

Considere o seguinte sistema não-linear com controle escalar:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x, f \in \mathcal{R}^n, \quad u(x) \in \mathcal{R}, \quad (1)$$

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & \text{se } s(x) \geq 0 \\ u^-(x) & \text{se } s(x) < 0 \end{cases}, \quad (2)$$

$$s(x) = x - x_d, \quad (3)$$

em que $s(x)$ é a superfície de deslizamento, $u^+(x)$, $u^-(x)$ e $s(x)$ são contínuas e suaves, x é o vetor de estado, x_d é o vetor de estado desejado, e $u^+(x) \neq u^-(x)$.

Assumiremos que a condição de modo deslizante acontece para $s(x) = 0$, e derivamos as equações dinâmicas desse sistema utilizando um método conhecido por regularização.

A velocidade dos vetores:

$$f^+(x) = f(x, u^+) \quad (4)$$

$$f^-(x) = f(x, u^-) \quad (5)$$

são constantes para qualquer ponto x na superfície $s(x) = 0$ em um curto intervalo de tempo $[t; t + \Delta t]$, onde $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ e $u = u^+$ para o intervalo definido por Δt_1 e $u = u^-$ para o intervalo definido por Δt_2 .

A variação do vetor de estado após o intervalo Δt será dada, portanto, por:

$$\Delta x = f^+ \Delta t_1 + f^- \Delta t_2 \quad (6)$$

e a velocidade média do estado será:

$$\dot{x} = f_m(x), \quad (7)$$

$$f_m(x) = \mu f^+ + (1 - \mu) f^- \quad (8)$$

em que $\mu = \frac{\Delta t_1}{\Delta t}$ é o tempo relativo de controle com u^+ e $(1 - \mu)$ para o controle u^- , de forma que:

$$0 \leq \mu \leq 1. \quad (9)$$

Mas não estamos interessados no valor médio e sim em \dot{x} . Para isso, devemos tomar o limite para quando Δt tende à zero. Entretanto, não precisamos fazer isso devido à consideração de velocidade constante, portanto a equação:

$$\dot{x} = \mu f^+ + (1 - \mu) f^-, \quad (10)$$

representa a dinâmica durante o deslizamento.

Devido a trajetória durante o deslizamento estar na superfície $s(x) = 0$, o parâmetro μ deve ser selecionado de tal forma que a velocidade do sistema seja um plano tangente à superfície de deslizamento, isso é:

$$\dot{s} = \nabla(s(x)) \cdot \dot{x} = \nabla(s(x)) \cdot [\mu f^+ + (1 - \mu) f^-] = 0, \quad (11)$$

em que $\nabla(s(x)) = \left[\frac{\partial s}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial s}{\partial x_n} \right]$.

Considere o caso escalar. Resolvendo então para μ , obtemos a seguinte solução:

$$\mu = \frac{\nabla(s) \cdot f^-}{\nabla(s) \cdot (f^- - f^+)}. \quad (12)$$

Substituindo em $\dot{x} = \mu f^+ + (1 - \mu)f^-$ obtemos a dinâmica para o modo deslizante:

$$\dot{x} = f_m(x) \quad (13)$$

$$f_m = \frac{\nabla(s) \cdot f^-}{\nabla(s) \cdot (f^- - f^+)} f^+ - \frac{\nabla(s) \cdot f^+}{\nabla(s) \cdot (f^- - f^+)} f^-, \quad (14)$$

para condição inicial $s[x(0)] = 0$.

Selecione a candidata Lyapunov. Deseja-se encontrar uma lei de controle u que leve o sistema assintoticamente para a origem.

$$V = \frac{1}{2}s^2 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} \\ &= s(\Delta + u + \lambda x_2). \end{aligned} \quad (26)$$

Condição para estabilidade assintótica: $\dot{V} < 0, x \neq 0$.

