§1. MELHOR APROXIMAÇÃO.

Seja F um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$, de dimensão finita, munido de um produto interno $< \mid >$, isto é, munido de uma aplicação que a cada dois elementos de F associa um número real, satisfazendo as seguintes propriedades:

PI-1. $< u|v+w > = < u|v > + < u|w >$, $\forall u,v,w \in F$,
PI-2. $< u|\alpha v > = \alpha < u|v >$, $\forall u,v \in F, \forall \alpha \in \mathbf{R}$,
PI-3. $< u|v > = < v|u >$, $\forall u,v \in F$,
PI-4. $< u|u > \geq 0$, $\forall u \in F$,
PI-5. $u \in F$, $< u|u > = 0 \Longrightarrow u = 0$.

Muitas vezes estamos interessados em:
"Dado um elemento $f \in F$ e um subespaço vetorial G de F, aproximar f por um elemento $\tilde{g} \in G$ ".

É razoável, visto que F tem um produto interno, procurar $\tilde{g} \in G$ tal que o Erro Quadrático

$$\mathrm{EQ}(f,g) = < f-g|f-g >^{\frac{1}{2}} \ , \ g \in G$$

seja mínimo.

Se $\tilde{g} \in G$ for tal que $f - \tilde{g} \perp G$ (isto é, $< f-\tilde{g}|g > = 0 \ \forall g \in G$), então

$$\begin{aligned}
\mathrm{EQ}(f,\tilde{g})^2 &= < f-\tilde{g}|f-\tilde{g} > \\
&= < f-g|f-g > + < f-\tilde{g}|f-\tilde{g} > - < f-g|f-g > \\
&= \mathrm{EQ}(f,g)^2 + < f-\tilde{g}|f-\tilde{g} > - < f-\tilde{g}+(\tilde{g}-g)|f-\tilde{g}+(\tilde{g}-g) > \\
&= \mathrm{EQ}(f,g)^2 - 2 < f-\tilde{g}|\tilde{g}-g > - < \tilde{g}-g|\tilde{g}-g > \\
&= \mathrm{EQ}(f,g)^2 - < \tilde{g}-g|\tilde{g}-g > \\
&\leq \mathrm{EQ}(f,g)^2
\end{aligned}$$

Portanto, $\forall g \in G$ temos

$$\mathrm{EQ}(f,\tilde{g}) \leq \mathrm{EQ}(f,g)$$

e a igualdade vale se e somente se $< \tilde{g}-g|\tilde{g}-g > = 0$, isto é, se e só se $g = \tilde{g}$.

Assim, existe um único elemento $\tilde{g} \in G$ que minimiza $\mathrm{EQ}(f,g)$ quando g percorre G: a projeção ortogonal de f em G.

Uma observação importante:
Para concluir que

" Se $\tilde{g} \in G$ for tal que $< f-\tilde{g}|g > = 0$, $\forall g \in G$ então $\mathrm{EQ}(f,\tilde{g}) \leq \mathrm{EQ}(f,g)$, $\forall g \in G$"

não fizemos uso da propriedade PI-5. Isto significa que se $< \mid >$ não fosse um produto interno em F, mas tivesse as propriedades PI-1, PI-2, PI-3 e PI-4, ainda faria sentido definir o Erro Quadrático ao aproximar f por um elemento g de G por

$$\mathrm{EQ}(f,g) = < f-g|f-g >^{\frac{1}{2}}$$

e escolher $\tilde{g} \in G$ para aproximar f de forma que esse Erro Quadrático fosse mínimo.

A observação anterior nos fornece um método para tentar (e conseguir, como veremos posteriormente!) encontrar uma tal aproximação para f, mas mostra também que, no caso de $< \mid >$ não ter a propriedade PI-5, não podemos, em geral, esperar unicidade dessa aproximação. Observe que teremos unicidade sempre que $< \mid >$ for um produto interno em G.

