

Veja A.V. Arkhangel'skii, V.I. Ponomarev, "Fundamentals of general topology: problems and exercises" , Reidel (1984) pp. Chapt. 3. Problem 48 and pp. 165, 166

Algumas caracterizações de compactos

No caso de espaços métricos, podemos caracterizar a compacidade em termos de sequências. Isso é o que vamos provar nos próximos resultados.

Proposição 10

Seja (X, τ) com base locais enumeráveis e compacto. Então toda sequência admite subsequência convergente.

Demonstração. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência. Note que podemos supor que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito (caso contrário, teríamos uma subsequência constante convergente). Assim, seja $x \in X$ ponto de acumulação para $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (Proposição 3). Seja $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base local para x decrescente (a menos de se trocar V_n por $\tilde{V}_n = \bigcap_{k=1}^n V_k$). Seja $x_{n_1} \in V_1$. Para cada $k \geq 2$, escolha $x_{n_k} \in V_k \cap \{x_n : n > n_{k-1}\}$. Note que $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge para x .

Algumas caracterizações de compactos

Para provarmos a volta do resultado acima no caso de espaços métricos, o seguinte resultado será útil - mas ele não é útil apenas para isso, ele também é a chave para definir um importante conceito que é o número de Lebesgue de uma cobertura (ver Lisa de Exercício).

Algumas caracterizações de compactos

Proposição 11

Seja (X, d) espaço métrico. Suponha que toda sequência de pontos de X admite subsequência convergente. Então dada $\mathcal{C}$ cobertura aberta para X , existe $r > 0$ tal que, para todo $x \in X$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $B_r(x) \subset C$.

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ cobertura e suponha que não vale o enunciado. Então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset C$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

Vamos mostrar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não admite subsequência convergente, contrariando nossa hipótese.

Suponha que $x_{n_k} \rightarrow x$ para algum x . Seja $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(x) \subset C$ (existe pois C é aberto). Seja n_k tal que $x_{n_k} \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ com $\frac{1}{n_k} < \frac{1}{n}$ (existe pela convergência). Seja $y \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$. Temos

$$d(x, y) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n_k} < \frac{2}{n},$$

ou seja, $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_{\frac{2}{n}}(x) \subset C$, contrariando como escolhemos os x_n 's.

Algumas caracterizações de compactos

Um espaço onde toda sequência admite uma subsequência convergente é chamado de **sequencialmente completo**. Para métricos, esse conceito coincide com a compacidade - mas no caso geral, não vale nenhuma das duas implicações.

Proposição 12

Seja (X, d) métrico. Então (X, d) é compacto se, e somente se, é sequencialmente compacto.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Basta usar a Proposição 10.

($\Leftarrow$) **Suponha que não.** Seja $\mathcal{C}$ cobertura sem subcobertura finita. Seja $r > 0$ dado pelo resultado anterior. Seja $x_0 \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$x_n \in X \setminus (B_r(x_0) \cup \cdots \cup B_r(x_{n-1}))$$

Note que sempre podemos tomar tal x_n pois, para cada $i = 0, \dots, n-1$, existe $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $B_r(x_i) \subset C_i$ e $\bigcup_{i=0}^n C_i \neq X$ por ser um subconjunto finito de $\mathcal{C}$.

Note que (x_n) não admite subsequência convergente pois $d(x_n, x_m) \geq r$ para todo $m \neq n$ e, portanto, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não tem subsequências de Cauchy. **Contradição!**

Algumas caracterizações de compactos

Juntando os resultados anteriores, temos.

Corolário 13

Seja (X, d) espaço métrico. São equivalentes:

- (a) (X, d) é compacto;
- (b) Todo subconjunto infinito de X admite ponto de acumulação em X ;
- (c) Toda sequência de pontos de X admite subsequência convergente.

Com essa caracterização, fica imediata a prova do seguinte.

Corolário 14

Todo métrico compacto é completo.

