Otimização Usando Métodos Numéricos

Programação Matemática
- **Programação Linear**
- **Programação Não-linear**
  - **Problemas de otimização sem restrição**
  - **Problemas de otimização com restrição**
- **Programação Linear Seqüencial (PLS)**
- **Programação Quadrática Seqüencial (PQS)**

Métodos Probabilísticos
- **Algoritimos Genéticos**
- **"Simulated Annealing"**

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

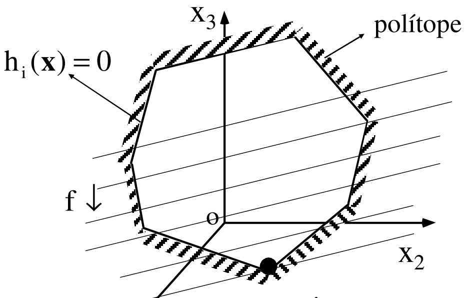
Programação Linear (PL)

Função Objetivo e restrições são lineares:

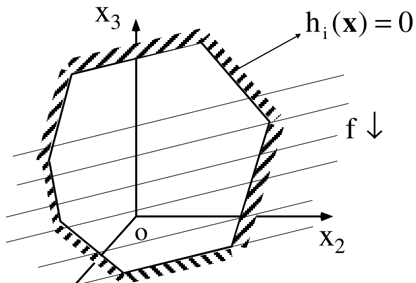
$$f = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i = \text{cte.}$$

$\therefore$ problemas lineares de otimização

Ponto ótimo está localizado na fronteiras do domínio de projeto (e não no seu interior). Situações típicas:



Ponto Ótimo



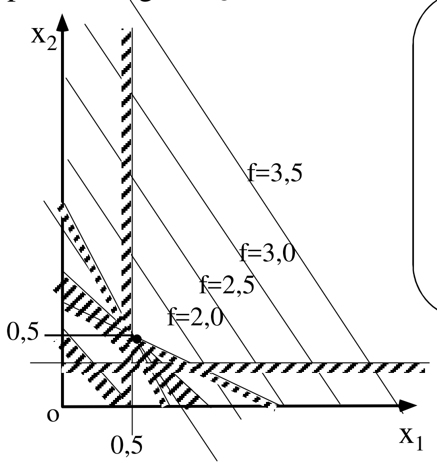
Solução Degenerada

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Programação Linear (PL)

Problemas de otimização Não-linear ➡ aproximados por uma seqüência de PLs. A solução exata é obtida após um número suficiente de iterações ➡ Programação Linear Sequencial (**PLS**).

Exemplo de Programação Linear:



$$\underset{x_1,\,x_2}{\text{Min}} \quad f(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2$$

tal que

$$4x_2 \geq 1$$
$$2x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$2x_1 \geq 1$$
$$2x_1 + 4x_2 \geq 3$$
$$4x_1 + 2x_2 \geq 3$$

Caso degenerado:
$f=c(2x_1+4x_2)$

Programação Linear (PL)

Método de solução eficiente e confiável ➡ Método SIMPLEX

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \quad f = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$\text{tal que} \quad \underset{m \times n}{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\text{Se} \begin{cases} m = n \Rightarrow \text{solução única} \\ m > n \Rightarrow \text{solução inconsistente} \\ m < n \Rightarrow \text{várias soluções possíveis} \end{cases}$$

Exemplos de conversão:

a)
$$\begin{matrix} 4x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,5 \end{matrix}$$

$(x_3, x_4, x_5) \Rightarrow$ variáveis "slack"