Este método de Minimizar o Erro Quadrático para obter uma aproximação para f é chamado *MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS.*

OBS.: Daqui para a frente, convencionaremos chamar $< \mid >$ de produto interno em F sempre que estiverem satisfeitas as propriedades PI-1, PI-2, PI-3 e PI-4, *mesmo que PI-5 não esteja verificada.* **Quando quizermos salientar que $< \mid >$ tem também a propriedade PI-5, diremos que ele é um** *Produto Interno Não Degenerado.*

Resumindo o que foi desenvolvido até aqui temos o seguinte resultado:
TEOREMA.
"Seja F um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$, de dimensão finita, munido de um produto interno, e seja G um subespaço vetorial de F.

Se $\tilde{g} \in G$ é tal que $< f - \tilde{g}|g >= 0$, $\forall g \in G$ então $\tilde{g}$ é ponto de mínimo de

$$EQ(f,g) = < f - g|f - g >^{\frac{1}{2}} \, , \; g \in G.$$

Além disso, $g^* \in G$ é outro ponto de mínimo de $EQ(f,g)$ se e somente se $< \tilde{g} - g^*|\tilde{g} - g^* >= 0$.

Em particular, se $< | >$ for um produto interno **não degenerado** em G, haverá um único ponto de mínimo para o Erro Quadrático em G: a projeção ortogonal de f em G."

§2. SISTEMA NORMAL.

Dados
F : espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$,
$< | >$: produto interno em F ,
G : subespaço vetorial de F ,
$f \in F$,
queremos encontrar $\tilde{g} \in G$ de forma a minimizar
$EQ(f,g) = < f - g|f - g >^{\frac{1}{2}}$, $g \in G$.

Do parágrafo anterior, sabemos que é suficiente encontrar $\tilde{g} \in G$ tal que

$$< f - \tilde{g}|g >= 0 \, , \; \forall g \in G. \tag{1}$$

Seja $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ um conjunto de geradores para G, isto é, todo elemento de G se escreve sob a forma

$$a_1 g_1 + a_2 g_2 + \ldots + a_n g_n$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Então (1) é equivalente a

$$\begin{cases} < f - \tilde{g}|g_1 >= 0 \\ < f - \tilde{g}|g_2 >= 0 \\ \quad \vdots \\ < f - \tilde{g}|g_n >= 0 \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{cases} < g_1|\tilde{g} >=< f|g_1 > \\ < g_2|\tilde{g} >=< f|g_2 > \\ \quad \vdots \\ < g_n|\tilde{g} >=< f|g_n > \end{cases} \tag{2}$$

Como procuramos $\tilde{g}$ da forma

$$\tilde{g} = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \ldots + a_n g_n \tag{3}$$

satisfazendo (2), podemos reescrever (2) na forma

$$\begin{cases} a_1 < g_1|g_1 > + a_2 < g_1|g_2 > + \ldots + a_n < g_1|g_n >=< f|g_1 > \\ a_1 < g_2|g_1 > + a_2 < g_2|g_2 > + \ldots + a_n < g_2|g_n >=< f|g_2 > \\ \quad \vdots \\ a_1 < g_n|g_1 > + a_2 < g_n|g_2 > + \ldots + a_n < g_n|g_n >=< f|g_n > \end{cases}$$

ou ainda na forma matricial

$$\begin{bmatrix} < g_1|g_1 > & < g_1|g_2 > & \ldots & < g_1|g_n > \\ < g_2|g_1 > & < g_2|g_2 > & \ldots & < g_2|g_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < g_n|g_1 > & < g_n|g_2 > & \ldots & < g_n|g_n > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < f|g_1 > \\ < f|g_2 > \\ \vdots \\ < f|g_n > \end{bmatrix}$$

Este sistema é chamado de **sistema normal.**

Observe que se este sistema tiver solução $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ então $\tilde{g}$ dada por (3) é um elemento de G que minimiza o Erro Quadrático como aproximação para f em G. Note ainda que se $< | >$ tiver também a propriedade PI-5 em G, essa aproximação será única.

OBS.1: Se $< | >$ tem as propriedades PI-1, PI-2, PI-3 e PI-4 em F e tem a propriedade PI-5 em G então o sistema normal tem sempre solução.

