Regras de L'Hôpital
Aula 21

Primeiro Semestre de 2023

Derivadas Laterais - complemente de notação

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{e}$$

$$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

As regras de L'Hôpital se aplicam a cálculos de limites que apresentam as seguintes indeterminações

$$\frac{0}{0} \quad \text{ou} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Teorema (De Cauchy)

Se f e g são contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b), existe $c \in (a, b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Prova: Considere $h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$ e note que h é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e $h(a) = h(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$. Do Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$ e o resultado segue.

Teorema (Regra de L'Hôpital)

Sejam f *e* g *funções diferenciáveis em* x *com* $g'(x) \neq 0$, *para todo* $x \in (p - r, p + r) \setminus \{p\}$ *e para algum* $r > 0$. *Se*

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0 = \lim_{x \to p} g(x)$$

e $\displaystyle\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$ $(ou\ \ell = \pm\infty)$, *então* $\displaystyle\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Prova: Como os valores de $f(p)$ e $g(p)$ não influem no cálculo do limite, defina $f(p) = g(p) = 0$. Assim, do Teorema de Cauchy, para cada $x \in (p - r, p + r) \setminus \{p\}$ existe c entre x e p (distinto de ambos) tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Como $\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ e c está entre x e p, segue que $\lim_{x \to p} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \ell$.

Logo existe o limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ quando x tende a p e $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Observação: A regra de L'Hôpital ainda será válida se, em lugar de $x \to p$, tivermos $x \to p^+$, $x \to p^-$, $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{2x}}{x}$.

Solução: Como $\lim\limits_{x\to 0} 1-e^{2x}=0$ e $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ da Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{2x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-e^{2x})'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-2e^{2x}}{1} = -2.$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x}$.

Solução: Como $\lim_{x\to 0} \text{sen}\ x = 0$ e $\lim_{x\to 0} x = 0$ da Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\ x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\text{sen}\ x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

2ª Regra de L'Hôpital: Sejam f e g funções deriváveis em x com $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in (p-r, p+r)\backslash\{p\}$ e algum $r > 0$. Se

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty = \lim_{x \to p} g(x)$$

e $\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (ou divergir para $\pm\infty$), então $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)}$ também existirá (ou divergirá para $\pm$ infinito) e

$$\boxed{\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

A prova da 2ª Regra de L'Hôpital é bastante elaborada e está apresentada na parte final deste conjunto de slides.

Observação: A 2ª regra de L'Hôpital ainda vale se, em lugar de $x \to p$, tivermos $x \to p^+$, $x \to p^-$, $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. A regra continua válida se um ou ambos os limites for $-\infty$ em lugar de $+\infty$.

Exemplo

Calcule $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$.

Solução: Como $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ da Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x)'}{x'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$.

Solução: Como $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x - x = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$ da Regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} \sec^2 x - 1 = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} 3x^2 = 0$ usamos mais uma vez a Regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x}.$$

Como ainda o numerador e o denominador tendem a zero, usamos pela terceira vez a Regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + 2\sec^4 x}{6} = \frac{1}{3}.$$

Observação: As Regras de L'Hôpital se aplicam a indeterminações da forma $\dfrac{0}{0}$ e $\dfrac{\infty}{\infty}$. As outras formas de indeterminação, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, podem ser reduzidas a estas.

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \right)$.

Solução: Observe que é uma indeterminação da forma $\infty - \infty$. Escrevendo

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}\ x} \right) = \frac{\operatorname{sen}\ x - x}{x \operatorname{sen}\ x}$$

temos uma indeterminação da forma $\dfrac{0}{0}$. Da Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{\operatorname{sen} x} \right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = 0$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 0^+} x\ln x.$

Solução: Observe que é uma indeterminação da forma $0\cdot(-\infty)$.

Escrevendo $x\ln x = \dfrac{\ln x}{1/x}$ temos uma indeterminação da forma $\frac{-\infty}{\infty}$. Da Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x \to 0^+} x^x$.