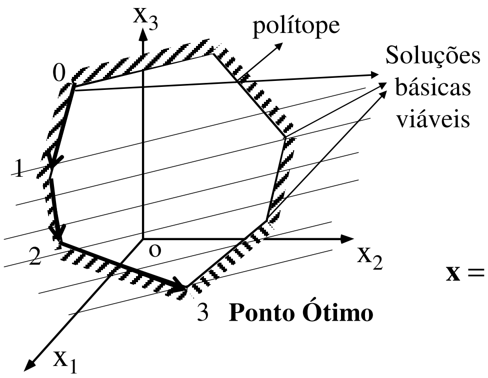
b) Se $x_i \leq 0 \Rightarrow x_1 = u_1 - v_1$ e $x_2 = u_2 - v_2$ e: $u_1, u_2, v_1, v_2 \geq 0$

c) $\bar{x}_1 = M + x_1 \Rightarrow$
- Novas variáveis não são criadas
- difícil saber o valor de M
- valores altos de M ➡ mau condicionamento numérico

Programação Linear (PL)

Procedimento do SIMPLEX:

- Inicia com uma solução viável básica;
- Muda o conjunto de variáveis básicas (mas o novo conjunto deve ser viável) melhorando a função objetivo ao mesmo tempo;
- Repete essa operação até que não consiga mais reduzir o valor da função objetivo.



$$\mathbf{A} = [\underbrace{[\mathbf{D}_{m \times m}]}_{\text{m colunas linearmente independentes}} \; \ldots] \; n$$

$$\underset{m \times 1}{\mathbf{x}_D} = \underset{m \times m}{\mathbf{D}^{-1}} \; \underset{m \times 1}{\mathbf{b}_D}$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \boxed{\mathbf{x}_D} \\ \ldots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\mathbf{x}_D$ → Vetor de variáveis básicas

Solução básica, não necessariamente viável. Solução viável ➡ extremos da polítope

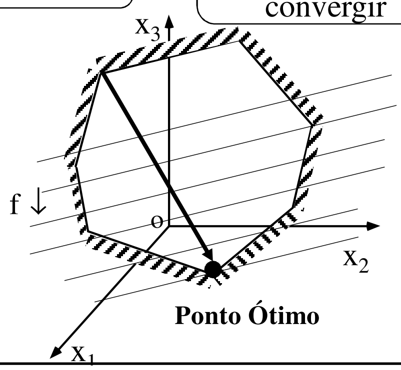
Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Programação Linear (PL)

Número total de soluções básicas possíveis ➡ número de possibilidades de se selecionar m variáveis num grupo de n variáveis, ou seja:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$ onde só algumas serão viáveis.

Grande número de variáveis ➡ grande número de operações para convergir ➡ Solução: Métodos Interiores (não seguem os extremos) Algoritimo de Kamarkar (AT&T Bell Labs.)



Outro método:

Programação Linear Inteira

$x_i \in \{d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{in}\}$

variáveis discretas

Prof. Dr. Emilio C. Nelli Silva

Utilização do SCILAB

Rotina SCILAB para resolver programação linear: **LINPRO**

[x,lagr,f]=linpro(p,C,b,ci,cs,mi,x0) resolve o problema:

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \quad f = \mathbf{p}^T\mathbf{x}$$

tal que

$$\underbrace{\mathbf{C}_1}_{(m_i \times n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$$

$$\underbrace{\mathbf{C}_2}_{(m_d \times n)}\mathbf{x} \le \mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{c}_i \le \mathbf{x} \le \mathbf{c}_s$$

$$\underbrace{\mathbf{C}}_{(m_i + m_d)\times n} = [\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2]$$

$$\underbrace{\mathbf{b}}_{1\times(m_i + m_d)} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$$

- x - vetor da solução ótima;
- lagr - vetor de multiplicadores de Lagrange (n+ m_i+m_d) associado a cada restrição. Se o valor de um multiplicador é zero, a restrição correspondente está inativa, caso contrário está ativa no ponto ótimo;
- f - valor ótimo da função;
- m_i - número de restrições de igualdade;
- m_d - número de restrições de desigualdade;
- x_0 - chute inicial de x; ou se "x_0=v" o cálculo é iniciado num vértice do domínio; ou se "x_0=g" o valor inicial é arbitrário;