De fato, basta tomar uma base ortogonal $\{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$ de G e tomar $\tilde{g} \in G$ dada por

$$\tilde{g} = \frac{< f|h_1 >}{< h_1|h_1 >} h_1 + \frac{< f|h_2 >}{< h_2|h_2 >} h_2 + \cdots + \frac{< f|h_k >}{< h_k|h_k >} h_k \, .$$

Então

$$\begin{cases} < f - \tilde{g}|h_1 >= 0 \\ \vdots \\ < f - \tilde{g}|h_k >= 0 \end{cases}$$

donde $< f - \tilde{g}|g >= 0$, $\forall g \in G$. Assim, $\tilde{g}$ minimiza o Erro Quadrático, e é o único ponto de mínimo, pois estamos supondo que vale PI-5 em G. Escrevendo-se então $\tilde{g}$ como combinação linear de $g_1, g_2, \ldots, g_n$ temos

$$\tilde{g} = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_n g_n$$

e como $\tilde{g}$ satisfaz $< f - \tilde{g}|g >= 0$, $\forall g \in G$, os coeficientes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dão uma solução para o sistema normal. Observe que os coeficiesntes não precisam ser "únicos", pois não exigimos que $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ fosse uma base de G.

OBS.2: Se $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ é uma base de G e $< | >$ tem as propriedades PI-1, PI-2, PI-3 e PI-4 em F e PI-5 em G, então existe uma única $\tilde{g} \in G$ que minimiza o Erro Quadrático, e mais, o sistema normal terá uma única solução [pois $\tilde{g}$ se expressa de forma única como combinação linear dos elementos de uma base].

OBS.3: Pode-se mostrar que mesmo quando $< | >$ não tem a propriedade PI-5 em G o sistema normal continua tendo solução, mas neste caso perdemos, em geral, a unicidade do ponto de mínimo do Erro Quadrático e consequentemente também a unicidade de solução para o sistema normal, mesmo no caso de $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ ser base G.

§3. EXEMPLOS DE ESPAÇOS VETORIAIS COM PRODUTO INTERNO.

Exemplo 1.

$F = \mathbb{R}^n$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in F$

$$< x|y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$< | >$ definido acima é um produto interno em F, **não degenerado**.

Exemplo 2.

Sejam $h_1, h_2, \ldots, h_n$ funções definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pontos de I, distintos dois a dois.

Tomemos

$$F = [h_1, h_2, \ldots, h_n] = \{h = a_1 h_1 + a_2 h_2 + \cdots + a_n h_n : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

Para duas funções h e $\tilde{h}$ em F definimos:

$$< h|\tilde{h} >= \sum_{i=1}^{k} h(x_i)\tilde{h}(x_i)$$

$< | >$ definido acima é um produto interno em F, que **pode ser degenerado**.

Exemplo 3.

Sejam $h_1, h_2, \ldots, h_n$ funções definidas num intervalo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, integráveis em I.

Tomemos

$$F = [h_1, h_2, \ldots, h_n] = \{h = a_1 h_1 + a_2 h_2 + \cdots + a_n h_n : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

Para duas funções h e $\tilde{h}$ em F definimos:

$$< h|\tilde{h} >= \int_a^b h(x)\tilde{h}(x)dx$$

$< | >$ definido acima é um produto interno em F, que **pode ser degenerado**. Este produto interno será **não degenerado** quando $h_1, h_2, \ldots, h_n$ forem **contínuas** em I.

Exemplo 4.

Sejam $h_1, h_2, \ldots, h_n$ funções definidas num retângulo $I \times J \subset \mathbb{R}^2$.

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_r$ pontos de I, distintos dois a dois, e $y_1, y_2, \ldots, y_s$ pontos de J, também distintos dois a dois.

Tomemos

$$F = [h_1, h_2, \ldots, h_n] = \{h = a_1 h_1 + a_2 h_2 + \cdots + a_n h_n : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

Para duas funções h e $\tilde{h}$ em F definimos:

$$< h|\tilde{h} >= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} h(x_i, y_j)\tilde{h}(x_i, y_j)$$

$< | >$ definido acima é um produto interno em F, que **pode ser degenerado.**

Exemplo 5.

Sejam $h_1, h_2, \ldots, h_n$ funções definidas num retângulo $[a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2$, integráveis em $[a,b] \times [c,d]$.