Escolha $u = -\lambda x_2 + v$ e selecione $v = -\rho \text{sign}(s), \rho > 0$ para obter

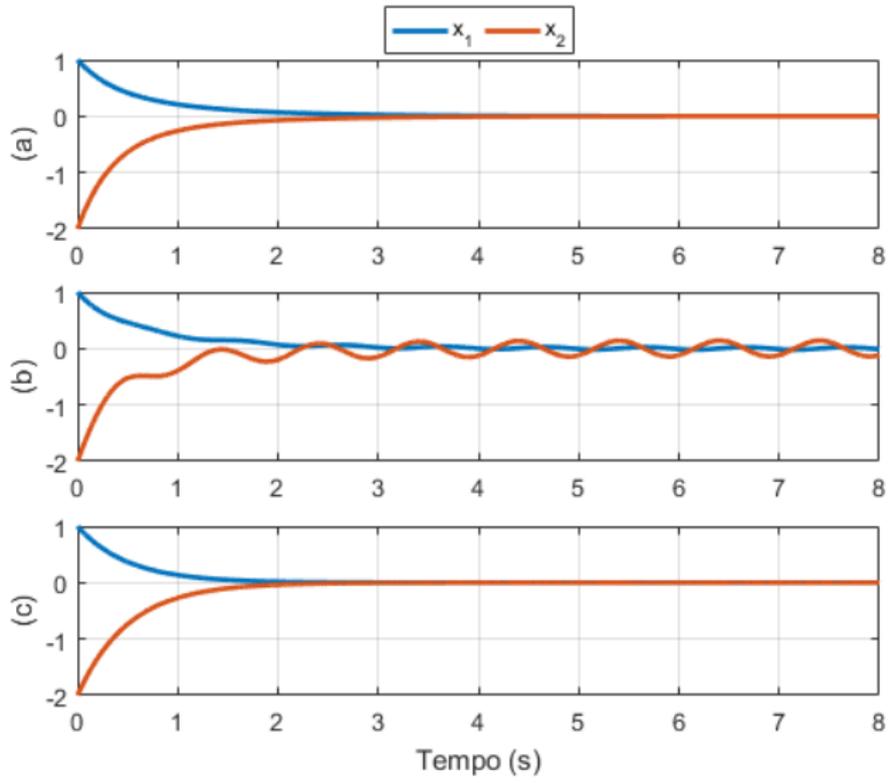
$$\dot{V} = s\Delta - \rho|s|, \quad (27)$$

Note que

$$s\Delta - \rho|s| \leq |\Delta s| - \rho|s| \quad (28)$$

o que fornece

$$\dot{V} = s\Delta - \rho|s| \leq -(\rho - L)|s|. \quad (29)$$



Estabilidade

Função de *Lyapunov*

Devido às descontinuidades no sistema, a estabilidade é analisada por *Lyapunov* na superfície de deslizamento. Assim, vamos escolher a seguinte função candidata de *Lyapunov*:

$$V(x) = \frac{1}{2}s^2(x) \quad (32)$$

precisamos que:

$$V(\dot{x}) < 0 \quad (33)$$

ou seja:

$$V(\dot{x}) = \boxed{s(x)\dot{s}(x) < 0} \quad (34)$$

é condição suficiente.

Considere o sistema não linear dado por:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (35)$$

sendo x a variável de interesse. Para que o vetor de estado x rastreie uma referência x_d dada, o controle por modos deslizantes define uma superfície por meio da dinâmica do erro

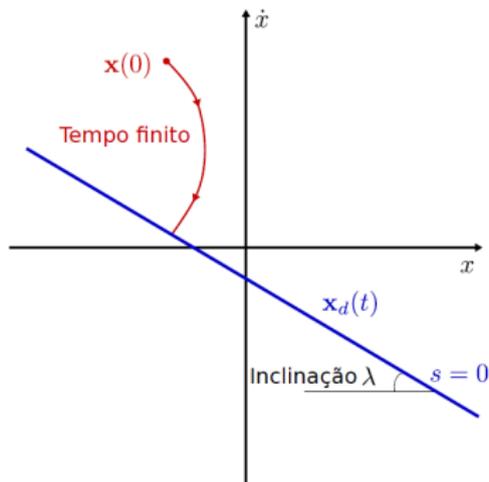
$$\tilde{x} = x - x_d \quad (36)$$

e um controle adequado é aplicado para conduzir a trajetória para esta superfície.

