

Capítulo 3

Modulação Digital

3.1 Introdução

O termo modulação digital significa que o sinal digital possui espectro no entorno de uma frequência de portadora $f_c \neq 0$. A modulação digital de um sinal em banda-base aparece justamente da necessidade de se transmitir um sinal digital por um canal que apresenta resposta em frequência no entorno de uma frequência f_c . Existem vários métodos de se fazer a transposição do espectro. Um sinal digital PAM pode modular uma portadora senoidal, ou cossenoidal, de três maneiras: em amplitude, em fase, ou em frequência. Como veremos a seguir, algumas técnicas sacrificam a eficiência espectral em função da relação \mathcal{E}_b/N_0 , outras não.

Qualquer sinal digital modulado, pode ser expresso na sua forma mais geral como:

$$x_c(t) = x_i(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) - x_q(t) \sin(2\pi f_c t + \phi) \quad (3.1)$$

onde ϕ é a fase inicial da portadora. Os sinais $x_i(t)$ e $x_q(t)$ são sinais digitais PAM, denominados componentes em fase e em quadratura, dados por (??). O sinal em fase sempre modula uma portadora cossenoidal, enquanto que o sinal em quadratura modula sempre uma portadora senoidal. Algumas modulações usam somente componente em fase, outras utilizam as componentes em fase e em quadratura.

As portadoras senoidal e cossenoidal têm a propriedade de serem ortogonais, isto é,

$$\int_0^{T_s} \cos(2\pi f_c t + \phi) \sin(2\pi f_c t + \phi) dt = 0 \quad (3.2)$$

onde usamos que $\sin(a) \cos(b) = 1/2 \sin(a - b) + 1/2 \sin(a + b)$ e que $\int_0^{T_b} \sin(4\pi f_c t + 2\phi) dt = 0$, pois $f_c \gg 1/T_s$. Desse modo, é possível transmitir dois sinais PAM simultaneamente, sem que haja interferência, conseguindo deste modo aumentar a eficiência espectral, em relação a um sistema que use somente componente em fase.

3.2 Modulação Digital de Amplitude

A modulação digital de amplitude é conhecida pela sigla ASK (“Amplitude Shift Keying”). Vamos iniciar o estudo da modulação de amplitude pelo caso binário e depois pelo caso M -ário.

3.2.1 Modulação Binária

A modulação 2-ASK consiste em variar a amplitude da portadora de acordo com um sinal PAM, ou seja:

$$x_c(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i q(t - iT_b) \cos[2\pi f_c(t - iT_b) + \phi] \quad (3.3)$$

onde a_i é a variável aleatória de amplitude que assume as amplitudes 0 e A com mesma probabilidade, f_c é a frequência da portadora e ϕ é a fase inicial da portadora. Assim, para pulsos $q(t)$ retangulares NRZ, no intervalo de tempo $0 \leq t \leq T_b$, temos as seguintes formas de onda transmitidas:

$$\begin{aligned} x_{c,0}(t) &= 0 && \text{para } a_i = 0. \\ x_{c,1}(t) &= A \cos(2\pi f_c t + \phi) && \text{para } a_i = A. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Este caso é conhecido como ASK unipolar, que apresenta, como veremos, desempenho inferior ao caso bipolar.

Por outro lado, se a_i assumir as amplitudes $-A/2$ e $A/2$, então é possível gerar uma modulação 2-ASK bipolar ¹, com formas de onda dadas por:

$$\begin{aligned} x_{c,0}(t) &= -\frac{A}{2} \cos(2\pi f_c t + \phi) \quad \text{para } a_i = -A/2. \\ x_{c,1}(t) &= \frac{A}{2} \cos(2\pi f_c t + \phi) \quad \text{para } a_i = A/2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

A Fig. 3.1 apresenta dois diagramas da modulação de amplitude, para os casos unipolar e polar, denominados de constelações. Observe que os pontos da constelação 2-ASK apresentam componente em quadratura igual a zero, pois a modulação de amplitude possui somente portadora cossenoidal.

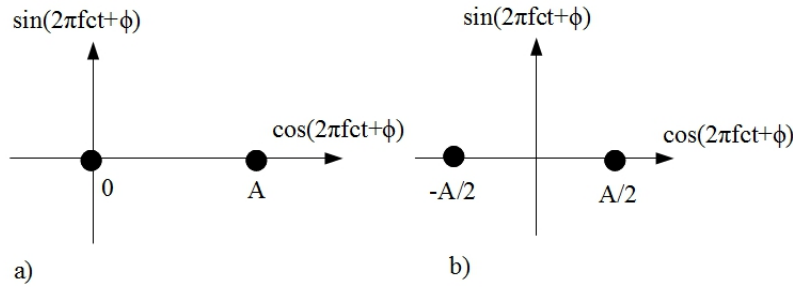


Figura 3.1: a) Constelação 2-ASK unipolar. b) Constelação 2-ASK bipolar.

3.2.2 Modulação M -ária

Existem dois tipos de modulação de amplitude: unipolar e polar. Para o caso unipolar, a variável aleatória de amplitude a_i assume os valores $0, A, 2A, \dots, (M-1)A$. Por outro lado, para caso polar, a variável aleatória utiliza as seguintes amplitudes $\pm A/2, \pm 3A/2, \dots, \pm(M-1)A/2$.

Para ambos os casos, utilizando (3.1), podemos escrever as componentes em fase e em quadratura, que são dadas por:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i q(t - iT_s) \\ x_q(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Estes tipos de modulação de amplitude possuem a mesma densidade espectral de potência², mas não o mesmo desempenho, como veremos posteriormente. Nas análises que se seguirão vamos considerar somente a modulação polar, que é a que apresenta melhor desempenho, embora a análise da modulação de amplitude unipolar é semelhante à análise da polar. A Fig. 3.2 apresenta as constelações das modulações 4-ASK unipolar e polar.

3.3 Modulação Digital de Fase

3.3.1 Modulação Binária

A modulação 2-PSK, também conhecida como BPSK ou PSK binário, consiste em variar a fase da portadora de acordo com a amplitude de um sinal PAM. Assim, um sinal modulado em fase pode ser escrito como:

$$x_c(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A q(t - iT_b) \cos [2\pi f_c(t - iT_b) + \phi_{\Delta} a_i + \phi] \quad (3.7)$$

onde A é a amplitude da portadora, $q(t)$ é o formato de pulso, ϕ_{Δ} é a constante de desvio de fase dada em radianos por Volt, a_i é uma variável aleatória que assume as amplitudes 0 e A' com mesma probabilidade e ϕ é a fase inicial.

¹A modulação 2-ASK bipolar é também uma modulação binária de fase.

²Exceto pelo nível DC que a unipolar apresenta.

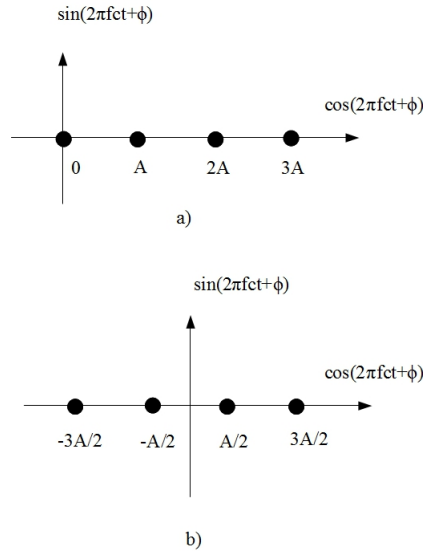


Figura 3.2: a) Constelação 4-ASK unipolar b) Constelação 4-ASK polar.

Se substituirmos $\theta_i = \phi_{\Delta} a_i$, então θ_i é uma variável aleatória que assume as fases 0 e π , pois foi suposto que $\phi_{\Delta} A' = \pi$. Além disso, podemos escrever que $\theta_i = \pi b_i$, onde b_i assume os valores 0 e 1 com mesma probabilidade. Então um sinal modulado em fase pode ser reescrito como:

$$x_c(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} Aq(t - iT_b) \cos[2\pi f_c(t - iT_b) + \theta_i + \phi] \quad (3.8)$$

Assim, para pulsos retangulares NRZ, no intervalo de tempo $0 \leq t \leq T_b$, temos as seguintes formas de onda transmitidas:

$$\begin{aligned} x_{c,0}(t) &= A \cos(2\pi f_c t + \phi) && \text{para } a_i = 0. \\ x_{c,1}(t) &= A \cos(2\pi f_c t + \pi + \phi) && \text{para } a_i = A'. \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde usamos que $\theta_i = 0$ ou π . A constelação da modulação 2-PSK é apresentada na Fig. 3.1b.

3.3.2 Modulação M -ária

Para um sinal M -PSK vamos usar que $\theta_i = 2\pi b_i/M$, para $b_i = 0, 1, \dots, (M-1)$, que representa a fase da portadora que depende do símbolo transmitido. A Fig. 3.3 apresenta as constelações das modulações 4-PSK³ e 8-PSK.

Desenvolvendo (3.8) e comparando com (3.1), podemos obter as componentes em fase e em quadratura para a modulação M -PSK, dadas por:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a'_i q(t - iT_s) \\ x_q(t) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a'_q q(t - iT_s) \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $a'_i = A \cos(\theta_i + \phi)$ e $a'_q = A \sin(\theta_i + \phi)$. Pode-se mostrar que as variáveis a'_i e a'_q têm média e valor quadrático médio dadas por:

$$\begin{aligned} \overline{a'_i} &= \overline{a'_q} = 0 \\ \overline{a'^2_i} &= \overline{a'^2_q} = \frac{A^2}{2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

³A constelação 4-PSK também é conhecida como QPSK, ou PSK quaternário.

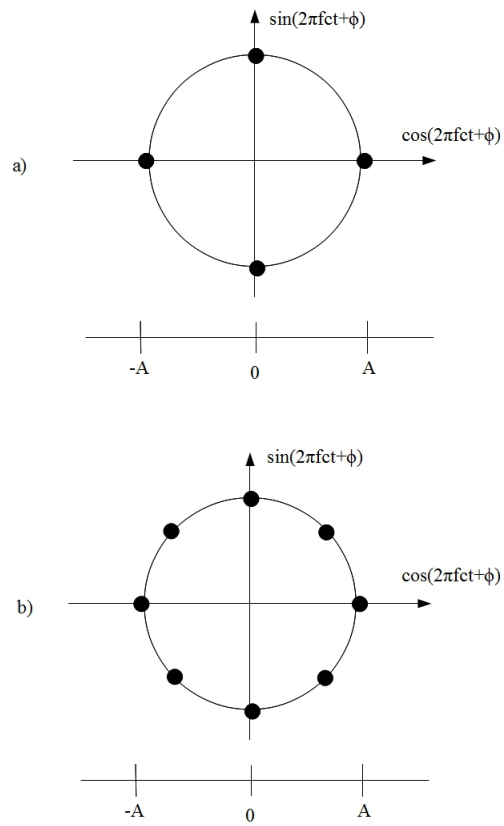


Figura 3.3: a) Constelação 4-PSK. b) Constelação 8-PSK.

3.4 Modulação Digital de Amplitude e Fase

3.4.1 Modulação M -ária

A modulação digital em que se modula simultaneamente a amplitude e a fase de uma portadora é conhecida como QAM (“Quadrature Amplitude Modulation”). Desta forma, como veremos posteriormente, a modulação QAM necessita de menos energia por símbolo que as modulações de amplitude ou de fase, e portanto tem desempenho superior em relação a estes casos.

Um sinal M -QAM pode ser escrito como:

$$x_c(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i q(t - iT_s) \cos [2\pi f_c(t - iT_s) + \phi] - \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i q(t - iT_s) \sin [2\pi f_c(t - iT_s) + \phi] \quad (3.12)$$

onde a_i e b_i são variáveis aleatórias de amplitude independentes que assumem os valores $\pm A/2, \pm 3A/2, \dots, \pm(\sqrt{M} - 1)A/2$. A Fig. 3.4 apresenta as constelações das modulações 16-QAM e 32-QAM. Para $M = 2^m$, se m for par, então as constelações QAM são quadradas, como por exemplo 16-QAM, 64-QAM, 256-QAM, etc. Por outro lado, se m for ímpar, então as constelações apresentam forma de cruz, como por exemplo, 32-QAM, 128-QAM, 512-QAM, etc.

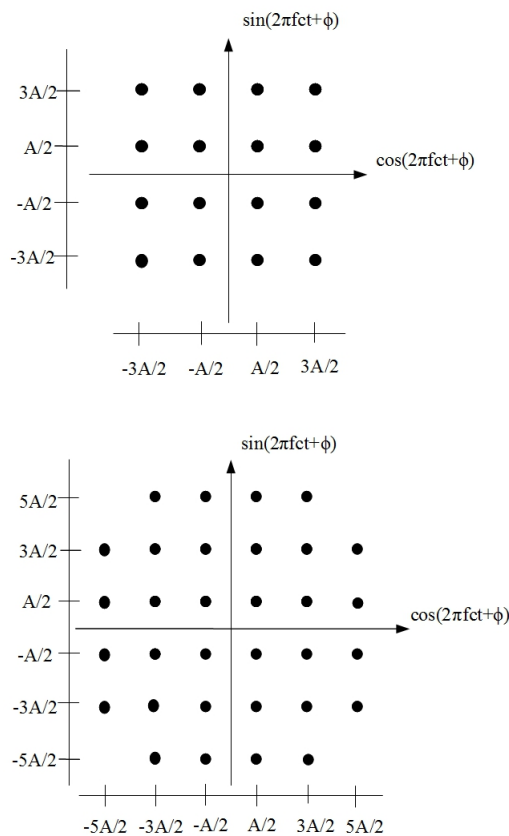


Figura 3.4: a) Constelação 16-QAM. b) Constelação 32-QAM.

3.5 Modulação Digital de Frequência

3.5.1 Modulação Binária

A modulação 2-FSK consiste em variar a frequência da portadora de acordo com a amplitude de um sinal PAM. Assim, um sinal modulado em frequência pode ser escrito como:

$$x_c(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} Aq(t - iT_b) \cos [2\pi f_c(t - iT_b) + 2\pi f_{\Delta} a_i(t - iT_b) + \phi] \quad (3.13)$$

onde f_Δ é uma constante de desvio de frequência dada em Hz por Volt. Suponha que a_i apresenta é uma variável aleatória bipolar que assume com mesma probabilidade os valores $-A$ e A e que $q(t)$ tem formato retangular NRZ. Assim, no intervalo de tempo $0 \leq t \leq T_b$, temos as seguintes formas de onda transmitidas:

$$\begin{aligned} x_{c,0}(t) &= A \cos(2\pi f_c t - 2\pi f_d t + \phi) & \text{para } b_i = -1. \\ x_{c,1}(t) &= A \cos(2\pi f_c t + 2\pi f_d t + \phi) & \text{para } b_i = 1. \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $f_d = f_\Delta A'$ é denominado desvio de frequência.

A função de correlação cruzada síncrona entre as formas de onda da modulação 2-FSK é dada por:

$$\begin{aligned} R_{X_{c,1}, X_{c,2}}(0) &= \int_0^{T_b} x_{c,1}(t)x_{c,2}(t)dt \\ &= \frac{A^2}{8\pi f_d} \sin(4\pi f_d T_b) \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde usamos que $\cos(A)\cos(B) = 1/2 \cos(A-B) + 1/2 \cos(A+B)$ e $\int_0^{T_b} \cos(4\pi f_d t + 2\phi)dt = 0$.