Tomemos

$$F = [h_1, h_2, \ldots, h_n] = \{h = a_1 h_1 + a_2 h_2 + \cdots + a_n h_n : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

Para duas funções h e $\tilde{h}$ em F definimos:

$$< h|\tilde{h} >= \int_a^b \left[\int_c^d h(x,y)\tilde{h}(x,y)dy \right] dx$$

$< | >$ definido acima é um produto interno em F, que **pode ser degenerado.** Este produto interno será **não degenerado** quando $h_1, h_2, \ldots, h_n$ forem **contínuas** em $[a,b] \times [c,d]$.

Exemplo 6.

Sejam $h_1, h_2, \ldots, h_n$ funções definidas em $\mathbb{R}$, periódicas de período $2L$, onde $L > 0$.

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pontos de um intervalo $(a, a+2L]$, distintos dois a dois.

Tomemos

$$F = [h_1, h_2, \ldots, h_n] = \{h = a_1 h_1 + a_2 h_2 + \cdots + a_n h_n : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

Para duas funções h e $\tilde{h}$ em F definimos:

$$< h|\tilde{h} >= \sum_{i=1}^{k} h(x_i)\tilde{h}(x_i)$$

$< | >$ definido acima é um produto interno em F, que **pode ser degenerado.**

Exemplo 7.

Sejam $h_1, h_2, \ldots, h_n$ funções definidas em $\mathbb{R}$, periódicas de período $2L$, onde $L > 0$, integráveis em $[-L, L]$.

Tomemos

$$F = [h_1, h_2, \ldots, h_n] = \{h = a_1 h_1 + a_2 h_2 + \cdots + a_n h_n : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

Para duas funções h e $\tilde{h}$ em F definimos:

$$< h|\tilde{h} >= \int_{-L}^{L} h(x)\tilde{h}(x)dx$$

Observe que $\forall a \in \mathbb{R}$ temos

$$\int_{-L}^{L} h(x)\tilde{h}(x)dx = \int_a^{a+L} h(x)\tilde{h}(x)dx$$

$< | >$ definido acima é um produto interno em F, que **pode ser degenerado.** Este produto interno será **não degenerado** quando $h_1, h_2, \ldots, h_n$ forem **contínuas** em $\mathbb{R}$.

§4. MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS - APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES.

4.1 Funções de uma variável.

a) Caso discreto:

Dados:
$x_1, x_2, \ldots, x_k$: pontos num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, distintos 2 a 2,
Tabela de uma função f definida em I:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\ldots$	$f(x_k)$

$g_1, g_2, \ldots, g_n$: funções definidas em I.

Problema:
Aproximar f pelo MMQ por uma função da forma
$a_1g_1 + a_2g_2 + \cdots + a_ng_n$
onde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Modelo:

$$F = [f, g_1, g_2, \ldots, g_n] \quad , \quad G = [g_1, g_2, \ldots, g_n] \, ,$$

$$< h|\tilde{h} >= \sum_{i=1}^{k} h(x_i)\tilde{h}(x_i) \ , \ \forall h, \tilde{h} \in F.$$

Procurar $\tilde{g} = a_1g_1 + a_2g_2 + \cdots + a_ng_n \in G$ que minimize

$$\mathrm{EQ}(f,g) =< f-g|f-g >^{\frac{1}{2}} \ , \ g \in G.$$

Obs.: Para isto basta obter uma solução $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ do sistema normal correspondente.

b) Caso contínuo:

Dados:
$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$,
f : função definida em I, integrável em I,
$g_1, g_2, \ldots, g_n$: funções definidas em I, integráveis em I.

Problema:
Aproximar f pelo MMQ por uma função da forma
$a_1g_1 + a_2g_2 + \cdots + a_ng_n$
onde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Modelo:

$$F = [f, g_1, g_2, \ldots, g_n] \quad , \quad G = [g_1, g_2, \ldots, g_n] \, ,$$

$$< h|\tilde{h} >= \int_a^b h(x)\tilde{h}(x)dx \ , \ \forall h, \tilde{h} \in F.$$

Procurar $\tilde{g} = a_1g_1 + a_2g_2 + \cdots + a_ng_n \in G$ que minimize

$$\mathrm{EQ}(f,g) =< f-g|f-g >^{\frac{1}{2}} \ , \ g \in G.$$

Obs.: Para isto basta obter uma solução $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ do sistema normal correspondente.