Na superfície, o erro segue uma dinâmica assintoticamente estável:

$$s(\tilde{x}) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x}, \quad \lambda > 0.$$

Para o caso $n = 2$, a convergência do estado em tempo finito para a referência pode ser ilustrada no plano de fase juntamente com a superfície $s(\tilde{x}) = 0$ descrita neste caso por uma reta de coeficiente angular dado por λ .



Fonte: [3]

Integral Sliding mode control (ISMC)

Diversos trabalhos recorrem ao uso de um termo integral na construção da superfície de deslizamento [4]-[6].

$$s(\tilde{x}) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x} + \int \tilde{x} dt, \quad \lambda > 0.$$

Uma vantagem do uso da técnica ISMC é que ela elimina a fase de alcance, aplicando o modo deslizante em toda a resposta do sistema, de modo que a invariância do SMC seja garantida desde o instante de tempo inicial [4].

Deve-se determinar a lei de controle u que leve o sistema para a superfície de deslizamento e o mantenha lá. A construção formal se deve ao matemático A.F. Fillipov.

Para que o sistema permaneça na superfície (**ou seja, para que a superfície seja um conjunto invariante**), é necessário que:

$$\dot{s}(\tilde{x}) = 0, \quad \text{para } s(\tilde{x}) = 0. \quad (43)$$

Ou seja, deseja-se que a derivada seja nula quando o sistema estiver na superfície, para que ele não saia dela.

$$\dot{s}(\tilde{x}) = Gf(x, u) = 0, \quad (44)$$

em que $G = \frac{\partial s}{\partial x}^T$ é uma matriz $m \times n$ com gradientes da função $s_i(\tilde{x})$ como linhas e a solução de u que satisfaz essa equação é chamada **controle equivalente**.

Em outras palavras, substituí-se a lei de controle com chaveamento por uma lei de controle contínua durante o deslizamento.

Vamos aplicar o controle equivalente em um sistema não-linear descrito por:

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u, \quad x, f(x) \in \mathcal{R}^n, \quad B(x) \in \mathcal{R}^{m \times n} \quad \text{e} \quad u(x) \in \mathcal{R}^m, \quad (45)$$

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & \text{se } s_i(x) \geq 0 \\ u^-(x) & \text{se } s_i(x) < 0 \end{cases}. \quad (46)$$

com $s(x)^T = [s_1 \dots s_m]$. Aplicando o método:

$$\dot{s} = Gf + GBu_{eq} = 0, \quad (47)$$

$$u_{eq}(x) = -(G(s)B(x))^{-1}G(x)f(x). \quad (48)$$

e a dinâmica do sistema com o controle equivalente

$$\dot{s} = f(x) - B(x)(G(s)B(x))^{-1}G(x)f(x). \quad (49)$$

Considere agora o sistema de segunda ordem na forma espaço de estado :

$$\ddot{x} = f(x) + u. \quad (50)$$

A lei de controle equivalente é obtida a partir de $\dot{s}(x) = 0$. Escolhendo $s(x) = \dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x}$ tem-se na forma espaço de estado

$$s(z) = z_2 + \lambda z_1, \quad (51)$$

com $z^T = [z_1 \ z_2]$, $z_1 = x - x_d$, $z_2 = \dot{x} - \dot{x}_d$

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{\partial s}{\partial z} \dot{z} \\ &= [\lambda \ 1][z_1 \ z_2]^T \\ &= \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \\ &= f(x) + u - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$u_{eq} = -f(x) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}}. \quad (52)$$

No modo de deslizamento tem-se:

$$\ddot{\tilde{x}} = f(x) + u \quad (53)$$

$$= f(x) + u_{eq} = \ddot{\tilde{x}}_d - \lambda \dot{\tilde{x}}. \quad (54)$$

Geometricamente, o controle pode ser construído como

$$u_{eq} = \alpha u_+ + (1 - \alpha) u_-, \quad (55)$$

uma combinação convexa dos valores de u em ambos os lados da superfície s . O valor de α pode ser obtido da igualdade $\dot{s}(x) = 0$.