Se $f_d = KR_b/4$, onde K é um inteiro qualquer, então as formas de onda são ortogonais. Para o caso em que as formas de onda são ortogonais, a constelação da modulação 2-FSK é mostrada na Fig. 3.5.

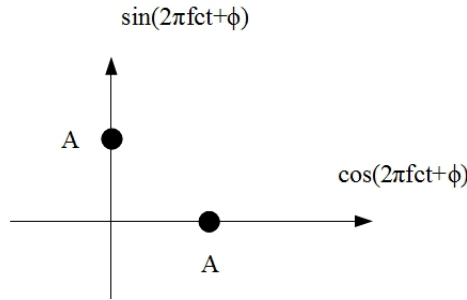


Figura 3.5: Constelação 2-FSK.

3.5.2 Modulação M -ária

Um sinal M -FSK pode ser expresso como:

$$x_c(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} Aq(t - iT_s) \cos[2\pi f_c(t - iT_s) + 2\pi f_d b_i + \phi] \quad (3.16)$$

onde $b_i = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)$ é a variável de amplitude. A frequência instantânea do i esimo símbolo é dada por $f_c + f_d b_i$. Assim, símbolos adjacentes são espaçados em frequência de $2f_d$.

3.6 Densidade Espectral de Potência das Modulações Digitais

Utilizando o teorema da modulação de processos aleatórios dada por (??), temos que a densidade espectral de potência de (3.1) pode ser facilmente obtida:

$$G_X(f) = \frac{1}{4} [G_{X,i}(f - f_c) + G_{X,i}(f + f_c) + G_{X,q}(f - f_c) + G_{X,q}(f + f_c)] \quad (3.17)$$

onde $G_{X,i}(f)$ e $G_{X,q}(f)$ são as densidades espectrais das componentes em fase e em quadratura.

Nas modulações de amplitude, de fase, de amplitude e fase aparecem variáveis multiplicativas a_i . Assumindo que estas variáveis são estatisticamente independentes, de (??) temos que densidade espectral de potência das componentes em fase e quadratura é dada por:

$$G_{X,i}(f) = G_{X,q}(f) = \sigma_a^2 R_s |Q(f)|^2 + \mu_a^2 R_s^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |Q(nR_s)|^2 \delta(f - nR_s) \quad (3.18)$$

Substituindo (3.18) em (3.17), temos que a densidade espectral de potência de sinais ASK, PSK e QAM é dada por:

$$G_X(f) = \frac{1}{2}\sigma_a^2 R_s |Q(f - f_c)|^2 + \frac{1}{2}\mu_a^2 R_s^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |Q(nR_s)|^2 \delta(f - f_c - nR_s) + \frac{1}{2}\sigma_a^2 R_s |Q(f + f_c)|^2 + \frac{1}{2}\mu_a^2 R_s^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |Q(nR_s)|^2 \delta(f + f_c - nR_s) \quad (3.19)$$

3.6.1 Modulação de Amplitude

Para o caso em que a variável aleatória de amplitude é polar e assume os valores $\pm A/2, \pm 3A/2, \dots, \pm(M-1)A/2$, a sua média e variância são dadas por:

$$\begin{aligned} \mu_a &= 0 \\ \sigma_a^2 &= \frac{(M^2 - 1)A^2}{12} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Supondo pulsos retangulares, com transformada de Fourier $Q(f) = T_s \text{sinc}(T_s f)$, a densidade espectral de potência da modulação M -ASK é dada por:

$$G_X(f) = \frac{(M^2 - 1)A^2}{48R_s} \text{sinc}^2\left(\frac{f - f_c}{R_s}\right) + \frac{(M^2 - 1)A^2}{48R_s} \text{sinc}^2\left(\frac{f + f_c}{R_s}\right) \quad (3.21)$$

A densidade espectral de potência da modulação M -ASK é apresentada na Fig. 3.6.

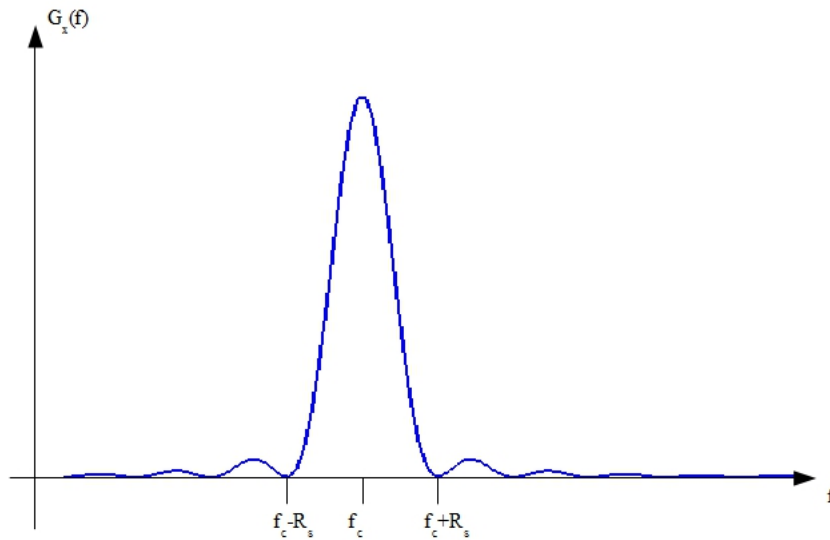


Figura 3.6: Densidade Espectral de Potência da Modulação M -ASK. Pulso $q(t)$ Retangular.

Eficiência Espectral da Modulação de Amplitude

Para pulsos que satisfazem o teorema de Nyquist, um sinal modulado apresenta banda dada por:

$$B = R_s \quad (3.22)$$

Portanto, usando (??) é fácil mostrar que a eficiência espectral para a modulação M -ASK, medida em bits/s por Hz, é dada por:

$$E = \log_2 M \quad (3.23)$$

que é a metade da eficiência espectral dos sinais PAM, pois sinais modulados ocupam o dobro da banda de sinais em banda-base.

3.6.2 Modulação de Fase

Substituindo (3.11) em (3.19), e supondo pulsos retangulares, que apresentam transformada de Fourier $Q(f) = T_s \text{sinc}(T_s f)$, podemos obter a densidade espectral de potência de um sinal M -PSK:

$$G_X(f) = \frac{A^2}{4R_s} \text{sinc}^2\left(\frac{f - f_c}{R_s}\right) + \frac{A^2}{4R_s} \text{sinc}^2\left(\frac{f + f_c}{R_s}\right) \quad (3.24)$$

que é semelhante com o espectro da modulação de amplitude.

Eficiência Espectral da Modulação de Fase

Como o espectro da modulação M -PSK é proporcional ao da modulação M -ASK, podemos dizer que a eficiência espectral da modulação M -PSK é igual à da modulação M -ASK, dada por (3.23).

3.6.3 Modulação de Amplitude e Fase

As variáveis aleatórias de amplitude de (3.12), a_i e b_i , possuem média e variância dadas por (3.20). Supondo pulsos retangulares, a densidade espectral de potência da modulação M -QAM é dada por:

$$G_X(f) = \frac{(M-1)A^2}{24R_s} \text{sinc}^2\left(\frac{f - f_c}{R_s}\right) + \frac{(M-1)A^2}{24R_s} \text{sinc}^2\left(\frac{f + f_c}{R_s}\right) \quad (3.25)$$

que é semelhante ao espectro da modulação M -ASK, a não ser por um impulso na frequência de 0 Hz.

Eficiência Espectral da Modulação de Amplitude e de Fase

Assim sendo, a eficiência espectral da modulação M -QAM é igual à da modulação M -ASK, dada por (3.23).

3.6.4 Modulação de Frequência

A análise espectral da modulação FSK não é simples e foge do escopo deste livro. A banda de um sinal M -FSK é proporcional ao espaçamento entre os símbolos, ou seja $B \approx 2f_d M$. Determinamos em (3.15) que os símbolos adjacentes são ortogonais desde que $f_d = R_s/4$. Portanto, a banda de um sinal M -FSK é dada por:

$$B \approx \frac{R_b M}{2 \log_2 M} \quad (3.26)$$

onde usamos que $R_s = R_b / \log_2 M$.

Eficiência Espectral da Modulação M -FSK

A eficiência espectral é portanto dada por:

$$E \leq \frac{2 \log_2 M}{M} \quad (3.27)$$

A modulação FSK tem como característica a de degradar a eficiência espectral com o aumento do número de símbolos, contrariamente ao que se observa para as modulações ASK, PSK e QAM, conforme se verifica em (3.23).

3.7 Moduladores Digitais

Vamos examinar a seguir, a estrutura dos moduladores digitais.

3.7.1 Modulador de Amplitude

A Fig. 3.7 apresenta a implementação de um modulador digital de amplitude, onde $x(t)$ é um sinal PAM. O número de níveis, ou o tipo de modulação ASK desejado, se polar, ou unipolar, depende única e exclusivamente do sinal PAM. Se o sinal PAM for binário e polar, então teremos um modulador 2-PSK.

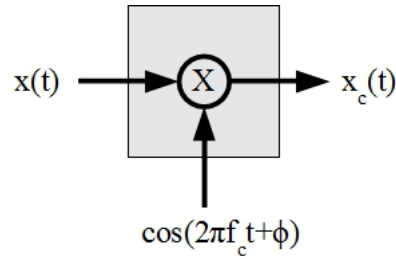


Figura 3.7: Modulador Digital de Amplitude.

3.7.2 Modulador de Fase e de Amplitude e Fase

Modulações de fase com $M > 2$ e modulações de amplitude e fase precisam de um modulador com duas portadoras, como é o caso da implementação M -QAM mostrada na Fig. 3.8, onde $x(t)$ é um sinal PAM polar. O mapeador separa a sequência de amplitudes nas componentes em fase e em quadratura, que serão moduladas pelas portadoras cossenoidal e senoidal, respectivamente.

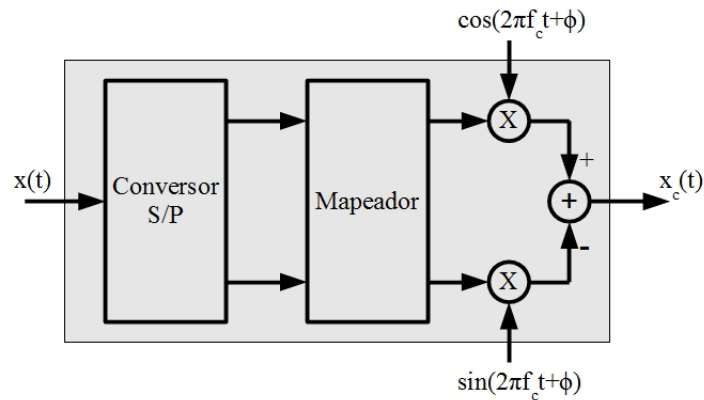


Figura 3.8: Modulador Digital de Fase e Amplitude.

3.7.3 Modulador de Frequência

A Fig. 3.9 apresenta um modulador digital de frequência. As amplitudes de $x(t)$ produzem desvios de frequência acima ou abaixo da portadora, dependendo da polaridade da amplitude.

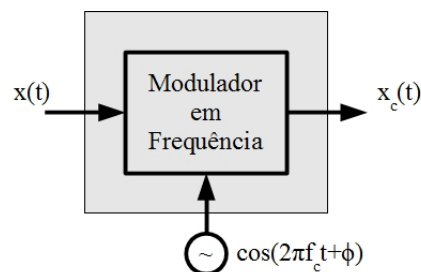


Figura 3.9: Modulador Digital de Frequência.

3.8 Energia por Símbolo

3.8.1 Modulação de Amplitude

A energia por símbolo da modulação M -ASK é dada por:

$$\mathcal{E}_s = \overline{a_i^2} \int_0^{T_s} q^2(t) \cos^2(2\pi f_c t + \phi) dt \quad (3.28)$$

Para pulsos retangulares e variável aleatória de amplitude polar, é fácil obter que:

$$\mathcal{E}_s = \frac{(M^2 - 1)A^2 T_s}{24} \quad (3.29)$$

onde usamos que $\int_0^{T_s} \cos^2(2\pi f_c t + \phi) dt = T_s/2$ e $a_i = \pm A/2, \pm 3A/2, \dots, \pm(M-1)A/2$.

3.8.2 Modulação de Fase

A energia por símbolo para a modulação M -PSK é dada por:

$$\mathcal{E}_s = \int_0^{T_s} A^2 q^2(t) \cos^2(2\pi f_c t + \theta_i + \phi) dt \quad (3.30)$$

Para pulsos retangulares, podemos escrever que:

$$\mathcal{E}_s = \frac{A^2 T_s}{2} \quad (3.31)$$

Como a modulação está na forma de fase e não de amplitude, a energia por símbolo para a modulação M -PSK não depende de M .

3.8.3 Modulação de Amplitude e Fase

A energia por símbolo para a modulação M -QAM é dada por:

$$\mathcal{E}_s = \overline{a_i^2} \int_0^{T_s} q^2(t) \cos^2(2\pi f_c t + \phi) dt + \overline{b_i^2} \int_0^{T_s} q^2(t) \sin^2(2\pi f_c t + \phi) dt \quad (3.32)$$

Para pulsos retangulares, podemos escrever que:

$$\mathcal{E}_s = \frac{(M-1)A^2 T_s}{12} \quad (3.33)$$

onde usamos que $\int_0^{T_s} \sin^2(2\pi f_c t + \phi) dt = T_s/2$ e $a_i = b_i = \pm A/2, \pm 3A/2, \dots, \pm(\sqrt{M}-1)A/2$.

3.8.4 Modulação de Frequência

Assim, como no caso da modulação de fase, a energia por símbolo é dada por

$$\mathcal{E}_s = \frac{A^2 T_s}{2} \quad (3.34)$$

3.9 Demodulação Coerente

Nesta seção vamos obter a estrutura dos receptores para os principais tipos de modulação. Um demodulador podem ser coerente ou não-coerente.

Os receptores coerentes apresentam maior complexidade que receptores não-coerentes, pois precisam estimar a fase do sinal recebido e usá-la no processo de demodulação. Por outro lado, como vantagem apresentam melhor desempenho que os receptores não-coerentes.

3.9.1 Demodulação de Amplitude

Vamos obter o desempenho da demodulação de amplitude, iniciando pelo caso binário.

Demodulação Binária

Considere que foi transmitido a forma de onda correspondente a um bit da modulação 2-ASK unipolar por um canal que não distorce, mas produz atenuação e atraso no sinal transmitido, além de adicionar ruído branco. Assim, o sinal recebido no intervalo $iT_b + t_d \leq t \leq (i+1)T_b + t_d$ é dado por:

$$y(t) = \alpha a_i q(t - iT_b - t_d) \cos[2\pi f_c(t - iT_b - t_d) + \phi] + n(t) \quad (3.35)$$

onde α representa a atenuação do canal, a_i é a variável aleatória de amplitude transmitida que assume os valores 0 e A com mesma probabilidade, $q(t)$ o formato do pulso recebido, t_d é o atraso do canal, f_c é a frequência da portadora, ϕ é a fase inicial da portadora e $n(t)$ é o ruído aditivo gaussiano branco com densidade espectral de potência $N_0/2$.

Foi mostrado para o caso em banda-base que se um sinal PAM com formato de pulso $q(t)$ é recebido, então o filtro ótimo deve ser casado a $q(t)$. Usando o mesmo raciocínio neste caso, o filtro ótimo deve estar casado a $q(t) \cos(2\pi f_c t + \phi)$. Da mesma forma, o filtro correlator para este caso é dado por:

$$z[(i+1)T_b + t_d] = \frac{1}{T_b} \int_{iT_b + t_d}^{(i+1)T_b + t_d} y(t - iT_b - t_d) q(t - iT_b - t_d) \cos[2\pi f_c(t - iT_b - t_d) + \hat{\phi}] dt \quad (3.36)$$

onde $\hat{\phi}$ é uma estimativa da fase recebida.