4.2 Funções de duas variáveis.

a) Caso discreto:

Dados:
$x_1, x_2, \ldots, x_r$: pontos num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, distintos 2 a 2,
$y_1, y_2, \ldots, y_s$: pontos num intervalo $J \subset \mathbb{R}$, distintos 2 a 2,

Tabela de uma função f definida em $I \times J \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{cccccc} & x_i & x_1 & x_2 & \cdots & x_r \\ y_j & f(x_i,y_j) & f(x_1,y_j) & f(x_2,y_j) & \cdots & f(x_r,y_j) \\ y_1 & f(x_i,y_1) & f(x_1,y_1) & f(x_2,y_1) & \cdots & f(x_r,y_1) \\ y_2 & f(x_i,y_2) & f(x_1,y_2) & f(x_2,y_2) & \cdots & f(x_r,y_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_s & f(x_i,y_s) & f(x_1,y_s) & f(x_2,y_s) & \cdots & f(x_r,y_s) \end{array}$$

$g_1, g_2, \ldots, g_n$: funções definidas em $I \times J$.

Problema:
Aproximar f pelo MMQ por uma função da forma
$a_1g_1 + a_2g_2 + \cdots + a_ng_n$
onde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Modelo:

$$F = [f, g_1, g_2, \ldots, g_n] \ , \quad G = [g_1, g_2, \ldots, g_n] \ ,$$

$$< h|\tilde{h} >= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} h(x_i,y_j)\tilde{h}(x_i,y_j) \ , \ \forall h, \tilde{h} \in F.$$

Procurar $\tilde{g} = a_1g_1 + a_2g_2 + \cdots + a_ng_n \in G$ que minimize

$$\mathrm{EQ}(f,g) =< f - g|f - g >^{\frac{1}{2}} \ , \ g \in G.$$

Obs.: Para isto basta obter uma solução $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ do sistema normal correspondente.

b) Caso contínuo:

Dados:
$I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, e $J = [c,d] \subset \mathbb{R}$,
f : função definida em $I \times J$, integrável em $I \times J$,
$g_1, g_2, \ldots, g_n$: funções definidas em $I \times J$, integráveis em $I \times J$.

Problema:
Aproximar f pelo MMQ por uma função da forma
$a_1g_1 + a_2g_2 + \cdots + a_ng_n$
onde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Modelo:

$$F = [f, g_1, g_2, \ldots, g_n] \ , \quad G = [g_1, g_2, \ldots, g_n] \ ,$$

$$< h|\tilde{h} >= \int_a^b \left[\int_c^d h(x,y)\tilde{h}(x,y)dy\right] dx \ , \ \forall h, \tilde{h} \in F.$$

Procurar $\tilde{g} = a_1g_1 + a_2g_2 + \cdots + a_ng_n \in G$ que minimize

$$\mathrm{EQ}(f,g) =< f - g|f - g >^{\frac{1}{2}} \ , \ g \in G.$$

Obs.: Para isto basta obter uma solução $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ do sistema normal correspondente.

4.3 Funções periódicas - Análise Harmônica.

a1) Caso discreto:

Dados:
$x_1, x_2, \ldots, x_k$: pontos distintos num intervalo $(a, a+2L] \subset \mathbb{R}$, $(L > 0)$.
Tabela de uma função f definida em $\mathbb{R}$, periódica de período $2L$:

$$\begin{array}{ccccc} x_i & x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ f(x_i) & f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_k) \end{array}$$

$g_1, g_2, \ldots, g_n$: funções definidas em $\mathbb{R}$, periódicas de período $2L$.