Frequência infinita

A construção do controle equivalente de Filippov leva então a:

$$f_+ = [\dot{x} \quad f + u_+]^T, \quad f_- = [\dot{x} \quad f + u_-]^T$$

$$f_{eq} = [\dot{x} \quad f + u_{eq}]^T.$$

Durante o deslizamento, há uma idealização: o controle alterna teoricamente com **frequência infinita**. Entretanto, essa oscilação pode ser decomposta em uma dinâmica mais lenta e uma muito alta. Quando esse sinal entra na planta, a parte com alta frequência é filtrada, sobrando somente a dinâmica lenta. Essa dinâmica lenta é muito próxima ao que definimos como controle equivalente.

Considere o sistema de segunda ordem:

$$\ddot{x} = f(x) + g(x)u. \quad (56)$$

Escolhendo a superfície de deslizamento $s(\tilde{x}) = \dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x}$, o controle equivalente é calculado fazendo $\dot{s} = 0$:

$$\dot{s} = 0, \quad (57)$$

$$\ddot{\tilde{x}} + \lambda\dot{\tilde{x}} = 0. \quad (58)$$

Como $\tilde{x} = x - x_d$, então pode-se reescrever (58) como:

$$\ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}} = 0. \quad (59)$$

Usando \ddot{x} de (56):

$$f(x) + g(x)u - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}} = 0, \quad (60)$$

$$u_{eq} = \frac{1}{g(x)} [-f(x) + \ddot{x}_d - \lambda\dot{\tilde{x}}]. \quad (61)$$



Caso existam parâmetros incertos em $f(x)$ e $g(x)$, não se consegue determinar a lei de controle equivalente anterior. Todavia, uma lei de controle similar que satisfaz a condição de deslizamento pode ser formulada conhecendo-se os limites para as incertezas sobre os parâmetros desconhecidos.

Considere o mesmo sistema de segunda ordem do caso anterior:

$$\ddot{x} = f(x) + g(x)u.$$

Suponha que $f(x)$ não é conhecida. Assim, pode-se utilizar uma estimativa $\hat{f}(x)$, sendo o erro de estimação limitado:

$$|\hat{f}(x) - f(x)| \leq F(x). \quad (62)$$

Utilizando a superfície de deslizamento $s(\tilde{x}) = \dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x}$, sua derivada será:

$$\dot{s}(\tilde{x}, t) = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}} = f(x) + g(x)u - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}}. \quad (63)$$

$$\dot{s}(\tilde{x}, t) = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} = f(x) + g(x)u - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}}.$$

Contudo, agora não conhecemos $f(x)$ para determinar a lei de controle equivalente. Assim, usaremos a estimativa $\hat{f}(x)$:

$$u_{eq} = \frac{1}{g(x)} [-\hat{f}(x) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}}]. \quad (64)$$

Substituindo em (33):

$$\dot{s}(\tilde{x}, t) = f(x) - \hat{f}(x). \quad (65)$$

Assim:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = s \dot{s} = s[f(x) - \hat{f}(x)]. \quad (66)$$

Note que (66) não satisfaz a condição de deslizamento $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s|$ com $\eta > 0$ apresentada em (42).

Tarefa: verificar que é possível adicionar um termo à lei de controle de modo a obter $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s|$.