Solução: Observe que a indeterminação é da forma 0^0. Escrevemos $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$, e como a função exponencial é contínua,

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \to 0^+} (x \ln x)} = e^0 = 1.$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Solução: Note que a indeterminação é da forma ∞^0. Escrevemos $x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$, e como a função exponencial é contínua,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = \exp\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}\right).$$

Como a indeterminação é da forma $\frac{\infty}{\infty}$, da Regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Solução: Note que a indeterminação é da forma 1^∞. Escrevemos $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. Agora temos uma indeterminação da forma $0\cdot\infty$ que pode ser reduzida a $\dfrac{0}{0}$. Então, pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = 1$$

e como a função exponencial é contínua,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^1 = e.$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{\ln(x)}}$

Solução: Note que temos uma indeterminação do tipo ∞^0. Escrevemos $\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{\ln(x)}} = e^{\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}}$. Observe então que temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ em $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}$. Então, por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1}\,x = 2$$

e obtemos que $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{\ln(x)}} = e^2$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(x) - x}{x - \mathrm{sen}(x)}$

Solução: Note que temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Então, por L'Hôpital,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x) - x}{x - \mathrm{sen}(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}^2(x)}{1 - \cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}^2(x)}{x^2} \frac{1}{\cos^2(x)} \frac{x^2}{1 - \cos(x)} = 2\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\right]^{\frac{1}{x}}$

Solução: Note que temos uma indeterminação do tipo 1^∞.

Escrevemos $\left[\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\right)}{x}}$. Observe então que temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ em

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\right)}{x^2}\,x = 0{\cdot}0 = 0 \qquad \text{pois, por L'Hôpital,}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}\right)}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{sen}(z)}\,\frac{\cos(z)\,z-\operatorname{sen}(z)}{z^2}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\cos(z)\,z-\operatorname{sen}(z)}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(z)z+\cos(z)-\cos(z)}{2z} = 0.$$

Assim $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\right]^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

Crescimento/anulamento exponencial versus crescimento polinomial versus logarítmico

Exemplo

Seja $n \in \mathbb{N}$, $p(x)$ *um polinômio de grau* n *e* $r > 0$. *Então*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} p(x)e^x = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} x^r \ln(x) = 0$$

Prova da 2ª Regra de L'Hôpital:

Sejam f e g funções deriváveis em $(p-r, p+r)\backslash\{p\}$, $r>0$, com $g'(x) \neq 0$ para $0 < |x-p| < r$. Se

$$\lim_{x\to p} f(x) = +\infty = \lim_{x\to p} g(x) \text{ e } \lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \text{ entao, } \lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

De fato: dado $1 \geq \epsilon > 0$ existe $0 < \delta < r$ tal que

$$p \neq x \in (p-\delta, p+\delta) \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Agora, do Teorema de Cauchy, para $x, y \in (p-\delta, p)$ (ou $x, y \in (p, p+\delta)$), existe c entre x e y tal que

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{e} \quad \left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - \ell\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Assim, para $x, y \in (p-\delta, p)$ (ou $x, y \in (p, p+\delta)$)

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| < |\ell| + \frac{\epsilon}{2} \leq |\ell| + \frac{1}{2}$$

Note que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| = \left|\frac{f(y)}{g(x)} - \frac{g(y)}{g(x)}\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| \leq \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|(|\ell|+\tfrac{1}{2})$$

Fixe $y \in (p-\delta, p)$ (ou $y \in (p, p+\delta)$) e escolha $\delta' < \delta$ tal que $x \in (p-\delta', p)$ (ou $x \in (p, p+\delta')$) temos (recorde que f, g tendem para infinito quando x tende para p)

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, se $x \in (p-\delta', p)$ (ou $x \in (p, p+\delta')$), então

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| = \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| + \left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - \ell\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isto mostra que

$$\lim_{x\to p^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \;\text{ e }\; \lim_{x\to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \;\Rightarrow\; \lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$