Problema:
Aproximar f pelo MMQ por uma função da forma
$a_1g_1 + a_2g_2 + \cdots + a_ng_n$
onde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Modelo:

$$F = [f, g_1, g_2, \ldots, g_n] \ , \quad G = [g_1, g_2, \ldots, g_n] \ ,$$

$$< h|\tilde{h} >= \sum_{i=1}^{k} h(x_i)\tilde{h}(x_i) \ , \ \forall h, \tilde{h} \in F.$$

Procurar $\tilde{g} = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_n g_n \in G$ que minimize

$$\mathrm{EQ}(f,g) =< f - g|f - g >^{\frac{1}{2}} \ , \ g \in G.$$

Obs.: Para isto basta obter uma solução $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ do sistema normal correspondente.

a2) Exemplo: Análise Harmônica discreta:

Dados:
$x_1, x_2, \ldots, x_{2N}$: pontos igualmente espaçados num intervalo $(a, a+2\pi] \subset \mathbb{R}$, dados por $x_j = \frac{\pi}{N} j$, $j = 1, 2, \ldots, 2N$.
Tabela de uma função f definida em $\mathbb{R}$, periódica de período 2π:

x_j	x_1	x_2	$\ldots$	x_{2N}
$f(x_j)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\ldots$	$f(x_{2N})$

$m \in \mathbb{N}$, $m < N$

Problema:
Fazer a Análise Harmônica de f até o harmônico de ordem m, isto é, aproximar f pelo MMQ por uma função da forma
$a_0 + \sum_{j=1}^{m} [a_j \cos jx + b_j \sin jx]$
onde $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, $b_1, b_2, \ldots, m \in \mathbb{R}$.

Modelo:

$$F = [f, 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos mx, \sin mx]$$

$$G = [1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos mx, \sin mx]$$

$$< h|\tilde{h} >= \sum_{j=1}^{2N} h(x_j)\tilde{h}(x_j) = \sum_{j=1}^{2N} h(\frac{\pi}{N} j)\tilde{h}(\frac{\pi}{N} j)$$

$\forall h, \tilde{h} \in F$.
Procurar $\tilde{g}(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{m} [a_j \cos jx + b_j \sin jx] \in G$ que minimize

$$\mathrm{EQ}(f,g) =< f - g|f - g >^{\frac{1}{2}} \ , \ g \in G.$$

Obs.: Para isto basta obter uma solução $(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_m, b_m)$ do sistema normal correspondente.

b1) Caso contínuo:

Dados:
f : função definida em $\mathbb{R}$, periódica de período $2L$, $(L > 0)$, integrável em $[-L, L]$,
$g_1, g_2, \ldots, g_n$: funções definidas em $\mathbb{R}$, periódicas de período $2L$, integráveis em $[-L, L]$.

Problema:
Aproximar f pelo MMQ por uma função da forma
$a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_n g_n$
onde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Modelo:

$$F = [f, g_1, g_2, \ldots, g_n] \ , \quad G = [g_1, g_2, \ldots, g_n] \ ,$$

$$< h|\tilde{h} >= \int_{-L}^{L} h(x)\tilde{h}(x)dx \ , \ \forall h, \tilde{h} \in F.$$

Procurar $\tilde{g} = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_n g_n \in G$ que minimize

$$\mathrm{EQ}(f,g) =< f - g|f - g >^{\frac{1}{2}} \ , \ g \in G.$$

Obs.: Para isto basta obter uma solução $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ do sistema normal correspondente.

b2) Exemplo: Análise Harmônica - caso contínuo:

Dados:
f : função definida em $\mathbb{R}$, periódica de período $2L$;
$m \in \mathbb{N}$

Problema:
Fazer a Análise Harmônica de f até o harmônico de ordem m, isto é, aproximar f pelo MMQ por uma função da forma
$a_0 + \sum_{j=1}^{m}[a_j \cos j\frac{\pi}{L}x + b_j \sin j\frac{\pi}{L}x]$
onde $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, $b_1, b_2, \ldots, m \in \mathbb{R}$.