Solução: Faça o sinal de controle

$$u = u_{eq} - \frac{1}{g(x)} k \operatorname{sgn}(s) \quad (67)$$

sendo u_{eq} a lei de controle equivalente dada em (64). Substituindo (67) em (63) obtém-se:

$$\dot{s} = f(x) - \hat{f}(x) - k \operatorname{sign}(s) \quad (68)$$

resultando em:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = s \dot{s} = [f(x) - \hat{f}(x) - k \operatorname{sgn}(s)] s = s[f(x) - \hat{f}(x)] - k |s| \quad (69)$$

utilizando a propriedade $s \operatorname{sgn}(s) = |s|$.

Escolha $k = F(x) + \eta$. Dessa forma, pode-se reescrever (69) como:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = s\dot{s} = s[f(x) - \hat{f}(x)] - F(x)|s| - \eta|s| \quad (70)$$

Note que:

$$s[f(x) - \hat{f}(x)] - F(x)|s| \leq |f(x) - \hat{f}(x)||s| - F(x)|s| \quad (71)$$

Como $|\hat{f}(x) - f(x)| \leq F(x)$, pode-se limitar a relação em (71):

$$s[f(x) - \hat{f}(x)] - F(x)|s| \leq |f(x) - \hat{f}(x)||s| - F(x)|s| \leq 0 \quad (72)$$

Por fim, utilizando (72) em (70) conclui-se:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = s\dot{s} = s[f(x) - \hat{f}(x)] - F(x)|s| - \eta|s| \leq \eta|s| \quad (73)$$

Considere o sistema:

$$\ddot{x} - f(x) = u \quad (74)$$

$$\ddot{x} = f(x) + u \quad (75)$$

com $f(x) = -a(t)\dot{x}^2 \cos(3x)$. O parâmetro a é desconhecido e variante no tempo, com limitantes conhecidos $1 \leq a(t) \leq 2$. Tome a estimativa para $f(x)$ no meio do intervalo:

$$\hat{f}(x) = -1,5\dot{x}^2 \cos(3x) \quad (76)$$

Dessa forma:

$$|\hat{f}(x) - f(x)| \leq 0,5\dot{x}^2 |\cos(3x)| = F(x) \quad (77)$$

Para que o sistema siga a referência x_d , sendo $\tilde{x} = x - x_d$, utilize a superfície:

$$s(\tilde{x}) = \dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x} \quad (78)$$

$$\dot{s}(\tilde{x}) = f(x) + u - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}} \quad (79)$$

Para encontrar o controle equivalente:

$$\dot{s} = 0 \quad (80)$$

$$f(x) + u_{eq} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} = 0 \quad (81)$$

$$(82)$$

Utilizando a estimava $\hat{f}(x) = 1,5\dot{x}^2 \cos(3x)$:

$$u_{eq} = -\hat{f}(x) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} \quad (83)$$

$$u_{eq} = 1,5\dot{x}^2 \cos(3x) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} \quad (84)$$

Para satisfazer a condição de estabilidade, o sinal de controle é dado adicionando um sinal descontínuo ao controle equivalente:

$$u = u_{eq} - k \text{sign}(s) \quad (85)$$

$$u = 1,5\dot{x}^2 \cos(3x) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} - k \text{sign}(s) \quad (86)$$

Tomando $k = F(x) + \eta = 0,5\dot{x}^2 \cos(3x) + \eta$, o sinal de controle pode ser calculado:

$$u = u_{eq} - k \operatorname{sign}(s) \quad (87)$$

$$u = 1,5\dot{x}^2 \cos(3x) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} - k \operatorname{sign}(s) \quad (88)$$

$$u = 1,5\dot{x}^2 \cos(3x) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} - [0,5\dot{x}^2 \cos(3x) + \eta] \operatorname{sign}(s) \quad (89)$$

que, na forma simplificada, fica:

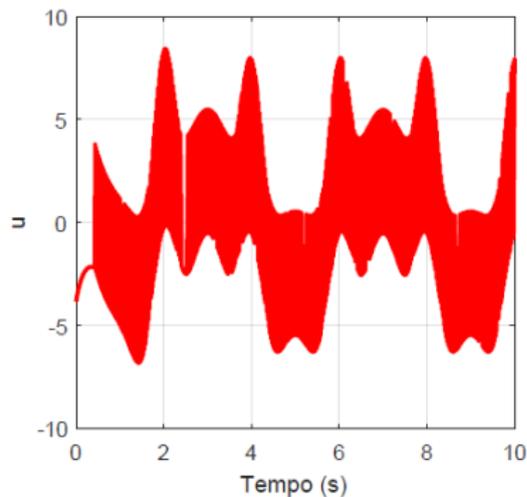
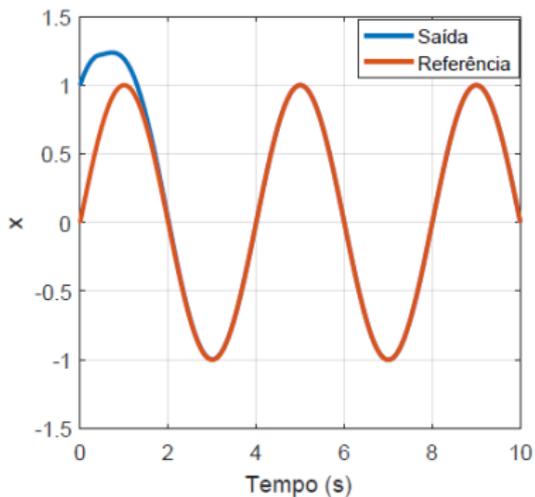
$$u = 1,5\dot{x}^2 \cos(3x) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} - 0,5\dot{x}^2 |\cos(3x)| \operatorname{sign}(s) - \eta \operatorname{sign}(s) \quad (90)$$

Relembrando que a superfície é $s(\tilde{x}) = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x}$:

$$u = 1,5\dot{x}^2 \cos(3x) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} - 0,5\dot{x}^2 |\cos(3x)| \operatorname{sign}(\dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x}) - \eta \operatorname{sign}(\dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x}) \quad (91)$$

Utilize $\lambda = 2$, $\eta = 3$ e $a(t) = 1 + |\operatorname{sen}(t)|$. Considere a referência $x_d = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Características de robustez - Exemplo de Slotine, Jean-Jacques E.



Um problema inerente ao controle por modos deslizantes são oscilações de alta frequência e amplitude no sinal de controle.

Isso acontece pois utiliza-se a função sign , uma vez que a lei de controle deve ser descontínua em $s(\tilde{x}) = 0$, pois \dot{s} deve possuir sinais opostos em cada lado da superfície para satisfazer a condição de deslizamento.

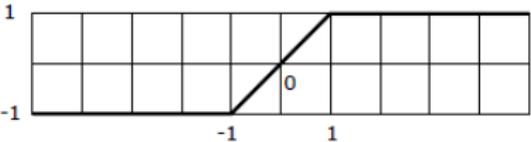
Consequências:

- Desgaste de atuadores;
- Excitação de dinâmicas mais altas não modeladas;
- Desperdício de energia.

Para minimizar o *chattering*, pode-se usar funções contínuas semelhantes à função sign .

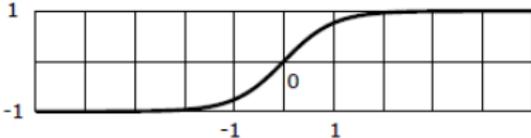
Funções contínuas que podem ser utilizadas para minimizar o *chattering*:

$$sat(x) = \begin{cases} x & \text{se } |x| \leq 1 \\ sign(x) & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{92}$$



Fonte: [3]