Vamos realizar a mudança de variáveis, $t - iT_b - t_d = t'$, em (3.36). De volta para a variável t , temos:

$$z(T_b) = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} y(t) q(t) \cos(2\pi f_c t + \hat{\phi}) dt \quad (3.37)$$

De (3.37), podemos obter o filtro correlator para sinais modulados, mostrado na Fig. 3.10. Este filtro correlator pode ser interpretado da seguinte forma. A multiplicação pela cossenóide é utilizada para realizar a demodulação, enquanto que a multiplicação por $q(t)$ é utilizada para fazer o correlator em banda-base. Para realizar a demodulação perfeitamente é preciso conhecer no receptor a fase e também a frequência da portadora. A Fig. 3.10 apresenta o esquema do filtro correlator para sinais modulados.

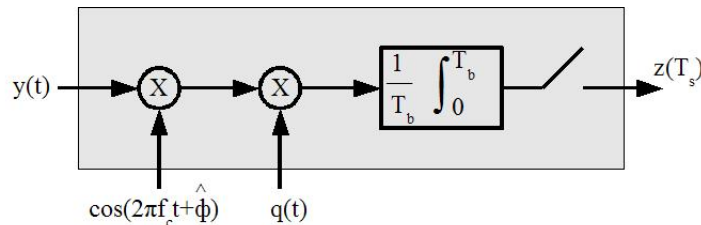


Figura 3.10: Filtro Correlator para Sinais Modulados.

Vamos supor que a estimativa de fase é perfeita, isto é $\hat{\phi} = \phi$. Além disso, vamos supor que o bit 1 foi transmitido. Portanto, a amostra na saída do correlator é dada por:

$$\begin{aligned} z(T_b) &= \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} y(t) q(t) \cos(2\pi f_c t) dt \\ &= \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} \alpha A q^2(t) \cos^2(2\pi f_c t + \phi) dt + \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} n(t) q(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \\ &= \frac{\alpha A}{2T_b} \int_0^{T_b} q^2(t) dt + \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} n(t) q(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde usamos que $y(t) = \alpha A q(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) + n(t)$, que $\cos^2(x) = [1 + \cos(2x)]/2$ e que $\int_0^{T_b} q^2(t) \cos(4\pi f_c t + 2\phi) dt = 0$.

Para o caso em que $q(t)$ é um pulso retangular NRZ de amplitude unitária, temos que:

$$z(T_b) = \frac{\alpha A}{2} + \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} n(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \quad (3.39)$$

Se tivéssemos transmitido o bit 0, teríamos somente ruído:

$$z(T_b) = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} n(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \quad (3.40)$$

Desse modo, a diferença entre os sinais na saída do correlator é igual a:

$$A_d = \frac{\alpha A}{2} \quad (3.41)$$

A potência do ruído na saída do filtro é obtida calculando-se a variância do segundo termo de (3.39) ou de (3.40), que é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \frac{1}{T_b^2} \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} \overline{n(t)n(t')} \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t') dt dt' \\ &= \frac{N_0}{2T_b^2} \int_0^{T_b} \cos^2(2\pi f_c t) dt \\ &= \frac{N_0}{4T_b} \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde usamos que o ruído branco tem função de autocorrelação dada por $\overline{n(t)n(t')} = (N_0/2)\delta(t-t')$ e que $\int_0^{T_b} \cos(2\pi f_c t') \delta(t-t') dt' = \cos(2\pi f_c t)$.

Substituindo que $A_d = \alpha A/2$ e a variância dada por (3.42) em (??), temos que:

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) \quad (3.43)$$

onde para bits equiprováveis usamos que $\mathcal{E}_b = \alpha^2 A^2 T_b/4$. Embora este resultado tenha sido obtido para pulsos retangulares, ele é válido para qualquer forma de pulso.

Demodulação M -ária

Para a modulação M -ASK podemos escrever o sinal recebido como:

$$y(t) = \alpha a_i q(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) + n(t) \quad (3.44)$$

onde $a_i = \pm A/2, \pm 3A/2, \dots, \pm(M-1)A/2$.

Como não temos componente em quadratura o receptor ótimo é composto de apenas um correlator, como o da Fig. 3.10. Na saída do correlator, supondo que $q(t)$ é retangular, as amostras são dadas por:

$$z(T_s) = \frac{\alpha a_i}{2} + \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} n(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \quad (3.45)$$

A diferença entre dois níveis adjacentes é dada por $A_r = A/2$. Existem $M-1$ limiares que para o caso em que os símbolos da modulação M -ASK são equiprováveis são colocados em $0, \pm\alpha A, \pm 2\alpha A, \dots, \pm(M-2)\alpha A/2$.

A obtenção da probabilidade de erro de símbolo é muito parecida com o caso M -PAM em que a probabilidade de erro de símbolo é dada por (??), com a diferença que a energia por símbolo é a metade do caso M -PAM, ou seja,

$$\mathcal{E}_s = \frac{(M^2 - 1)}{24} \alpha^2 A^2 T_s \quad (3.46)$$

e que a potência do ruído na saída do correlator é dada por (3.42), ou seja a metade da potência para o caso M -PAM, dada por (??).

Substituindo, (3.46), (3.42) em (??) temos que a probabilidade de erro de símbolo para a modulação M -ASK é dada por:

$$P_s = 2 \frac{M-1}{M} Q \left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1} \frac{\mathcal{E}_s}{N_0}} \right) \quad (3.47)$$

Finalmente, substituindo (??) e (??) em (3.47), temos que a probabilidade de erro de bit é dada por

$$P_b \approx 2 \frac{M-1}{M \log_2 M} Q \left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2-1} \frac{\mathcal{E}_b}{N_0}} \right) \quad (3.48)$$

que é idêntica a (??). É importante notar que embora as expressões de desempenho sejam iguais, as energias por bit para ambos os casos são diferentes. Não faz qualquer sentido comparar o desempenho de um sistema sem portadora com outro sistema com portadora, visto que as finalidades de transmissão são diferentes. A Fig. ?? que foi obtida para o caso M -PAM é também válida para o caso M -ASK polar.

3.9.2 Demodulação de Fase

Demodulação Binária

Para a modulação PSK, na ausência de ruído, temos os possíveis sinais recebidos para os bits 0 e 1:

$$\begin{aligned} x_{c,0}(t) &= -Aq(t) \cos(2\pi f_c t) \\ x_{c,1}(t) &= Aq(t) \cos(2\pi f_c t) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Transmitindo $x_{c,1}(t)$ por um canal que atenua e adiciona ruído, temos

$$y(t) = \alpha Aq(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) + n(t) \quad (3.50)$$

Utilizando um correlator com estimação perfeita da fase e supondo o uso de pulsos retangulares, com uma análise idêntica àquela realizada na demodulação coerente de amplitude, pode-se mostrar que a diferença entre as amplitudes na saída do correlator é dada por:

$$A_d = \alpha A \quad (3.51)$$

A variância do ruído é a mesma do caso 2-ASK e é dada por (3.42). Substituindo (3.51) e (3.42) em (??), temos a probabilidade de erro de bit, dada por:

$$P_b = Q \left(\sqrt{2 \frac{\mathcal{E}_b}{N_0}} \right) \quad (3.52)$$

onde para bits equiprováveis usamos que $\mathcal{E}_b = \alpha^2 A^2 T_b / 2$. Comparando (3.43) com (3.52), podemos concluir que o desempenho da modulação 2-PSK é 3 dB melhor que o da modulação 2-ASK unipolar.

Demodulação Quaternária

Das modulações de fase, a mais importante sem dúvida alguma é a modulação 4-PSK, também conhecida como Q-PSK, ou PSK quaternário. A modulação Q-PSK é equivalente a duas modulações B-PSK simultâneas, uma sendo transmitida em fase e a outra em quadratura. Assim, o sinal transmitido Q-PSK é dado por:

$$x_c(t) = a_i \cos(2\pi f_c t + \phi) - b_i \sin(2\pi f_c t + \phi) \quad (3.53)$$

onde a_i e b_i assumem os valores $\pm A/2$. A Fig 3.11 apresenta a modulação Q-PSK utilizada para cálculo de desempenho. Obviamente, a defasagem de $\pi/4$ em relação à Fig. 3.3a não altera o desempenho, pois a energia média é a mesma.

Seja p a probabilidade de se errar o bit da componente em fase ou da componente em quadratura. A probabilidade de errarmos um símbolo Q-PSK é igual à probabilidade de errarmos pelo menos um bit das componentes em fase e em quadratura, ou seja,

$$\begin{aligned} P_s &= 1 - (1-p)^2 \\ &= 2p(1-p) + p^2 \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde $(1-p)^2$ é a probabilidade de acertarmos ambos os bits.

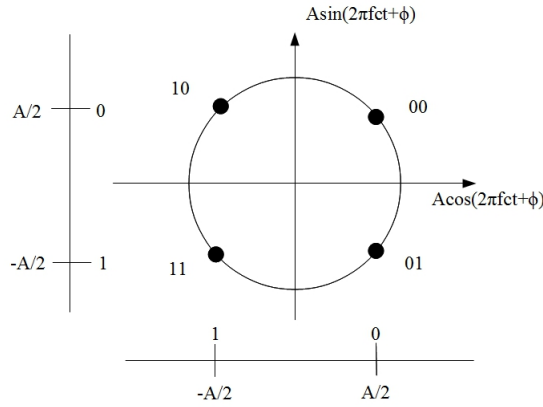


Figura 3.11: Modulação Q-PSK.

Para convertermos a probabilidade de erro de símbolo na probabilidade de erro de bit devemos observar que o termo $p(1 - p)$ implica que erramos apenas a componente em fase ou a em quadratura, enquanto que o termo p^2 equivale a erro nas duas componentes. Usando codificação de Gray, para cada componente errada vamos errar um bit de cada dois bits transmitidos, enquanto que no caso das duas componentes erradas vamos errar dois bits de cada dois bits transmitidos. Assim, a probabilidade de erro de bit para a modulação Q-PSK é dada por:

$$\begin{aligned} P_b &= \frac{1}{2}2p(1 - p) + \frac{2}{2}p^2 \\ &= p \end{aligned} \quad (3.55)$$

isto é, a probabilidade de erro de bit para a modulação Q-PSK é exatamente igual à probabilidade de erro de bit da modulação B-PSK, dada por (3.52). Portanto, a modulação Q-PSK apresenta o dobro da eficiência espectral da modulação B-PSK mantendo o mesmo desempenho.

Demodulação M -ária

Vamos analisar o desempenho da modulação M -PSK. Assim, a forma de onda recebida é dada por:

$$y(t) = \alpha A q(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_i + \phi) + n(t) \quad (3.56)$$

onde $\theta_i = 0, 2\pi/M, 4\pi/M, \dots, (M - 1)2\pi/M$.

Abrindo o termo cossenoidal temos as componentes em fase e em quadratura,

$$y(t) = \alpha A q(t) \cos(\theta_i) \cos(2\pi f_c t + \phi) - \alpha A q(t) \sin(\theta_i) \sin(2\pi f_c t + \phi) + n(t) \quad (3.57)$$

Pelo fato de existirem as duas componentes, o receptor para a modulação M -PSK é mostrado na Fig. 3.12. Na entrada dos comparadores temos as seguintes variáveis de decisão, quando $q(t)$ tem formato retangular:

$$\begin{aligned} z_c(T_s) &= \frac{\alpha A \cos(\theta_i)}{2} + \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} n(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \\ z_s(T_s) &= \frac{\alpha A \sin(\theta_i)}{2} + \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} n(t) \sin(2\pi f_c t + \phi) dt \end{aligned} \quad (3.58)$$

A Fig. 3.13a mostra a região em que ocorrerá um acerto para o caso em que o símbolo transmitido for igual a $\theta_i = 0$. Por outro lado, no complemento desta região ocorrerá um erro. Uma expressão exata da probabilidade de erro de bit para a modulação M -PSK existe apenas para os casos 2 e 4-PSK. Para o caso geral M -PSK iremos obter um limitante bastante preciso. Considere também os semi-planos das Fig. 3.13b e Fig. 3.13c. É fácil verificar que a probabilidade de erro de símbolo é delimitada por:

$$P(S_1) = P(S_2) < P_s < P(S_1 + S_2) \quad (3.59)$$

onde $P(S_1)$ é a probabilidade da amostra recebida pertencer ao semi-plano S_1 e $P(S_1 + S_2)$ é a probabilidade da amostra recebida pertencer à união dos semi-planos S_1 e S_2 .

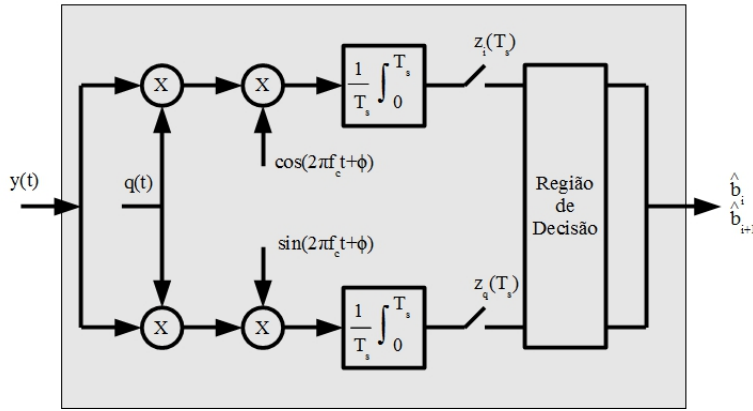


Figura 3.12: Receptor Coerente para a Modulação M -PSK.

Seja $A_d/2$ a distância do símbolo transmitido até a borda de um semi-plano. Então a probabilidade de erro de símbolo em qualquer semi-plano é dada por $Q\left(\frac{A_d}{2\sigma_n}\right)$. Assim, usando (3.59) a probabilidade de erro de símbolo é dada por:

$$Q\left(\frac{A_d}{2\sigma_n}\right) < P_s < 2Q\left(\frac{A_d}{2\sigma_n}\right) \quad (3.60)$$

onde o limitante superior é mais apertado que o inferior e será usado como uma aproximação.

Na saída do filtro correlator, para o símbolo transmitido $\theta_i = 0$ e na ausência de ruído a amplitude da amostra recebida é igual a $A/2$. Assim a distância do símbolo transmitido até a borda de um semi-plano é igual a:

$$\frac{A_d}{2} = \frac{A}{2} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right) \quad (3.61)$$

conforme mostra a Fig. 3.13d.

Substituindo (3.61), (3.31), (??) e (??) em (3.60), podemos escrever que:

$$P_b \approx \frac{2}{\log_2 M} Q\left(\sqrt{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \log_2 M \frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) \quad (3.62)$$

A Fig. 3.14 apresenta a probabilidade de erro de bit para a modulação PSK para $M = 2, 4, 8, 16$ e 32 . Compare com a Fig. ?? e comprove a superioridade da modulação PSK sobre a modulação ASK em termos de desempenho. As curvas correspondentes ao caso binário e quaternário foram obtidas utilizando-se a expressão exata, dada por (3.52).