Modelo:

$$F = [f, 1, \cos\frac{\pi}{L}x, \sin\frac{\pi}{L}x, \cos 2\frac{\pi}{L}x, \sin 2\frac{\pi}{L}x, \ldots, \cos m\frac{\pi}{L}x, \sin m\frac{\pi}{L}x]$$

$$G = [1, \cos\frac{\pi}{L}x, \sin\frac{\pi}{L}x, \cos 2\frac{\pi}{L}x, \sin 2\frac{\pi}{L}x, \ldots, \cos m\frac{\pi}{L}x, \sin m\frac{\pi}{L}x]$$

$$< h|\tilde{h} >= \int_{-L}^{L} h(x)\tilde{h}(x)dx \ , \ \forall h, \tilde{h} \in F.$$

Procurar $\tilde{g}(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{m}[a_j \cos j\frac{\pi}{L}x + b_j \sin j\frac{\pi}{L}x] \in G$ que minimize

$$\text{EQ}(f, g) = < f - g|f - g >^{\frac{1}{2}} \ , \ g \in G.$$

Obs.: Para isto basta obter uma solução $(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_m, b_m)$ do sistema normal correspondente.

4.4 Minimização de certas integrais e certas somatórias dependendo de parâmetros.

Observemos que a teoria vista aqui sobre aproximação pelo MMQ pode ser usada para resolver o problema de encontrar um ponto de mínimo para qualquer das seguintes funções:

$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \int_a^b \{h(x) - a_1g_1(x) - a_2g_2(x) - \ldots - a_ng_n(x)\}^2 dx$$

$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{k}\{h(x_i) - a_1g_1(x_i) - a_2g_2(x_i) - \ldots - a_ng_n(x_i)\}^2$$

$$H(a_1, \ldots, a_n) = \int_a^b \left[\int_c^d h(x,y) - a_1g_1(x,y) - \ldots - a_ng_n(x,y)\}^2 dy\right] dx$$

$$H(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\{h(x_i, y_j) - a_1g_1(x_i, y_j) - \ldots - a_ng_n(x_i, y_j)\}^2$$

§5. PARTICULARIDADES DA ANÁLISE HARMÔNICA.

b1) Caso contínuo:

O sistema normal que deve ser resolvido quando fazemos Análise Harmônica de uma função num intervalo [a,a+2L] é diagonal. Isto se deve ao fato de as funções

$$1 \ , \ \cos\frac{\pi}{L}x \ , \ \sin\frac{\pi}{L}x \ , \ \cos 2\frac{\pi}{L}x \ , \ \sin 2\frac{\pi}{L}x \ , \ldots, \ \cos m\frac{\pi}{L}x \ , \ \sin m\frac{\pi}{L}x$$

serem ortogonais com respeito ao produto interno

$$< h|\tilde{h} >= \int_{-L}^{L} h(x)\tilde{h}(x)dx$$

Mais explicitamente, temos:

$$< 1|\cos j\frac{\pi}{L}x >= \int_{-L}^{L} \cos j\frac{\pi}{L}x dx = 0 \ , \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

$$< 1|\sin j\frac{\pi}{L}x >= \int_{-L}^{L} \sin j\frac{\pi}{L}x dx = 0 \ , \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

$$< \cos j\frac{\pi}{L}x|\cos k\frac{\pi}{L}x >= \int_{-L}^{L} \cos j\frac{\pi}{L}x \cos k\frac{\pi}{L}x dx = 0 \ , \ \forall j, k \in \mathbb{N} \ , \ j \neq k.$$

$$< \sin j\frac{\pi}{L}x|\sin k\frac{\pi}{L}x >= \int_{-L}^{L} \sin j\frac{\pi}{L}x \sin k\frac{\pi}{L}x dx = 0 \ , \ \forall j, k \in \mathbb{N} \ , \ j \neq k.$$

$$< \sin j\frac{\pi}{L}x|\cos k\frac{\pi}{L}x >= \int_{-L}^{L} \sin j\frac{\pi}{L}x \cos k\frac{\pi}{L}x dx = 0 \ , \ \forall j,k \in \mathbb{N}.$$

enquanto que

$$< 1|1 >= \int_{-L}^{L} 1dx = 2L$$

$$< \cos j\frac{\pi}{L}x|\cos j\frac{\pi}{L}x >= \int_{-L}^{L} \cos j\frac{\pi}{L}x \cos j\frac{\pi}{L}x dx = L \ , \ \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

$$< \sin j\frac{\pi}{L}x|\sin j\frac{\pi}{L}x >= \int_{-L}^{L} \sin j\frac{\pi}{L}x \sin j\frac{\pi}{L}x dx = L \ , \ \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