Demonstração. Basta usar: se uma sequência (x_n) de Cauchy tem subsequência convergente então a sequência (x_n) é convergente.

No caso de $\mathbb{R}^n$, os compactos são exatamente os subespaços fechados e limitados (ver Exercício).

Para podermos fazer o resultado análogo para outros espaços métricos, precisamos de um outro conceito.

Definição 15

Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que $A \subset X$ é **totalmente limitado** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $F \subset A$ finito tal que

$$\bigcup_{x \in F} B_\varepsilon(x) \supset A$$

Lema 16

Seja (X, d) espaço métrico totalmente limitado. Se $Y \subset X$, então Y é totalmente limitado.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como X é totalmente limitado, existe $F \subset X$ finito tal que $X = \bigcup_{x \in F} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Para cada $x \in F$, se $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y \neq \emptyset$, fixe $y_x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$. Considere F' o conjunto de tais y_x 's. Note que $F' \subset Y$ é finito. Vamos mostrar que $Y \subset \bigcup_{y \in F'} B_{\varepsilon}(y)$. Seja $a \in Y$. Como $Y \subset X$, existe $x \in F$ tal que $a \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$. Assim, existe $y_x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$. Note que $a \in B_{\varepsilon}(y_x)$.

Proposição 17

Seja (X, d) espaço métrico. Então (X, d) é compacto se, e somente se, (X, d) é completo e totalmente limitado.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha (X, d) compacto. Já temos que (X, d) é completo, [pelo Corolário 14](#). O totalmente limitado segue diretamente do fato que cada $B_\varepsilon(x)$ é um aberto.

($\Leftarrow$) Agora suponha (X, d) completo e totalmente limitado. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de X . Pelo Corolário 13, basta mostrar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite subsequência convergente.

Se $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito, existe $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ subsequência convergente.

Algumas caracterizações de compactos

Vamos supor então que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito.

Como X é totalmente limitado, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ também é.

Considere $\varepsilon_1 = 1$ e $F_1 \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ finito tal que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_{x \in F_1} B_{\varepsilon_1}(x)$.

Note que, para algum $x_{n_1} \in F_1$, $B_{\varepsilon_1}(x_{n_1}) \cap \{x_n : n > n_1\} := G_1$ é infinito.

Continuamos este processo, para cada $k + 1$, tomando $\varepsilon_{k+1} = \frac{1}{k+1}$, escolhendo $F_{k+1} \subset G_k$ finito de forma que $G_k \subset \bigcup_{x \in F_{k+1}} B_{\varepsilon_{k+1}}(x)$.

Daí escolhemos $x_{n_{k+1}} \in F_{k+1}$ de forma que $B_{\varepsilon_{k+1}}(x_{n_{k+1}}) \cap \{x_n : n > n_{k+1}\} := G_{k+1}$ seja infinito. Note que a sequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy ($d(x_{n_k}, x_{n_{k+m}}) \leq \frac{1}{k}$) e, portanto, convergente.

Corolário 18

Seja (X, d) espaço métrico completo. Então $A \subset X$ é compacto se, e somente se A é fechado e totalmente limitado.

($\Rightarrow$) Como X é Hausdorff e A é compacto, temos que A é fechado ([Proposição 11 da Aula 15](#)). Também é totalmente limitado pela proposição anterior.

($\Leftarrow$) (A, d) será completo e totalmente limitado, e portanto compacto pela proposição anterior.

O totalmente limitado é necessário de fato.

Exemplo 19

Considere $\mathbb{N}$ com a métrica discreta. Note que, com tal métrica, $\mathbb{N}$ é completo. Note também que $\mathbb{N}$ é limitado (basta, por exemplo, tomar a bola $B_2(0)$).