Comparação entre as Modulações de Amplitude e de Fase

Comparando as expressões de probabilidade de erro de bit dadas por (3.48) e (3.62) em termos das componentes dentro da função $Q(x)$ ⁴, temos

$$\frac{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}_{ASK}}{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}_{PSK}} = \frac{\pi^2}{3} \quad (3.63)$$

onde aproximamos $M^2 - 1 \approx M^2$ e $\sin(\pi/M) \approx \pi/M$ para M grande. Este resultado significa que a modulação M -ASK requer 5,2 dB mais relação sinal-ruído para manter a mesma taxa de erro de bit que a modulação M -PSK.

3.9.3 Demodulação de Amplitude e Fase

Demodulação M -ária

As constelações M -QAM que apresentam forma quadrada podem ter o seu desempenho facilmente calculado, se interpretarmos uma constelação quadrada, como sendo o produto cartesiano de duas constelações ASK com \sqrt{M} formas de onda cada.

⁴Na verdade o termo dentro da função $Q(x)$ é um expoente que produz muito maior variação na probabilidade de erro do que o multiplicador da função $Q(x)$ que pode normalmente ser desprezado.

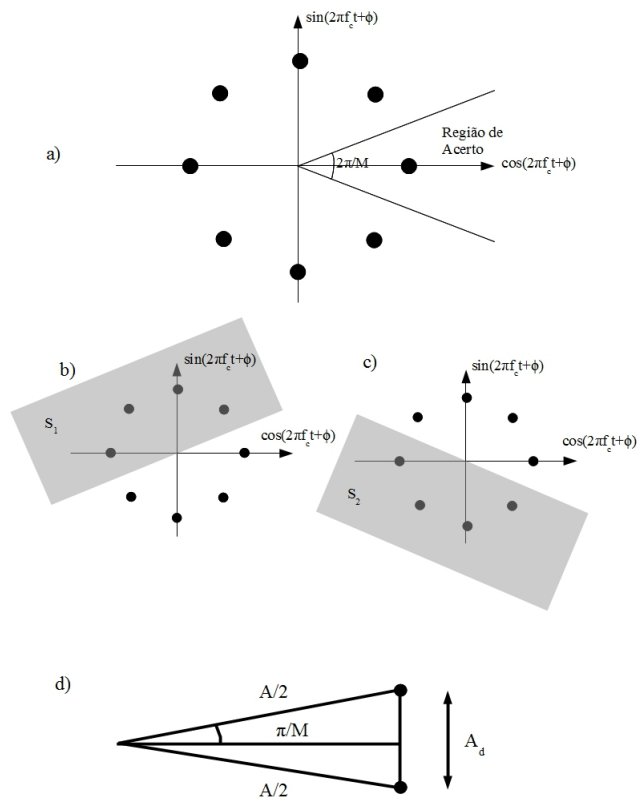


Figura 3.13: a) Região de Acerto para a Modulação M -PSK. b) c) Semi-Planos Utilizados para o Cálculo dos Limitantes. d) Detalhe para Cálculo dos Limitantes de Probabilidade de Erro.

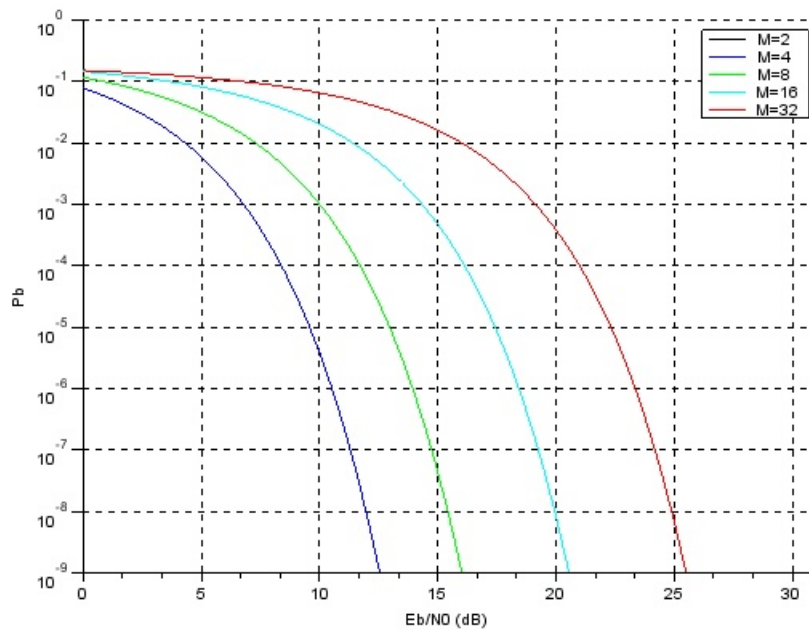


Figura 3.14: Probabilidade de Erro de Bit em Função da Relação E_b/N_0 para a Modulação M -PSK.

A probabilidade de erro de símbolo de uma constelação M -QAM quadrada pode ser obtida a partir da probabilidade de erro de símbolo de duas constelações \sqrt{M} -ASK, ou seja,

$$P_s = 1 - (1 - p)^2 \approx 2p \quad \text{para } p \ll 1 \quad (3.64)$$

onde p é a probabilidade de erro de símbolo de uma modulação \sqrt{M} -ASK. Assim, $(1 - p)^2$ representa a probabilidade de acerto dos símbolos ASK, em fase e em quadratura.

Usando (3.47) e (??) em (3.64) e finalmente substituindo M por \sqrt{M} e usando (??), temos que a probabilidade de erro de bit é dada por:

$$P_b \approx \frac{4}{\log_2 M} \frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M}} Q \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M - 1} \frac{\mathcal{E}_b}{N_0}} \right) \quad (3.65)$$

A Fig. 3.15 apresenta o desempenho da modulação M -QAM. Comparando com as Fig. ?? e 3.14 podemos concluir que a modulação QAM é muito superior às modulações ASK e PSK.

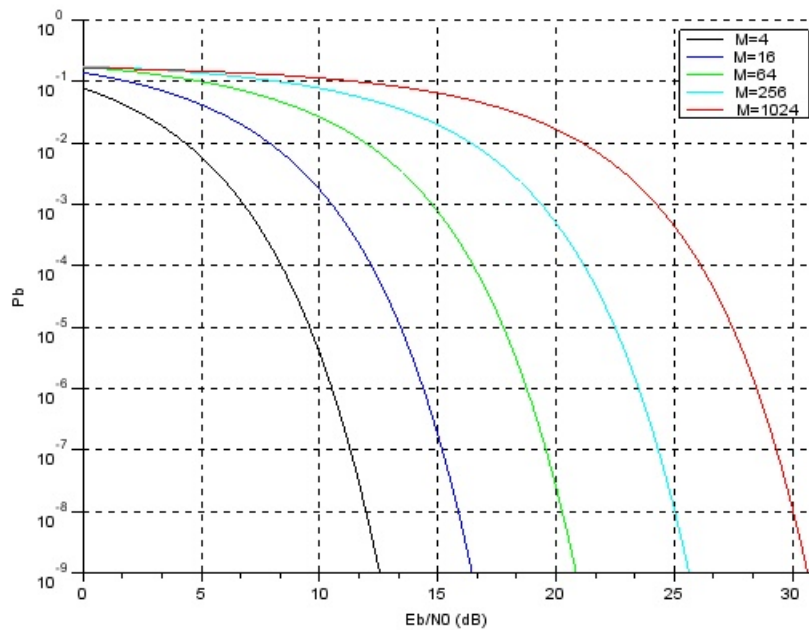


Figura 3.15: Probabilidade de Erro de Bit em Função da Relação $\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}$ para a Modulação M -QAM.

Comparação entre as Modulações de Fase e Amplitude e Fase

Comparando as expressões de probabilidade de erro de bit dadas por (3.62) e (3.65), temos que o ganho da modulação M -QAM em relação à modulação M -PSK é dada por:

$$\frac{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}_{PSK}}{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}_{QAM}} = \frac{3M}{2\pi^2} \quad (3.66)$$

A Tab. 3.1 apresenta o ganho em dB da modulação QAM em relação à modulação PSK em função de M .

M	$\frac{3M}{2\pi^2}$
16	3,9 dB
64	9,9 dB
256	15,9 dB
1024	21,9 dB

Tabela 3.1: Ganho de Relação \mathcal{E}_b/N_0 da Modulação QAM em Relação à Modulação PSK.

3.9.4 Demodulação de Frequência

Demodulação Binária

A modulação FSK binária apresenta os seguintes sinais transmitidos, correspondentes aos bits 0 e 1:

$$\begin{aligned} x_{c,0}(t) &= Aq(t) \cos[2\pi(f_c - f_d)t] \\ x_{c,1}(t) &= Aq(t) \cos[2\pi(f_c + f_d)t] \end{aligned} \quad (3.67)$$

Se $f_d = KR_b/4$, então as formas de onda $x_{c,0}(t)$ e $x_{c,1}(t)$ são ortogonais. Por este motivo, o demodulador FSK é constituído de dois correlatores, um com $x_{c,0}(t)$, o outro com $x_{c,1}(t)$, conforme mostra a Fig. 3.16. As amostras nas saídas dos correlatores são colhidas e então comparadas entre si. O bit escolhido é o que corresponde à maior amostra.

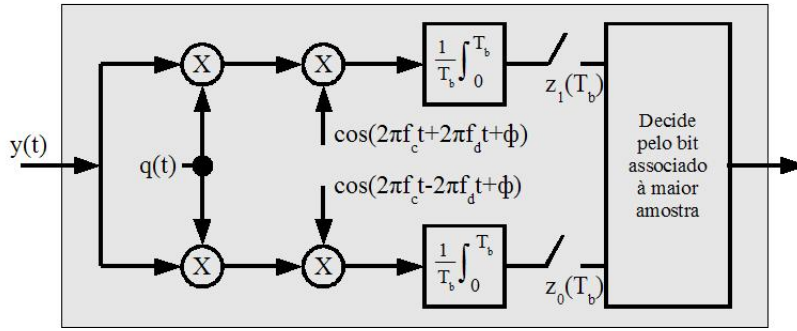


Figura 3.16: Receptor FSK Coerente.

Vamos supor que o sinal $x_{c,1}(t)$ foi transmitido por um canal que atenua e adiciona ruído. Assim, o sinal recebido é igual a:

$$y(t) = \alpha Aq(t) \cos[2\pi(f_c + f_d)t + \phi] + n(t) \quad (3.68)$$

Supondo estimação de fase perfeita e pulsos retangulares, nas saídas superior e inferior do correlator da Fig. 3.16 temos:

$$\begin{aligned} z_0(T_b) &= \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} n(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \\ z_1(T_b) &= \frac{\alpha A}{2} + \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} n(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \end{aligned} \quad (3.69)$$

Por simplicidade de notação vamos usar que $z_1 = z_1(T_b)$ e $z_0 = z_0(T_b)$. As variáveis aleatórias z_0 e z_1 são gaussianas de média $\alpha A/2$ e 0, respectivamente, e de mesma variância, que é dada por (3.42). A probabilidade de erro é igual à probabilidade de que $z_1(T_b) < z_0(T_b)$. Caso tivéssemos transmitido $x_{c,0}(t)$, a probabilidade de erro neste caso seria igual à probabilidade de que $z_1(T_b) > z_0(T_b)$, onde $z_1(T_b)$ e $z_0(T_b)$ teriam média 0 e $\alpha A/2$, respectivamente. Supondo bits equiprováveis, então a probabilidade de erro de bit é igual a

$$\begin{aligned} P_b &= \frac{1}{2}P(z_1(T_b) < z_0(T_b)|b = 1) + \frac{1}{2}P(z_1(T_b) > z_0(T_b)|b = 0) \\ &= P(z_1(T_b) < z_0(T_b)|b = 1) \end{aligned} \quad (3.70)$$

pois as duas probabilidades são iguais.

A probabilidade de erro de bit, ou seja de que $z_1 < z_0$ é dada por:

$$P_b = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(z_1 - \alpha A/2)^2}{2\sigma_n^2}} \int_{z_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{z_0^2}{2\sigma_n^2}} dz_0 dz_1 \quad (3.71)$$

Enquanto a segunda integral calcula a probabilidade condicional para um dado valor de z_1 , $P(z_0 > z_1 | z_1)$, a primeira integral calcula $P(z_1)$, tal que ambas as integrais calculam a probabilidade desejada usando a regra de Bayes, $P(z_0 > z_1) = P(z_0 > z_1 | z_1)P(z_1)$.

Resolvendo (3.71), obtemos que:

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 A^2}{8\sigma_n^2}}\right) \quad (3.72)$$

Substituindo o valor da energia por bit dado por $\mathcal{E}_b = \alpha^2 A^2 T_b / 2$ e a potência do ruído na saída do filtro dada por (3.42) em (3.72), temos que:

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) \quad (3.73)$$

Portanto, a modulação 2-FSK ortogonal apresenta desempenho idêntico ao da modulação 2-ASK com pulso unipolar.

Se o desvio de frequência for tal que os sinais FSK não sejam ortogonais, então pode-se mostrar que a probabilidade de erro de bit é dada por:

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}(1 - \rho)^2}\right) \quad (3.74)$$

onde $\rho = R_{X_{c,1}, X_{c,2}}(0)$ é a correlação cruzada dos sinais transmitidos, dada por (3.15).

Demodulação M -ária

Vamos analisar o desempenho da modulação M -FSK para o caso em que todos os sinais são ortogonais par a par. A grande desvantagem da modulação M -FSK é a complexidade do receptor que necessita de M filtros casados, um para cada desvio de frequência. A estrutura do receptor é semelhante àquela da Fig. 3.16, porém com M filtros casados, onde a regra de decisão é pela escolha do maior amostra.

As formas de onda transmitidas foram obtidas em (3.16). Supondo a transmissão da forma de onda correspondente à variável $b_i = 1$ por um canal que atenua, defasa e adiciona ruído, temos o seguinte sinal recebido:

$$y(t) = \alpha A q(t) \cos[2\pi(f_c + f_d)t + \phi] + n(t) \quad (3.75)$$

Supondo pulsos retangulares, teremos sinal mais ruído na saída de um correlator e somente ruído na saída dos demais,

$$\begin{aligned} z_1(T_s) &= \frac{\alpha A}{2} + \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} n(t) \cos[2\pi(f_c + f_d)t + \phi] dt \\ z_j(T_s) &= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} n(t) \cos[2\pi(f_c + b_i f_d)t + \phi] dt \quad j \neq b_i \end{aligned} \quad (3.76)$$

Todas as variáveis de decisão são gaussianas. Enquanto z_1 tem média $\alpha A/2$, as demais têm média nula. Todas as variáveis têm mesma variância, dadas por (3.42).

A probabilidade de erro para a modulação M -FSK ortogonal pode ser obtida a partir da probabilidade de acerto, isto é:

$$P_s = 1 - \prod_{j=2}^M P(z_1 > z_j) \quad (3.77)$$

onde $\prod_{j=2}^M P(z_1 > z_j)$ é a probabilidade de acerto, ou seja, de que a maior amostra é aquela do correlator $j = 1$.

Pela simetria do problema, todas as probabilidades dentro do produtório são idênticas e podem ser calculadas pela regra de Bayes, ou seja, $P(z_1 > z_j) = P(z_j < z_1 | z_1)P(z_1)$. Assim,

$$P_s = 1 - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(z_1 - \alpha A/2)^2}{2\sigma_n^2}} \int_{-\infty}^{z_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{z_j^2}{2\sigma_n^2}} dz_j dz_1 \right)^{M-1} \quad (3.78)$$

Que pode ser resolvida usando (??). Assim,

$$P_s = 1 - \left[1 - Q \left(\sqrt{\frac{\alpha^2 A^2}{8\sigma_n^2}} \right) \right]^{M-1} \quad (3.79)$$

Usando (3.34), (3.42), (??) e (??) em (3.79), temos que:

$$P_b \approx \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[1 - Q \left(\sqrt{\log_2 M \frac{\mathcal{E}_b}{N_0}} \right) \right]^{M-1} \right\} \quad (3.80)$$

onde o fator de conversão de P_s em P_b é igual a $\frac{1}{\log_2 M} \frac{1}{\log_2 M - 1} \sum_{i=1}^{\log_2 M} (\log_2 M - i) i = \frac{M}{2(M-1)} \approx \frac{1}{2}$.