Assim, o sistema normal obtido ao fazermos a Análise Harmônica de uma função f até o m-ésimo harmônico é

$$\begin{bmatrix} 2L & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < f|1 > \\ < f|\cos \frac{\pi}{L}x > \\ < f|\sin \frac{\pi}{L}x > \\ < f|\cos 2\frac{\pi}{L}x > \\ < f|\sin 2\frac{\pi}{L}x > \\ \vdots \\ < f|\cos m\frac{\pi}{L}x > \\ < f|\sin m\frac{\pi}{L}x > \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{cases} a_0 = & \frac{1}{2L} < f|1 > \\ a_j = & \frac{1}{L} < f|\cos j\frac{\pi}{L}x > , \quad j = 1,2,\dots,m. \\ a_j = & \frac{1}{L} < f|\sin j\frac{\pi}{L}x > , \quad j = 1,2,\dots,m. \end{cases}$$

b2) Caso discreto:

Analogamente, também no caso discreto, para $m < N$, as funções

$$1 \ , \ \cos\frac{\pi}{L}x \ , \ \sin\frac{\pi}{L}x \ , \ \cos 2\frac{\pi}{L}x \ , \ \sin 2\frac{\pi}{L}x \ , \dots , \ \cos m\frac{\pi}{L}x \ , \ \sin m\frac{\pi}{L}x$$

são ortogonais com respeito ao produto interno

$$< h|\tilde{h} >= \sum_{j=1}^{2N} h(x_j)\tilde{h}(x_j) = \sum_{j=1}^{2N} h(\frac{\pi}{N}j)\tilde{h}(\frac{\pi}{N}j)$$

§6. PARTICULARIDADES DA APROXIMAÇÃO POR POLINÔMIOS.

Quando estamos aproximando uma função f definida num intervalo [a,b] pelo MMQ por um polinômio de grau $\leq n$, já vimos que devemos tomar

$$F = [f, 1, x, x^2, \dots, x^n] \ , \ e$$

$$G = [1, x, x^2, \dots, x^n] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

e considerar

(i) $< h|\tilde{h} >= \int_a^b h(x)\tilde{h}(x)dx \ , \ \forall h, \tilde{h} \in F$,
no caso de f ser integrável em [a,b], ou

(ii)$< h|\tilde{h} >= \sum_{i=1}^k h(x_i)\tilde{h}(x_i) \ , \ \forall h, \tilde{h} \in F$,
no caso de f ser dada apenas tabelada em pontos distintos $x_1, x_2, \dots, x_k$ do intervalo [a,b].

No caso (i), $< | >$ é um produto interno não degenerado em G.

PROPOSIÇÃO:

"No caso (ii) acima, se $k \geq n+1$ então $< | >$ será um produto interno não degenerado em G ."

PROVA:

Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ um elemento de G .

Se

$$< p|p >= \sum_{i=1}^{k} (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n)^2 = 0$$

então $p(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$

donde $x_1, x_2, \dots, x_k$ são k zeros distintos do polinômio p.

Mas então, como $n \leq k-1$, segue que p é o polinômio nulo.

COROLÁRIO:

"No caso (ii) anterior, se $n \leq k-1$, se tomarmos uma base de G então o sistema normal correspondente terá uma única solução."

Observemos que $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é uma particular base do espaço vetorial G dos polinômios de grau menor ou igual a n . Na dedução do sistema normal que nos fornece $\tilde{g} \in G$ tal que $f - \tilde{g} \perp G$, tínhamos liberdade de escolher o conjunto de geradores de G a ser utilizado. Em particular, qualquer base de G serviria.

Em vista disto, já que no caso (i), e também no caso (ii) quando $n \leq k-1$, o produto interno $< | >$ é não degenerado em G , podemos escolher uma base de G

$$\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$$

com grau de p_i igual a i , $i = 1, 2, \ldots, n$, que seja ortogonal, isto é, que satisfaça

$$< p_i | p_j >= 0 \; , \; i, j = 1, 2, \ldots, n \; , \; i \neq j \; .$$

Usando uma tal base, obteremos um sistema normal diagonal.