Exercícios - Algumas caracterizações de compactos

1. Mostre que $\mathbb{N}$ como subespaço de $\mathbb{R}$ tem pontos aderentes mas não pontos de acumulação.
2. Mostre que em $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é um fechado limitado.
3. Mostre que $D \subset X$ é fechado e discreto se, e somente se, D não admite pontos de acumulação.
4. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta para um espaço métrico X . Dizemos que ε é um número de Lebesgue para $\mathcal{C}$ se, para todo conjunto $A \subset X$ com diâmetro menor que ε , temos que existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $A \subset C$. Mostre que se X é um espaço compacto, então toda cobertura admite um número de Lebesgue.
5. Mostre que em todo espaço métrico X onde toda cobertura tem um número de Lebesgue (em particular, compactos), então toda função contínua $f : X \rightarrow Y$ é uniformemente contínua - isto é :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall a, b \in X \quad d(a, b) < \delta \Rightarrow d'(f(a), f(b)) < \varepsilon,$$

onde d e d' são as métricas de X e Y respectivamente.

Vamos apresentar algumas aplicações de compacidade quando temos o espaço dos reais envolvido. Em geral, a única coisa envolvida é alguma caracterização de compacidade que vale nos reais.

Começamos com uma que segue diretamente dos compactos de $\mathbb{R}$ serem fechados limitados.

Proposição 20

Seja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, onde K é um espaço compacto. Então f atinge seu máximo e mínimo (isto é, existem $a, b \in K$ tais que, para qualquer $x \in K$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$).

Demonstração. Como K é compacto, temos que $f(K)$ é compacto. Logo, é fechado e limitado e, portanto, podemos tomar seu máximo e seu mínimo.

A caracterização de compacidade em termos de sequências, mais a caracterização de compactos em termos de fechados limitados nos dão o seguinte resultado.

Proposição 21 (Bolzano-Weierstrass)

Dada (x_n) sequência limitada de pontos em $\mathbb{R}^n$, ela admite subsequência convergente.

Demonstração. Como a sequência é limitada, seu fecho é limitado. Logo, compacto (por estarmos em $\mathbb{R}^n$). Assim, segue o resultado pela caracterização de compacidade em termos de ser sequencialmente compacto.

Dizemos que duas normas (sobre um espaço vetorial) são equivalentes se as topologias induzidas por elas são a mesma (lembre uma norma induz uma métrica que por sua vez induz uma topologia).

Sobre $\mathbb{R}^n$, do ponto de vista topológico, não faz muita diferença qual a norma que se adota.

Teorema 22

Todas as normas sobre $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.

Demonstração. Vamos apresentar a prova para o caso $n = 2$, os outros ficam como exercício. Primeiramente, considere a norma $\|\cdot\|_\infty$ dada por

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$$

Fixe $\|\cdot\|$ um norma qualquer. Vamos mostrar que $\|\cdot\|$ é uma função contínua em $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

Algumas caracterizações de compactos

De fato, seja $\varepsilon > 0$. Considere

$$K = \max\{\|(1, 0)\|, \|(0, 1)\|\}.$$

Seja $\delta = \frac{\varepsilon}{2K}$. Assim, se $\|(x, y) - (a, b)\|_\infty < \delta$, temos

$$\begin{aligned}\|(x, y) - (a, b)\| &= \|(x - a, 0) + (0, y - b)\| \\ &\leq \|(x - a, 0)\| + \|(0, y - b)\| \\ &= |x - a|\|(1, 0)\| + |y - b|\|(0, 1)\| \\ &\leq K(|x - a| + |y - b|) \\ &= 2K\|(x, y) - (a, b)\|_\infty \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Considere $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_\infty = 1\}$.

Note que tal conjunto é compacto (com relação à $\|\cdot\|_\infty$ - um jeito de mostrar é notando que a $\|\cdot\|_\infty$ induz a topologia produto; união de 4 compactos).

Assim, existem m e M valores mínimo e máximo respectivamente para $\|\cdot\|$ calculada em U .