A Fig. 3.17 apresenta a probabilidade de erro de bit em função da relação \mathcal{E}_b/N_0 em dB para a modulação M -FSK. Comparando este desempenho com as modulações de amplitude ou de fase, podemos concluir que a modulação M -FSK tem um comportamento oposto ao das demais modulações já estudadas. O aumento do número de formas de onda M produz uma melhoria de desempenho e vice-versa.

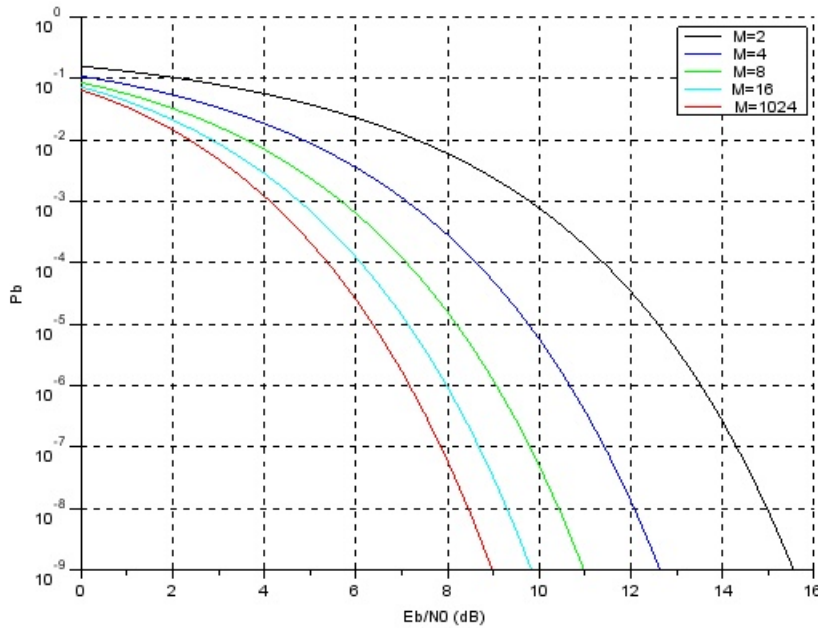


Figura 3.17: Probabilidade de Erro de Bit em Função da Relação \mathcal{E}_b/N_0 em dB para a Modulação M -FSK.

3.10 Figura de Mérito Distância-Energia

Um modo simples de se avaliar comparativamente as diferentes modulações é através da seguinte figura de mérito:

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta_{min}^2 T_s}{8\mathcal{E}_b} \quad (3.81)$$

onde Δ_{min}^2 é a menor distância quadrática entre os símbolos da modulação. Para modulações binárias devemos substituir T_s por T_b . A interpretação da figura de mérito distância-energia é que quanto maior for a distância mínima entre as formas de onda para uma mesma energia por bit, maior será a imunidade em relação ao ruído e portanto melhor será o desempenho da modulação.

A multiplicação da figura de mérito pela relação \mathcal{E}_b/N_0 permite obter uma aproximação da probabilidade de erro de bit de qualquer modulação, isto é:

$$P_b \approx Q\left(\sqrt{\mathcal{F} \frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) \quad (3.82)$$

Exemplo 1 Considere a constelação 2-ASK unipolar da Fig. 3.1a. A distância mínima para esta modulação é igual a $\Delta_{min}^2 = A^2$. A energia por bit é igual a $\mathcal{E}_b = A^2 T_b/4$, portanto a figura de mérito para a constelação 2-ASK unipolar é dada por:

$$\mathcal{F}_{2-ASK} = \frac{1}{2}$$

Portanto, o desempenho desta modulação é dado por $Q(\sqrt{\mathcal{E}_b/N_0})$.

Considere a constelação 2-PSK da Fig. 3.1b. A distância mínima quadrática entre as formas de onda é dada por $\Delta_{min}^2 = A^2$. A energia por bit é igual a $\mathcal{E}_b = A^2 T_b/8$, portanto a figura de mérito para a constelação 2-PSK é dada por:

$$\mathcal{F}_{2-PSK} = 1$$

Portanto, o desempenho desta modulação é dado por $Q(\sqrt{2\mathcal{E}_b/N_0})$. Assim, concluímos que a modulação 2-PSK é 3 dB melhor que a modulação 2-ASK unipolar.

Considere a constelação 4-PSK da Fig. 3.3. A distância mínima quadrática entre as formas de onda é igual a $\Delta_{min} = 2A^2$ e a energia por bit $\mathcal{E}_b = A^2 T_s/2$. Como $T_s = 2T_b$, temos que

$$\mathcal{F}_{4-PSK} = 1$$

Portanto, o desempenho desta modulação é dado por $Q(\sqrt{2\mathcal{E}_b/N_0})$. Então, concluímos que a modulação 4-PSK tem mesmo desempenho que a modulação 2-PSK.

♣

Exemplo 2 A figura de mérito de uma constelação M -QAM pode ser obtida se calcularmos a energia por bit através de (3.33) e (??) e usarmos que a distância mínima $\Delta_{min}^2 = A^2$ de acordo com a Fig. 3.4. A energia por bit da constelação M -QAM é dada por (3.33). Portanto,

$$\mathcal{F}_{M-QAM} = \frac{3 \log_2 M}{2(M-1)}$$

E portanto, a probabilidade de erro de bit é dada por:

$$P_b \approx Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M-1} \frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)$$

que pode ser comparado a (3.65).

♣

3.11 Demodulação Não-Coerente

A principal característica da demodulação não-coerente é não necessitar estimar a fase do sinal recebido. Os principais esquemas com demodulação não-coerente são a modulação ASK unipolar com detecção de envoltória, a modulação FSK com discriminador de frequência e a modulação PSK com detecção diferencial. Das três, a mais utilizada nos dias de hoje é a modulação PSK com detecção diferencial. Vamos iniciar pela modulação de amplitude com detecção de envoltória.

3.11.1 Demodulação de Amplitude

A Fig. 3.18 apresenta o demodulador não-coerente de amplitude, que é composto de um filtro passa-faixa para eliminar o ruído fora da faixa de passagem do sinal, de um detector de envoltória, de um amostrador seguido de um comparador.

O sinal na saída do filtro passa-faixa pode ser escrito como:

$$y_f(t) = \alpha A b_i \cos(2\pi f_c t + \phi) + n_i(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) + n_q(t) \sin(2\pi f_c t + \phi) \quad (3.83)$$

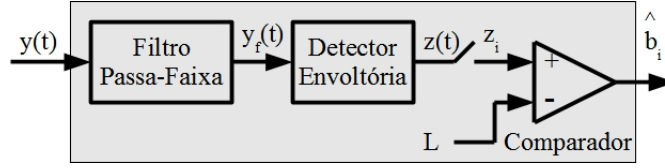


Figura 3.18: Demodulador Não-Coerente de Amplitude.

onde b_i é o bit transmitido que assume os valores 0 ou 1, $n_i(t)$ e $n_q(t)$ são as componentes em fase e em quadratura do ruído filtrado, respectivamente.

Na saída do detector de envoltória temos as envoltórias correspondentes aos bits 0 e 1:

$$z(t) = \sqrt{n_i^2(t) + n_q^2(t)} \quad \text{para } b = 0 \quad (3.84)$$

$$= \sqrt{[\alpha A + n_i(t)]^2 + n_q^2(t)} \quad \text{para } b = 1 \quad (3.85)$$

onde usamos a definição de envoltória, dada por ??.

Como as componentes em fase e em quadratura do ruído são gaussianas de média nula e variância igual a $\sigma_n^2 = N_0 B$, então as amostras de $z_0(t)$ e $z_1(t)$ correspondem às variáveis aleatórias Rayleigh e Rice, respectivamente. De acordo com o critério de Nyquist, $B = R_b$ e portanto podemos escrever a variância do ruído como $\sigma_n^2 = N_0 R_b$.

A probabilidade de erro de bit é dada por:

$$P_b = P(b_i = 0) \int_L^\infty p_Z(z|b_i = 0) dz + P(b_i = 1) \int_0^L p_Z(z|b_i = 1) dz \quad (3.86)$$

onde as PDFs condicionais são dadas por:

$$p_Z(z|b_i = 0) = \frac{z}{\sigma_n^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_n^2}} \quad (3.87)$$

$$p_Z(z|b_i = 1) = \frac{z}{\sigma_n^2} e^{-\frac{(z^2 + \alpha^2 A^2)}{2\sigma_n^2}} I_0\left(\frac{\alpha A z}{\sigma_n^2}\right) \quad (3.88)$$

De acordo com (??), o limiar ótimo é dado por:

$$P(b_i = 0) p_Z(L_{ot}|b_i = 0) = P(b_i = 1) p_Z(L_{ot}|b_i = 1) \quad (3.89)$$

Para o caso em que os bits 0 e 1 são equiprováveis, $P(b_i = 0) = P(b_i = 1) = 1/2$, o limiar ótimo pode ser obtido pelo ponto em que as PDFs se cruzam. Igualando as PDFs de Rayleigh e de Rice, temos que o limiar ótimo é dado por:

$$L_{ot} = \frac{\alpha A}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{\mathcal{E}_b/N_0}} \quad (3.90)$$

Se $\mathcal{E}_b/N_0 \gg 1$, o limiar ótimo, $L_{ot} \approx \alpha A/2$.

A probabilidade de erro, dado que um bit 0 foi transmitido é dada pela primeira integral de (3.86). Assim,

$$\begin{aligned} P(e|b_i = 0) &= \int_{\alpha A/2}^\infty \frac{z}{\sigma_n^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_n^2}} dz \\ &= e^{-\mathcal{E}_b/2N_0} \end{aligned} \quad (3.91)$$

onde a integral foi resolvida usando o método da substituição $x = z^2/2\sigma_n^2$ e além disso usamos que para a modulação 2-ASK unipolar, $\mathcal{E}_b/N_0 = \alpha^2 A^2/4\sigma_n^2$.

Para o caso do bit 1 ter sido transmitido, temos que:

$$\begin{aligned} P(e|b_i = 1) &= \int_0^{\alpha A/2} \frac{z}{\sigma_n^2} e^{-\frac{(z^2 + \alpha^2 A^2)}{2\sigma_n^2}} I_0\left(\frac{\alpha A z}{\sigma_n^2}\right) dz \\ &\approx Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) \end{aligned} \quad (3.92)$$

onde aproximamos a Rice por uma gaussiana. Esta aproximação não tem grandes consequências, pois o termo $P(e|b_i = 0)$ é dominante, pois usando (??) podemos aproximar

$$Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}} e^{-\mathcal{E}_b/2N_0}$$

o que mostra que o termo $P_{e|b_i=1}$ é muito menor que o termo $P_{e|b_i=0}$.

Assim, podemos concluir que o desempenho da demodulação não-coerente para a modulação 2-ASK unipolar é dada por:

$$P_b \approx \frac{1}{2} e^{-\mathcal{E}_b/2N_0} \quad (3.93)$$

A Fig. 3.19 apresenta uma comparação da probabilidade de erro de bit em função da relação \mathcal{E}_b/N_0 em dB para a demodulação coerente e não-coerente de amplitude para pulsos com formato binário unipolar. Podemos ver que há uma perda de desempenho da modulação não-coerente em relação à coerente de aproximadamente 1 dB.

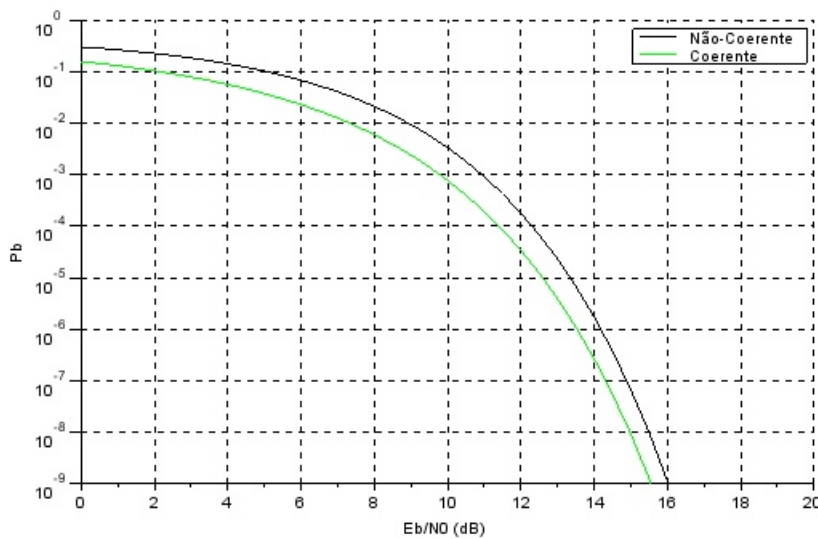


Figura 3.19: Probabilidade de Erro de Bit em Função da Relação \mathcal{E}_b/N_0 em dB para a Demodulação Coerente e Não-Coerente de Amplitude.

3.11.2 Demodulação de Fase Diferencial

Descrição de Funcionamento

A Fig. 3.20 apresenta o demodulador de fase diferencial. O sinal recebido passa por um filtro passa-faixa. A forma de onda anterior é utilizada como oscilador local do sinal atual. Como este oscilador local está contaminado por ruído é de se esperar que esta estratégia seja inferior em desempenho a de um demodulador coerente.

Por conveniência, vamos expressar os sinais recebidos da modulação 2-PSK de um modo um pouco diferente do que fizemos anteriormente. Assim, na saída do filtro passa-faixa e na ausência de ruído podemos escrever que:

$$y(t) = \alpha A \cos(2\pi f_c t + \pi c_i + \phi) \quad (3.94)$$

onde $c_i = 1$ para o bit 1 e $c_i = 0$ para o bit 0.

Na saída do amplificador de ganho 2 teremos o produto do sinal atual $y(t)$ pelo sinal anterior $y(t - T_b)$:

$$2y(t)y(t - T_b) = \alpha^2 A^2 \cos[\pi(c_i - c_{i-1})] + \alpha^2 A^2 \cos[4\pi f_c t + \pi(c_i + c_{i-1}) + 2\phi] \quad (3.95)$$

onde foi suposto que $f_c = K/T_b$.

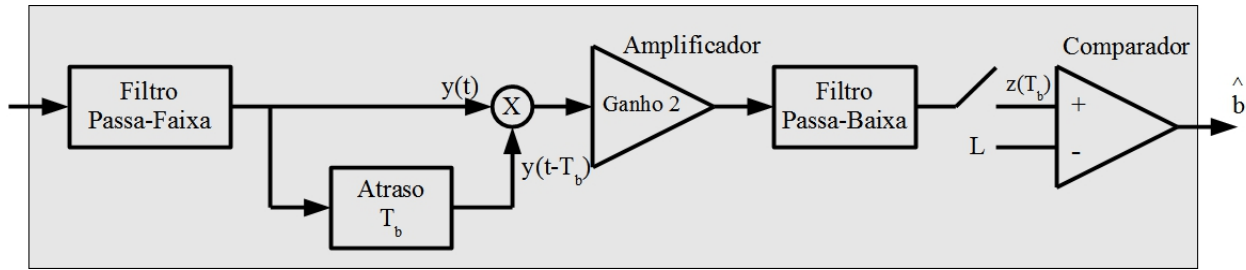


Figura 3.20: Receptor PSK Diferencial.

O segundo termo cossenoidal não passa pelo filtro passa-baixas, assim na saída do amostrador, temos que:

$$z(T_b) = \alpha^2 A^2 \cos[\pi(c_i - c_{i-1})] \quad (3.96)$$

Esta equação dá como resultado $\alpha^2 A^2$, se $c_i = c_{i-1}$ e $-\alpha^2 A^2$ se $c_i \neq c_{i-1}$. Desse modo, foi possível transformar uma demodulação em fase em uma demodulação em amplitude. Observe ainda que a fase do canal ϕ foi eliminada.

Para que o sinal recebido faça algum sentido, precisamos realizar uma codificação no transmissor para que o sinal seja transmitido diferencialmente. A codificação diferencial dos bits de informação no transmissor é realizada através de:

$$c_i = b_i + c_{i-1} + 1 \quad \text{mód } 2 \quad (3.97)$$

onde c_i é o bit codificado pelo transmissor e b_i é o bit de informação.

Isolando $c_i - c_{i-1} = b_i + 1$ e substituindo em (3.96), temos que:

$$z(T_b) = \alpha^2 A^2 \cos(\pi b_i + \pi) \quad (3.98)$$

Assim,

$$\begin{aligned} z(T_b) &= \alpha^2 A^2 & \text{se } b_i &= 1 \\ &= -\alpha^2 A^2 & \text{se } b_i &= 0 \end{aligned} \quad (3.99)$$

O circuito lógico que realiza a codificação dada por (3.97) é o circuito ou-exclusivo com saída negada, cuja tabela verdade é mostrada na Tab. 3.2.

b_i	c_{i-1}	c_i
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabela 3.2: Tabela Verdade da Função Lógica Ou-Exclusivo Negado.

Exemplo 3 A Tab. 3.3 ilustra um exemplo da codificação diferencial, onde se supôs que $c_{-1} = 0$. A coluna denominada Fase Tx apresenta a fase transmitida, enquanto que a coluna denominada $z(T_b)$ apresenta a polaridade do pulso na saída do amostrador. Observe a concordância entre \hat{b}_i e b_i . O leitor é convidado a examinar o caso em que a condição inicial $c_{-1} = 1$ e também concluir que $\hat{b}_i = b_i$.



Análise de Desempenho

Para fazer a análise de desempenho, precisamos considerar também o ruído na saída do filtro passa-faixa. Vamos considerar que $c_i = c_{i-1} = 0$ e portanto teremos um erro quando a variável de decisão for menor que 0. Assim, o sinal recebido na presença de ruído é dado por:

$$y(t) = \alpha A \cos(2\pi f_c t + \pi c_i + \phi) + n_i(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) + n_q(t) \sin(2\pi f_c t + \phi) \quad (3.100)$$

i	b_i	c_i	Fase Tx	$z(T_b)$	\hat{b}_i
0	0	1	π		
1	0	0	0	-	0
2	0	1	π	-	0
3	1	1	π	+	1
4	1	1	π	+	1
5	0	0	0	-	0
6	1	0	0	+	1
7	1	0	0	+	1
8	0	1	π	-	0

Tabela 3.3: Exemplo de Demodulação Diferencial.

onde $n_i(t)$ e $n_q(t)$ são as componentes em fase e em quadratura do ruído na saída do filtro passa-faixa e que têm densidade espectral de potência bilateral igual a N_0 .

Na saída do amostrador pode-se mostrar que:

$$z(T_b) = \alpha^2 A^2 + \alpha A n_i + \alpha A n'_i + n_i n'_i + n_q n'_q \quad (3.101)$$

onde usamos a notação $n_i = n_i(T_b)$, $n'_i = n_i(0)$, $n_q = n_q(T_b)$, $n'_q = n_q(0)$.

Podemos escrever (3.101) de forma alternativa isto é,

$$z(T_b) = x^2 - y^2 \quad (3.102)$$

onde

$$\begin{aligned} x^2 &= (\alpha A + x_i)^2 + x_q^2 \\ y^2 &= y_i^2 + y_q^2 \end{aligned} \quad (3.103)$$

e

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{2}(n_i + n'_i) \\ x_q &= \frac{1}{2}(n_q + n'_q) \\ y_i &= \frac{1}{2}(n_i - n'_i) \\ y_q &= \frac{1}{2}(n_q - n'_q) \end{aligned} \quad (3.104)$$

As variáveis aleatórias n_i, n'_i, n_q, n'_q são gaussianas de média nula e variância dada por $\sigma_n^2 = N_0/T_b$. As variáveis aleatórias x_i, x_q, y_i , e y_q também são gaussianas de média nula, porém com variância $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = N_0/2T_b$. E portanto, X é uma variável aleatória Rice, enquanto que Y é uma variável aleatória Rayleigh, cujas PDF são dadas respectivamente, por:

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \frac{x}{\sigma_X^2} e^{-\frac{(x^2 + \alpha^2 A^2)}{2\sigma_X^2}} I_0\left(\frac{\alpha A x}{\sigma_X^2}\right) \\ p_Y(y) &= \frac{y}{\sigma_Y^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}} \end{aligned} \quad (3.105)$$

Assim, examinando (3.102) teremos um erro quando $z(T_b) < 0$, ou seja quando $x < y$. Portanto,

$$P_b = \int_0^\infty p_X(x) \int_x^\infty p_Y(y) dy dx \quad (3.106)$$

Substituindo (3.105) em (3.106) e resolvendo a integral interna, temos:

$$P_b = \int_0^\infty \frac{x}{\sigma_X^2} e^{-\frac{(2x^2 + \alpha^2 A^2)}{2\sigma_X^2}} I_0\left(\frac{\alpha A x}{\sigma_X^2}\right) dx \quad (3.107)$$

Se colocarmos em evidência o termo $e^{-\frac{\alpha^2 A^2}{4\sigma_X^2}}$ e além disso fizermos que $u = \sqrt{2}x$ e $B = \alpha A/\sqrt{2}$, estaremos forçando o aparecimento de uma distribuição Rice que apresenta integral unitária. Assim,

$$P_b = \frac{1}{2} e^{-\frac{\alpha^2 A^2}{4\sigma_X^2}} \quad (3.108)$$

Substituindo que a energia por bit é igual a $\mathcal{E}_b = \alpha^2 A^2 T_b/2$ e que $\sigma_X^2 = N_0/2T_b$, temos

$$P_b = \frac{1}{2} e^{-\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}} \quad (3.109)$$

A Fig. 3.21 apresenta o desempenho da modulação 2-PSK com detecção diferencial em comparação com a demodulação coerente. Podemos concluir que a detecção diferencial apresenta desempenho aproximadamente 1 dB pior que a demodulação coerente.

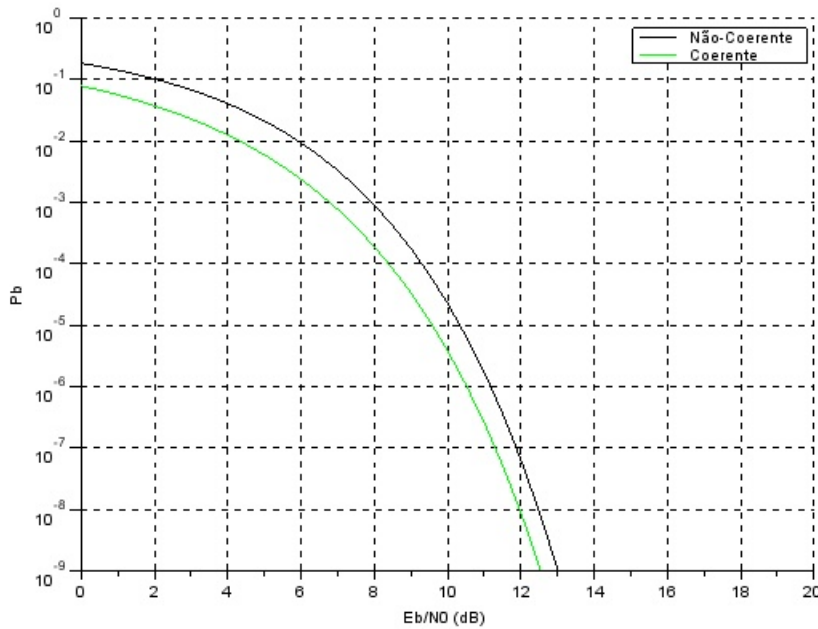


Figura 3.21: Desempenho da Modulação PSK com Detecção Diferencial em Comparação à Demodulação Coerente.

3.11.3 Demodulação de Frequência

Considere a transmissão de um sinal modulado 2-FSK, cujas formas de onda foram apresentadas em (3.67). A Fig. 3.22 mostra o demodulador não-coerente de frequência, que é composto de dois filtros passa-faixa: um para cada frequência. A seguir, são obtidas as envoltórias dos sinais filtrados. As envoltórias são amostradas e é feita uma subtração das mesmas, em que o resultado desta subtração é comparado com um limiar de decisão.

Suponha a transmissão de um bit 1, associado à frequência $f_c + f_d$. O sinal recebido é dado por:

$$y(t) = \alpha A \cos[2\pi(f_c + f_d)t + \phi] + n(t) \quad (3.110)$$

Na saída dos detectores de envoltória superior e inferior, temos respectivamente que:

$$z_1 = \sqrt{[\alpha A + n_i(t)]^2 + n_q^2(t)} \quad (3.111)$$

$$z_0 = \sqrt{n_i^2(t) + n_q^2(t)} \quad (3.112)$$

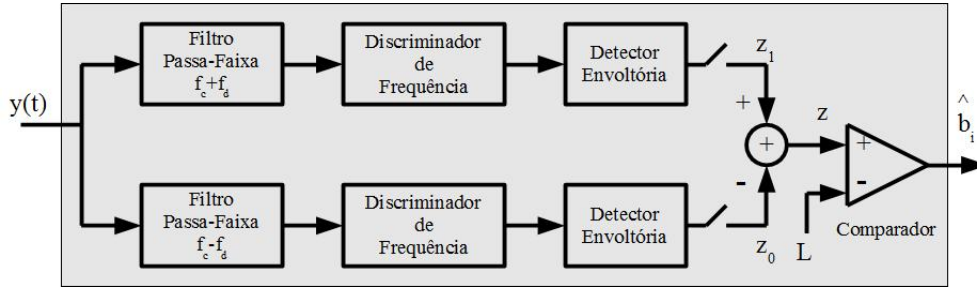


Figura 3.22: Demodulador Não-Coerente de Frequência.

que correspondem a uma variável aleatória de Rayleigh e Rice, respectivamente. Caso o bit transmitido seja 0, as variáveis z_0 e z_1 terão PDF de Rice e Rayleigh, respectivamente. Neste caso, dada a simetria do problema, o limiar ótimo deve ser colocado em 0.

Dado que um bit 1 foi transmitido, teremos erro se $z_0 > z_1$ e vice-versa. Portanto,

$$P_b = P(b_i = 0)P(z_1 > z_0|b_i = 0) + P(b_i = 1)P(z_0 > z_1|b_i = 1) \quad (3.113)$$

Devido à simetria do problema $P(z_1 > z_0|b_i = 0) = P(z_0 > z_1|b_i = 1)$, portanto para o caso em que os bits são equiprováveis:

$$\begin{aligned} P_b &= P(z_0 > z_1|b_i = 1) \\ &= \int_0^\infty p_{Z_1}(z_1) \int_{z_1}^\infty p_{Z_0}(z_0) dz_0 dz_1 \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{\alpha^2 A^2}{4\sigma_n^2}} \end{aligned} \quad (3.114)$$

onde usamos que $\int_{z_1}^\infty \frac{z_0}{\sigma_n^2} e^{-z_0^2/2\sigma_n^2} dz_0 = e^{-z_1^2/2\sigma_n^2}$, fizemos uma substituição de variáveis $x = \sqrt{2}\sigma_n z_1$ e $B = \alpha A/\sqrt{2}$ e além disso usamos que a área de uma PDF de Rice é igual a 1, $\int_0^\infty \frac{x}{\sigma_n^2} e^{-(x^2+B^2)/2\sigma_n^2} I_0\left(\frac{Bx}{\sigma_n^2}\right) dx = 1$.

Deste modo, a probabilidade de erro de bit da modulação 2-FSK com demodulação não-coerente é bastante parecida com a probabilidade de erro de bit da modulação 2-ASK unipolar com demodulação não-coerente, dada por (3.93):

$$P_b = \frac{1}{2} e^{-\mathcal{E}_b/2N_0} \quad (3.115)$$

onde usamos que $\mathcal{E}_b = \alpha^2 A^2 T_b/2$ e que $\sigma_n^2 = N_0/T_b$.

3.12 Esquemas Especiais de Modulação para Rádio-Frequência

3.12.1 Introdução

Em telefonia celular, os aparelhos portáteis utilizam bateria e no sentido de se maximizar a duração da bateria, amplificadores de potência não-lineares são requeridos, pois são mais eficientes. Assim, algumas modulações apresentam problemas quando usadas com amplificadores não-lineares.

Usualmente, antes de serem amplificados e enviados para a antena sinais QPSK são passados por um filtro passa faixa para reduzir a interferência em canais adjacentes. A Fig. 3.23 apresenta a envoltória de um sinal QPSK e de um sinal QPSK filtrado quando de mudanças de 180 graus na fase. Observe que a envoltória de um sinal QPSK filtrado deixa de ser constante, alcançando o valor nulo. Este efeito é altamente indesejável, pois a passagem por amplificadores não-lineares restitui a envoltória constante, eliminando o efeito da filtragem.

Existem algumas modulações que não sofrem do problema descrito anteriormente com o uso de amplificadores não-lineares, como é o caso das modulações OQPSK (“Offset” QPSK), MSK (“Minimum Shift Keying”) e $\pi/4$ DQPSK. Por outro lado, a estação rádio-base por não usar baterias não necessita de amplificadores não-lineares, e portanto modulações convencionais podem ser utilizadas.

Na Fig. 3.24 é apresentado o diagrama fasorial das constelações QPSK, OQPSK e MSK. As fases transmitidas são iguais a 45, 135, 225 e 315 graus. No caso da modulação QPSK, dado que uma fase foi transmitida em um certo instante de

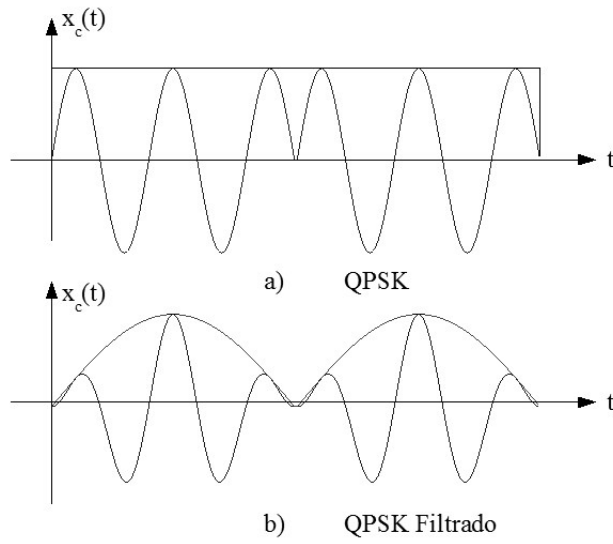


Figura 3.23: Envolvória. a) QPSK. b) QPSK Filtrado.