Assim, dado $(x, y) \in U$, temos

$$m \leq \|(x, y)\| \leq M$$

Lembrando que, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ não nulo, $\frac{1}{\|(x, y)\|_\infty}(x, y) \in U$. Assim, obtemos que

$$m\|(x, y)\|_1 \leq \|(x, y)\| \leq M\|(x, y)\|_1$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercícios - Algumas aplicações de compactos

1. Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas sobre um mesmo espaço. Mostre que são equivalentes:
 - (a) $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes;
 - (b) existem $m, M > 0$ tais que, para todo x vale

$$m\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq M\|v\|_1$$

2. Vimos que se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto, então toda função contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ tem imagem limitada. Mostre que para subespaços de $\mathbb{R}$, vale a volta. Isto é, se $K \subset \mathbb{R}$ é tal que toda função contínua é limitada, então K é compacto.

Exercícios - Algumas aplicações de compactos

Vamos apresentar uma aplicação do Teorema de Tychonoff. Considere

$$S = \{(x_z)_{z \in \mathbb{Z}} : \exists L > 0 - L < x_z < L \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}\}.$$

Note que S é um espaço vetorial. Vamos dizer que uma função linear $\mu : S \rightarrow \mathbb{R}$ é uma média se, para todo $(x_z)_{z \in \mathbb{Z}} \in S$

$$\inf_{z \in \mathbb{Z}} x_z \leq \mu((x_z)_{z \in \mathbb{Z}}) \leq \sup_{z \in \mathbb{Z}} x_z.$$

3. Note que as próprias funções $\inf$ e $\sup$ não são médias.
4. Note que uma função constante não é uma média.
5. Seja $F \subset \mathbb{Z}$ finito e não vazio. Mostre que μ_F dada por

$$\mu_F = \frac{1}{|F|} \sum_{z \in F} x_z$$

é uma média.

6. Seja $(a_z)_{z \in \mathbb{Z}} \in S$ tal que $a_z \geq 0$ para cada z e $\sum_{z \in \mathbb{Z}} a_z = 1$. Mostre que μ dada por

$$\mu((x_z)_{z \in \mathbb{Z}}) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} a_z x_z$$

também é uma média.

Exercícios - Algumas aplicações de compactos

O problema com os tipos de médias apresentados acima é que se “deslocamos” a sequência, sua média muda.

Para formalizar, considere o seguinte operador shift: dado $(x_z)_{z \in \mathbb{Z}} \in S$, denotamos por $s((x_z)_{z \in \mathbb{Z}}) = (x_{z+1})_{z \in \mathbb{Z}}$. Note que enquanto $\inf$ e $\sup$ são invariantes quanto a aplicações de s , os exemplos acima não são.

Nosso trabalho agora se resume a provar que existe uma média invariante por s . Começamos com uma aproximação.

Exercícios - Algumas aplicações de compactos

7. Mostre que existe uma sequência $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de médias tal que, para qualquer $x \in \mathbb{Z} \in S$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n(s(x)) - \mu_n(x)| = 0$$

Podemos considerar o conjunto $\mathcal{M}$ de todas as médias como um subconjunto de $\prod_{s \in S} \mathbb{R}$ simplesmente tomando μ como $(\mu(s))_{s \in S}$. Desta forma, podemos ainda melhorar e tomar o conjunto $\mathcal{M}$ como sendo um subconjunto de

$$\prod_{s \in S} [m(s), M(s)]$$

onde $m(s)$ é o ínfimo de s e M é o supremo de s . Desta forma, pelo Teorema de Tychonoff, temos que $\mathcal{M}$ é um subconjunto de um espaço compacto.

8. Se convença das afirmações acima.
9. Mostre que o conjunto $\mathcal{M}$ de todas as médias é fechado no espaço descrito acima e, portanto, é compacto.
10. Considere $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência como no Exercício acima.
- (a) Mostre que $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um ponto de acumulação em $\mathcal{M}$.
 - (b) Mostre que tal ponto de acumulação é uma média invariante por shifts.