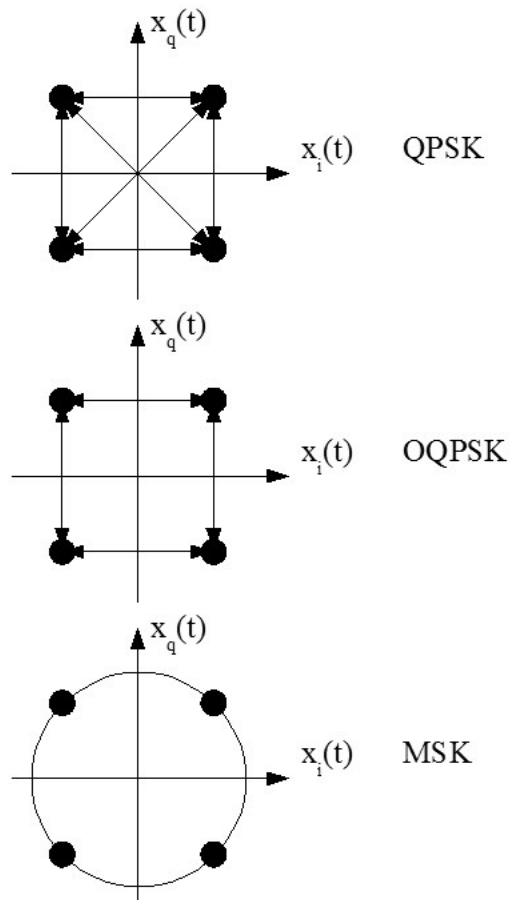


Figura 3.24: Diagrama Fasorial das Modulações: a) QPSK. b) OQPSK. c) MSK.

tempo, não há restrição quanto à fase transmitida no próximo instante de tempo, podendo haver transições de 0, 90, 180 e 270 graus.

Para a modulação OQPSK, a fase no próximo instante de tempo é igual à fase atual ± 90 graus. Não se permite transições de 180 graus, o que evita que a envoltória seja anulada e que a filtragem seja destruída ao se passar o sinal filtrado por um amplificador não-linear. A modulação MSK apresenta as mesmas restrições que a OQPSK. A única diferença é que a fase evolui de um ponto ao outro através de um círculo, ao invés de um quadrado. Isto ficará claro adiante.

3.12.2 OQPSK

Na Fig. 3.25 temos as componentes em fase e em quadratura das modulações QPSK e OQPSK. A modulação OQPSK usa mesma componente em fase que a modulação QPSK, porém a componente em quadratura é atrasada de meio símbolo em relação à componente em fase. Desta maneira, somente uma das componentes varia de cada vez, impedindo variações de fase de 180 graus.

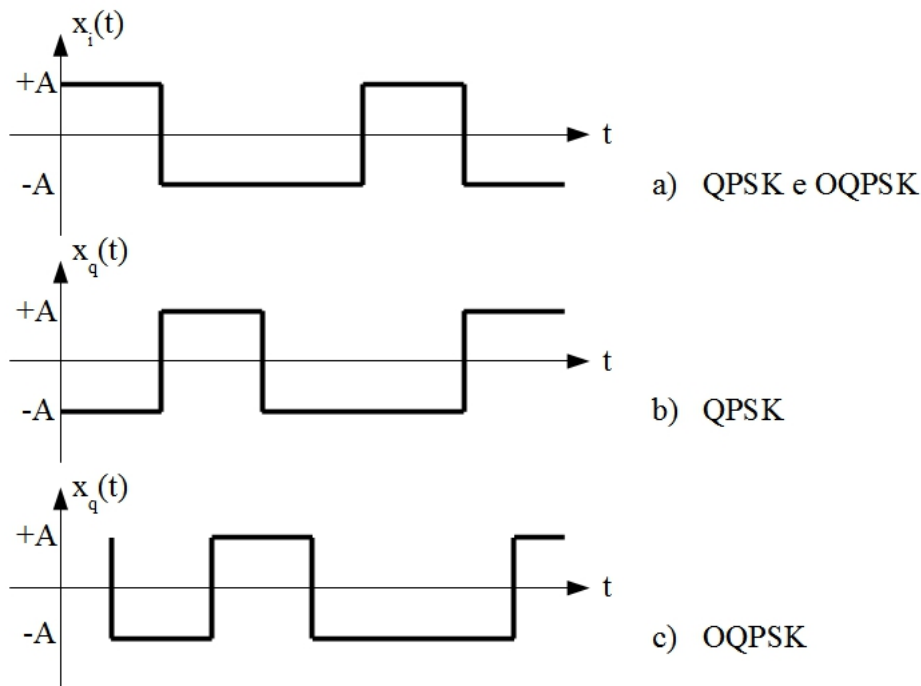


Figura 3.25: a) Componente em Fase QPSK e OQPSK. b) Componente em Quadratura QPSK. c) Componente em Quadratura OQPSK.

Por possuir mesmas componentes em fase e em quadratura a menos de um atraso na componente em quadratura, a modulação OQPSK apresenta mesma densidade espectral de potência e mesmo desempenho que a modulação QPSK. É utilizada no enlace reverso do padrão de telefonia celular CDMA IS-95.

3.12.3 MSK

A modulação MSK é um caso particular da modulação FSK com continuidade de fase e com desvio de frequência $f_d = 1/4T_b$. É utilizada pelo padrão de telefonia celular GSM (“Groupe Special Mobile”). As componentes em fase e em quadratura no intervalo de tempo $iT_b \leq t < (i+1)T_b$ são dadas por:

$$x_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \cos \left[\frac{\pi b_i}{2T_b} (t - iT_b) + \phi_i \right] \text{ret}_{T_b}(t - iT_b) \quad (3.116)$$

$$x_q(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sin \left[\frac{\pi b_i}{2T_b} (t - iT_b) + \phi_i \right] \text{ret}_{T_b}(t - iT_b) \quad (3.117)$$

onde $b_i = \pm 1$ corresponde aos bits transmitidos e o termo ϕ_i garante a continuidade da fase e é dado por:

$$\phi_i = \frac{\pi}{2} \sum_{j=0}^{i-1} b_j \quad (3.118)$$

Exemplo 4 Vamos transmitir a sequência $\mathbf{b} = [+1 \ -1 \ -1 \ +1 \ +1 \ +1 \ -1 \ -1 \ +1]$. A fase inicial por definição é igual a $\phi_0 = 0$. Ao final do intervalo $0 \leq t < T_b$, temos que a fase será igual a $\phi_1 = \pi/2$ e assim por diante. A Tab. 3.4 apresenta valores da fase em função do tempo. A Fig. 3.26 apresenta as formas de onda das componentes em fase e em quadratura.



	$i = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8
b_i	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	+1
ϕ_i	0	$\pi/2$	0	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$\pi/2$	0

Tabela 3.4: Exemplo da Modulação MSK.

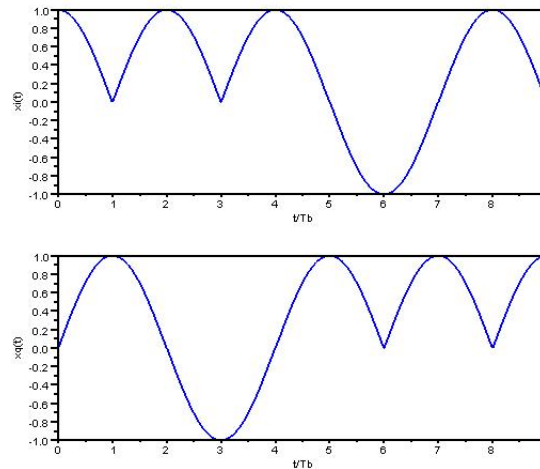


Figura 3.26: Exemplo de Sinais em Fase e em Quadratura para a Modulação MSK.

Pode-se mostrar que a densidade espectral de potência das componentes em fase e em quadratura da modulação MSK é dada por:

$$G_{X_i} = G_{X_q} = \frac{16T_b}{\pi^2} \left[\frac{\cos(2\pi f T_b)}{(4f T_b)^2 - 1} \right]^2 \quad (3.119)$$

Na Fig. 3.27 é feita uma comparação entre as densidades espectrais de potência das modulações QPSK e MSK. Podemos conferir o decaimento mais rápido do espectro de potência da modulação MSK com a frequência. Isto se deve ao fato da modulação MSK apresentar pulsos em banda-base cossenoidais com continuidade de fase.

Pela Fig. 3.26 podemos ver que os pulsos das componentes em fase e em quadratura têm duração de $2T_b$, o que justifica uma banda das componentes em fase e em quadratura de $R_b/4$.

Portanto, a banda passante da modulação MSK é igual a:

$$B = \frac{R_b}{2} \quad (3.120)$$

Assim, a eficiência espectral da modulação MSK é dada por:

$$E = 2 \frac{b/s}{Hz} \quad (3.121)$$

que é igual à eficiência espectral da modulação QPSK.

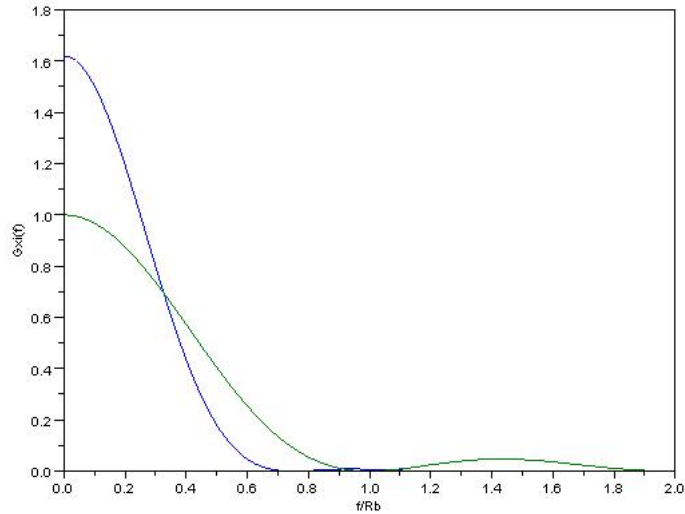


Figura 3.27: Comparação da Densidade Espectral de Potência da Modulação MSK e QPSK.

A Fig. 3.28 apresenta o demodulador MSK. Pode-se mostrar que a probabilidade de erro da modulação MSK é dada por:

$$P_b = Q\left(\sqrt{2k \frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) \quad (3.122)$$

onde $k = 0,85$. Ou seja, a modulação MSK tem desempenho inferior à modulação QPSK por apresentar pulsos senoidais, que tem menor energia. A modulação MSK é utilizado no padrão de telefonia celular europeu GSM.

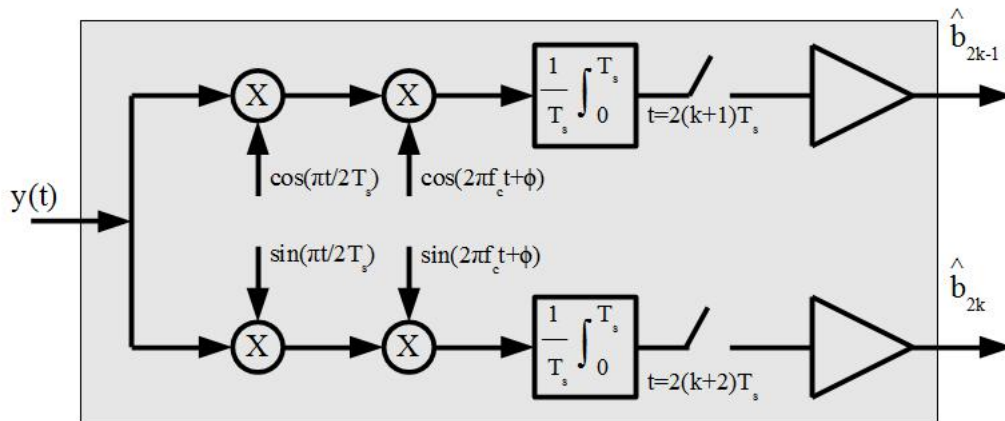


Figura 3.28: Demodulador MSK.

3.12.4 $\pi/4$ DQPSK

Considere a constelação ilustrada na Fig. 3.29. Ela é composta de duas sub-constelações QPSK separadas de 45 graus, que se alternam no tempo. A primeira delas é composta das fases 0, 90, 180 e 270, enquanto que a segunda é composta das fases 45, 135, 225 e 315 graus. Desta maneira, evita-se a anulação da envoltória e desse modo esta modulação pode ser utilizada com amplificadores não-lineares.

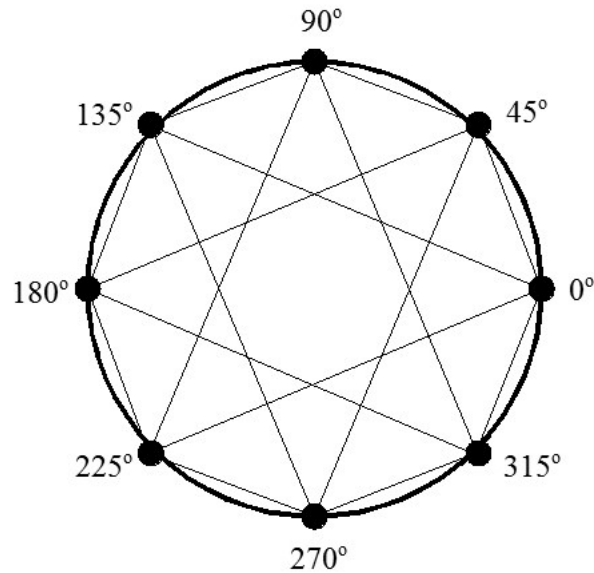


Figura 3.29: Modulação $\pi/4$ DQPSK.

A modulação $\pi/4$ DQPSK apresenta mesmo desempenho que a modulação QPSK se demodulada coerentemente, caso contrário apresenta perda de 3 dB se demodulada diferencialmente. Foi utilizada pelo padrão de telefonia celular norte-americano IS-136.

3.13 Extração de Sincronismo de Portadora no Receptor

Em um sistema passa-faixa, além do sincronismo de símbolo que foi estudado na Sec. ??, há também o sincronismo de fase de portadora utilizado nos demoduladores coerentes.

A Fig. 3.30 apresenta a malha de Costas para a modulação 2-PSK. A malha de Costas é um circuito com realimentação negativa e de fase amarrada (PLL - "Phase Locked Loop"). Na ausência de ruído, o sinal recebido é dado por $y(t) = \pm A \cos(2\pi f_c t + \phi)$, onde ϕ é a fase do sinal recebido. A fase estimada pela malha de Costas é $\hat{\phi}$, de modo que na entrada dos multiplicadores de entrada temos $\cos(2\pi f_c t + \hat{\phi})$ e $\sin(2\pi f_c t + \hat{\phi})$. Na saída dos filtros passa-baixa temos $\pm A/2 \cos(\phi - \hat{\phi})$ e $\pm A/2 \sin(\phi - \hat{\phi})$. Finalmente, na entrada do VCO temos $A^2/8 \sin(2\phi - 2\hat{\phi})$, onde usamos que $\sin(a) \cos(b) = 1/2 \sin(a - b) + 1/2 \sin(a + b)$. Na condição de fase amarrada no PLL temos que $\hat{\phi} = \phi$, isto é, a fase estimada é igual à fase recebida.

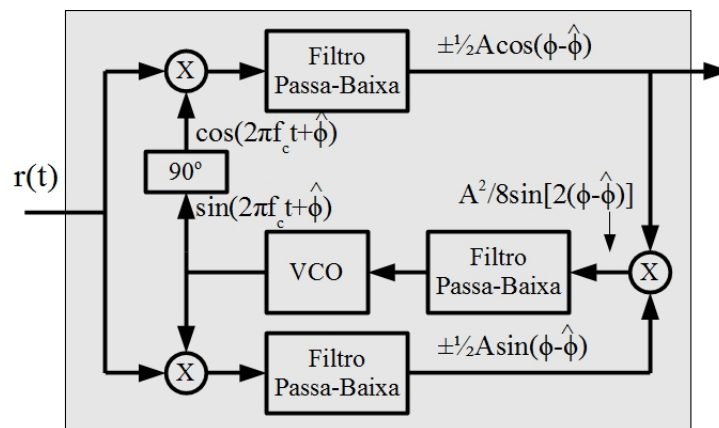


Figura 3.30: Malha de Costas para a Modulação 2-PSK.

3.14 Leitura Adicional

Material de estudo adicional sobre modulação digital pode ser encontrado em [?], [?], [?].

3.15 Rotinas de Simulação

3.15.1 Modulação 2-PSK

Vamos apresentar a seguir, programa que permite realizar a simulação da modulação 2-PSK em um canal AWGN. Vamos supor que a modulação PSK tem amplitudes recebidas $-A$ e A , que corresponde aos ângulos π e 0 que serão associados aos bit 1 e 0, respectivamente. Usando que a energia por bit é dada por $\mathcal{E}_b = A^2 T_b / 2$ e que a potência do ruído é igual a $\sigma_n^2 = N_0 R_b$, temos que o desvio padrão do ruído aditivo é dado por $\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{2\gamma_b}}$, para $A = 1$.

```
clc
clear
nn=1000;
for gbdb=0:7;
    gb=10.^(gbdb./10);
    sig=sqrt(1/2./gb);
    e=0;
    cont=0;
    while e<100
        b=2*round(rand(1:nn))-1;
        n=sig*rand(1:nn,'normal');
        r=b+n;
        c=sign(r);
        e=e+sum(abs(b-c))/2;
        cont=cont+1;
    end
    disp('EbN0 dB')
    disp(gbdb);
    disp('Taxa de erro')
    disp(e/nn/cont)
end
```

3.15.2 Modulação 16-QAM

Vamos apresentar a seguir, programa que permite realizar a simulação da modulação 16-QAM em um canal AWGN. Será suposto que a modulação QAM tem amplitudes recebidas dadas por $-3A$, $-A$, A e $3A$, tanto na componente em fase, quanto na componente em quadratura. É usada codificação de Gray, com 00, 01, 11 e 10 para as componentes em fase e em quadratura, associadas em ordem crescente de amplitude. Usando que a energia por bit é dada por $\mathcal{E}_b = 5A^2 T_b$ e que a potência do ruído é igual a $\sigma_n^2 = N_0 R_s$, temos que o desvio padrão das componentes em fase e em quadratura do ruído aditivo é dado por $\sigma_n = \sqrt{\frac{5}{4\gamma_b}}$, para $A = 1$.

```
clc
clear

function y=deci2bin(x,l,q)
y=zeros(l,l);
i=1;
while x>=0&i<=l
    y(i)=modulo(x,q);
    x=(x-y(i))/q;
    i=i+1;
end
y=y(1:-1:1);
```

```

endfunction

m=16;
lm=log2(m);
for gbdb=0:2:10;
    gb=10.^(gbdb./10);
    sig=sqrt(5/4./gb);
    e=0;
    cont=0;
    while e<100
        s=floor(m*rand(1));
        b=deci2bin(s,lm,2);
        if s==0
            a=-3-3*i;
        elseif s==1
            a=-1-3*i;
        elseif s==2
            a=3-3*i;
        elseif s==3
            a=1-3*i;
        elseif s==4
            a=-3-1*i;
        elseif s==5
            a=-1-1*i;
        elseif s==6
            a=3-1*i;
        elseif s==7
            a=1-1*i;
        elseif s==8
            a=-3+3*i;
        elseif s==9
            a=-1+3*i;
        elseif s==10
            a=3+3*i;
        elseif s==11
            a=1+3*i;
        elseif s==12
            a=-3+1*i;
        elseif s==13
            a=-1+1*i;
        elseif s==14
            a=3+1*i;
        elseif s==15
            a=1+1*i;
        end
        n=sig*rand(1,'normal')+i*sig*rand(1,'normal');
        r=a+n;
        if real(r)<=-2 & imag(r)<=-2
            be=[0 0 0 0];
        elseif real(r)>=-2 & real(r)<=0 & imag(r)<=-2
            be=[0 0 0 1];
        elseif real(r)>=0 & real(r)<=2 & imag(r)<=-2
            be=[0 0 1 1];
        elseif real(r)>=2 & imag(r)<=-2
            be=[0 0 1 0];
        elseif real(r)<=-2 & imag(r)>=-2 & imag(r)<=0
            be=[0 1 0 0];
        end
    end
end

```

```

elseif real(r)>=-2 & real(r)<=0 & imag(r)>=-2 & imag(r)<=0
    be=[0 1 0 1];
elseif real(r)>=0 & real(r)<=2 & imag(r)>=-2 & imag(r)<=0
    be=[0 1 1 1];
elseif real(r)>=2 & imag(r)>=-2 & imag(r)<=0
    be=[0 1 1 0];
elseif real(r)<=-2 & imag(r)>=0 & imag(r)<=2
    be=[1 1 0 0];
elseif real(r)>=-2 & real(r)<=0 & imag(r)>=0 & imag(r)<=2
    be=[1 1 0 1];
elseif real(r)>=0 & real(r)<=2 & imag(r)>=0 & imag(r)<=2
    be=[1 1 1 1];
elseif real(r)>=2 & imag(r)>=0 & imag(r)<=2
    be=[1 1 1 0];
elseif real(r)<=-2 & imag(r)>=2
    be=[1 0 0 0];
elseif real(r)>=-2 & real(r)<=0 & imag(r)>=2
    be=[1 0 0 1];
elseif real(r)>=0 & real(r)<=2 & imag(r)>=2
    be=[1 0 1 1];
elseif real(r)>=2 & imag(r)>=2
    be=[1 0 1 0];
end
e=e+sum(modulo((be+b),2));
cont=cont+1;
end
disp('ebn0db')
disp(gbdb);
disp('Taxa de erro')
disp(e/lm/cont)
end

```

3.16 Exercícios de Simulação

1. Obtenha a taxa de erro de bit em função da relação \mathcal{E}_b/N_0 para a modulação 2-PSK. Obtenha o equivalente passa-baixa do sinal modulado através de (??). Gere uma variável gaussiana correspondente ao ruído aditivo, cuja variância deve corresponder à relação \mathcal{E}_b/N_0 desejada. Simule variando a probabilidade de erro no intervalo de 0 a 10^{-5} .
2. Repita o Exerc. 1 para a modulação 4-PSK.
3. Repita o Exerc. 1 para a modulação 16-QAM.
4. Repita o Exerc. 1 para a modulação 2-FSK.
5. Repita o Exerc. 1 para a modulação 4-FSK.
6. Obtenha a densidade espectral de potência das componentes em fase e em quadratura da modulação 2-PSK.
7. Obtenha a densidade espectral de potência das componentes em fase e em quadratura da modulação 4-PSK, quando os sinais são ortogonais.
8. Obtenha a densidade espectral de potência das componentes em fase e em quadratura da modulação MSK. Compare com (3.119) e também com a densidade espectral de potência da modulação 2-PSK.

3.17 Problemas

1. Obtenha as formas de onda no tempo para as modulações 2-ASK, 4-ASK e 8-ASK com polaridade.

2. Obtenha as formas de onda no tempo para as modulações 2-PSK, 4-PSK e 8-PSK.
3. Obtenha as formas de onda no tempo para a modulação 16-QAM.
4. Obtenha as formas de onda no tempo para as modulações 2-FSK e 4-FSK.
5. Obtenha a densidade espectral de potência das modulações 2-ASK, 4-ASK e 8-ASK com polaridade para pulsos retangulares.
6. Obtenha a densidade espectral de potência das modulações 2-PSK, 4-PSK e 8-PSK para pulsos retangulares.
7. Obtenha a densidade espectral de potência da modulação 16-QAM para pulsos retangulares.
8. Obtenha a densidade espectral de potência das modulações 2-FSK e 4-FSK para pulsos retangulares.
9. Obtenha a densidade espectral de potência e a eficiência espectral da modulação 4-PSK para pulsos cosseno levantado com “roll-off” 1.
10. Suponha uma modulação 2-FSK com descontinuidade de fase, que é gerada por dois osciladores $A \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$ e $A \cos(2\pi f_1 t + \phi_1)$. Obtenha e esboce a densidade espectral de potência, sabendo que este tipo de FSK pode ser obtido pela união de dois sinais ASK. Faça $f_0 = f_c - R_b/2$ e $f_1 = f_c + R_b/2$, para $f_c \gg R_b$.
11. Esboce o modulador digital para as modulações 2-ASK, 4-ASK e 8-ASK com polaridade.
12. Esboce o modulador digital para as modulações 2-PSK, 4-PSK e 8-PSK.
13. Esboce o modulador digital para as modulações 2-FSK, 4-FSK e 8-FSK.
14. Esboce o modulador digital para a modulação 16-QAM e 64-QAM.
15. Obtenha a energia por símbolo, a energia por bit e a potência média das modulações 2-ASK, 4-ASK e 8-ASK com polaridade para pulsos banda-base retangulares.
16. Obtenha a energia por símbolo, a energia por bit e a potência média das modulações 2-PSK, 4-PSK e 8-PSK para pulsos banda-base retangulares.
17. Obtenha a energia por símbolo, a energia por bit e a potência média das modulações 2-FSK, 4-FSK e 8-FSK para pulsos banda-base retangulares.
18. Obtenha a energia por símbolo, a energia por bit e a potência média da modulação 16-QAM para pulsos banda-base retangulares.
19. Considere a modulação B-PSK, tal que os possíveis sinais recebidos no intervalo $0 \leq t \leq T_b$ sejam $s_1(t) = A \cos(2\pi f_c t + \phi)$ e $s_0(t) = A \cos(2\pi f_c t + \pi + \phi)$. Considere o receptor coerente para a modulação B-PSK com oscilador local dado por $KA \cos(2\pi f_c t + \hat{\phi})$, onde $\hat{\phi} - \phi$ é o erro de fase do oscilador local em relação ao sinal recebido. Mostre que a amostra de sinal $y(T_b)$, tanto para o bit 1, quanto para o bit 0, é reduzida por um fator de $\cos(\hat{\phi} - \phi)$.
20. Considere a modulação 2-PSK com um piloto adicionado com objetivo de sincronização:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= -A \cos(2\pi f_c t) + kA \cos(2\pi f_c t) \\ s_1(t) &= A \cos(2\pi f_c t) + kA \cos(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

Mostre que a probabilidade de erro é dada por:

$$P_b = Q \left(\sqrt{\frac{2 \frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}{1 + k^2}} \right)$$

21. Obtenha o desvio em frequência da modulação 2-FSK, tal que a correlação entre as formas de onda seja mínima. Obtenha o desempenho neste caso.

22. Para um ruído com densidade espectral de potência de $N_0 = 4 \times 10^{-21}$ W/Hz, determine a amplitude recebida que garanta uma taxa de erro igual a $P_b = 10^{-6}$ para a modulação 4-PSK. Considere que a taxa de bits é igual a 1 Mb/s. Supondo que a amplitude transmitida é igual a 1 V, determine a atenuação do enlace.
23. Mostre que o limiar ótimo para a demodulação não-coerente de amplitude ao invés de (3.90) pode alternativamente ser dada por:

$$L = \frac{A}{2} + \frac{\sigma_n^2}{2A} \ln \left(\frac{\pi A^2}{\sigma_n^2} \right)$$

Para isto iguale as PDFs Rayleigh e Rice e faça a aproximação que $I_0(x) \approx e^x / \sqrt{2\pi x}$.

24. Considere a demodulação de envoltória da modulação 3-ASK, com formas de onda dadas por $x_c(t) = Ab \cos(2\pi f_c t + \phi)$, para $b = -1, 0, 1$. Obtenha uma expressão da probabilidade de erro de símbolo em função da relação \mathcal{E}_s/N_0 .
25. Faça a pré-codificação e a demodulação de fase diferencial para o caso QPSK. Considere que os símbolos transmitidos são dados por 0, 1, 3, 2, 2, 3, 1, 0. Aos símbolos 0, 1, 2, 3 são associadas as fases $0, \pi/2, \pi/3\pi/2$, respectivamente.
26. Obtenha o ganho assintótico da modulação M -PSK em relação à modulação M -ASK.
27. Obtenha o ganho assintótico da modulação M -QAM em relação à modulação M -PSK.
28. Calcule o acréscimo de relação sinal-ruído necessário para manter a probabilidade de erro de bit constante toda vez que se dobra o número de formas de onda da modulação M -ASK.
29. Calcule o acréscimo de relação sinal-ruído necessário para manter a probabilidade de erro de bit constante toda vez que se dobra o número de formas de onda da modulação M -PSK.
30. Calcule o acréscimo de relação sinal-ruído necessário para manter a probabilidade de erro de bit constante toda vez que se dobra o número de formas de onda da modulação M -QAM.
31. Usando a figura de mérito, determine a probabilidade de erro de bit aproximada da modulação M -ASK.
32. Usando a figura de mérito, determine a probabilidade de erro de bit aproximada da modulação M -PSK.
33. Usando a figura de mérito, determine a probabilidade de erro de bit aproximada da modulação M -FSK.
34. Obtenha a densidade espectral de potência da modulação OQPSK.
35. A Fig. 3.31 mostra a malha de Costas para a modulação 4-PSK. Suponha que o sinal recebido na ausência de ruído é dado por $r(t) = Ab_I \cos(2\pi f_c t + \phi) + Ab_Q \sin(2\pi f_c t + \phi)$, onde b_I e b_Q são os bits transmitidos que assumem valores iguais a ± 1 e ϕ é a fase do sinal recebido. Mostre que na saída do subtrator (detector de fase) temos um sinal proporcional a $\sin(\phi - \hat{\phi})$, onde $\hat{\phi}$ é a fase estimada do PLL.

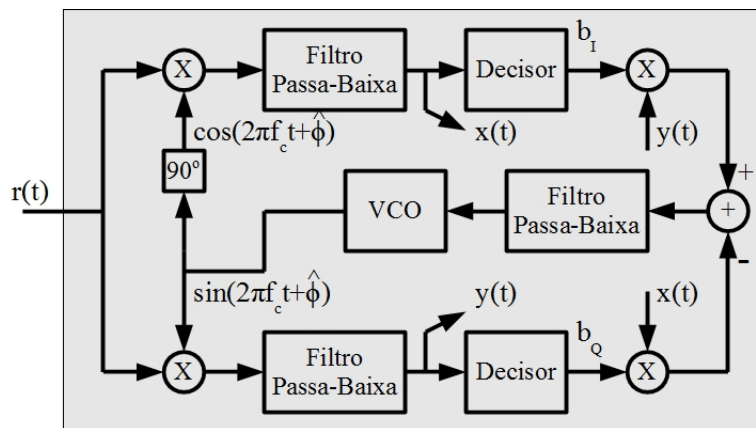


Figura 3.31: Malha de Costas para a Modulação 4-PSK.