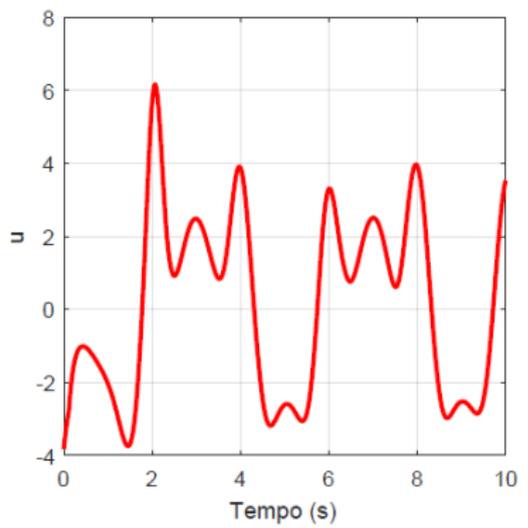
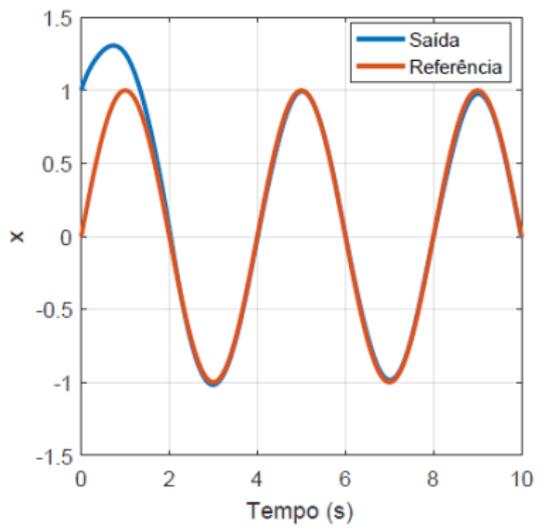
$$tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{93}$$



Fonte: [3]



Para a tarefa de simulação 2, utilize a função $\text{sat}\left(\frac{s}{\phi}\right)$ no lugar de $\text{sign}(s)$.



A análise de estabilidade do controlador *sliding mode* com uso de camada limite pode ser realizada utilizando o 2º método de *Lyapunov*, como em [12]. O autor mostra que o uso da camada limite garante o alcance da superfície em tempo finito, mas pode gerar diminuição na precisão do controlador.

Tarefa 6: implementação do exemplo de robustez

Implementação em Matlab/Simulink de um exemplo de sistema com incerteza limitada. Descrição completa da tarefa disponível na Unidade 4 do e-disciplinas.



Suponha um sistema bilinear da forma:

$$\dot{x} = Ax + uBx \quad (94)$$

em que $x \in \mathcal{R}^n$, $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B \in \mathcal{R}^{n \times n}$ e u é um controle escalar com valores no conjunto $U =: [0; 1]$.

Para esse sistema é possível escolher a seguinte lei de controle descontínua:

$$u = \frac{1}{2}(1 - \text{sign}(s)) \quad (95)$$

tal que s é uma função escalar de chaveamento definida por:

$$s = c^T x, \quad c^t = \left[\frac{\partial s}{\partial x} \right] \quad (96)$$

Queremos saber qual é a condição para estabilidade do sistema com essa lei de chaveamento. Para isso, vamos procurar $\dot{s}s < 0$, isso é:

$$\dot{s} = c^T \dot{x} = c^T Ax + uc^T Bx = c^T Ax + \frac{1}{2}c^T Bx - \frac{1}{2}\text{sign}(s)c^T Bx \quad (97)$$

$$s\dot{s} = s \left(c^T Ax + \frac{1}{2}c^T Bx \right) - \frac{1}{2}|s|c^T Bx < 0 \quad (98)$$

A partir dessa inequação a condição necessária para obter o modo deslizante pode ser obtida. E se o modo deslizante existe, então $s = 0$, e obtemos as seguintes relações:

$$\dot{s}_{s>0} = c^T Ax < 0 \quad (99)$$

$$\dot{s}_{s<0} = c^T Bx > -c^T Ax \quad (100)$$

Podemos obter também a lei de controle equivalente desse sistema. Para isso basta resolvermos u que, como visto, satisfaça $\dot{s} = 0$, isso é:

$$u_{eq} = -\frac{c^T Ax}{c^T Bx} \quad (101)$$

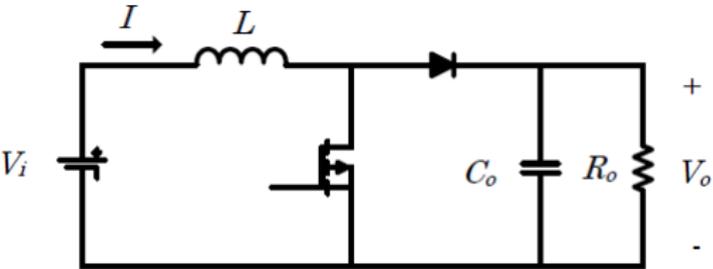
e o sistema dinâmico durante o deslizamento se torna:

$$\dot{x} = Ax + u_{eq}Bx \quad (102)$$

Além disso, fica fácil mostrar que para a condição de modo deslizante existir, então o controle equivalente deve satisfazer:

$$0 < u_{eq} = -\frac{c^T Ax}{c^T Bx} < 1 \quad (103)$$

O conversor CC-CC boost mostrado abaixo é uma topologia de conversor da classe dos conversores CC-CC *step-up* (elevador de tensão).



Conversores CC-CC, em geral, são sistemas bilineares.



O equacionamento desse conversor é dado por:

$$\dot{x}_1 = -(1 - u) \frac{1}{L} x_2 + \frac{V_i}{L} \quad (104)$$

$$\dot{x}_2 = (1 - u) \frac{1}{C_o} x_1 - \frac{1}{R_o C_o} x_2 \quad (105)$$

com $x_1 = I$ e $x_2 = V_o$.

O objetivo é controlar a corrente de entrada I desse conversor utilizando um controlador *sliding mode*. Deseja-se obter uma corrente de entrada de 10 A.

Solução:

- 1 Define-se a superfície de deslizamento:

$$s = x_1 - x_1^* \quad (106)$$

para que a corrente x_1 atinja a corrente desejada x_1^* .

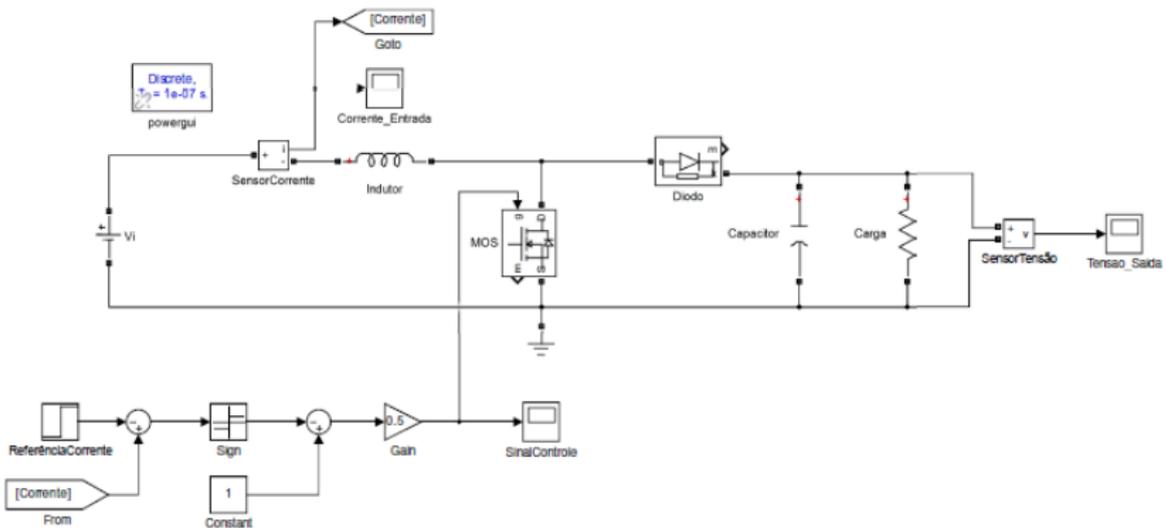
- 2 A lei de controle pode ser definida como:

$$u = \frac{1}{2}(1 - \text{sign}(s)) \quad (107)$$

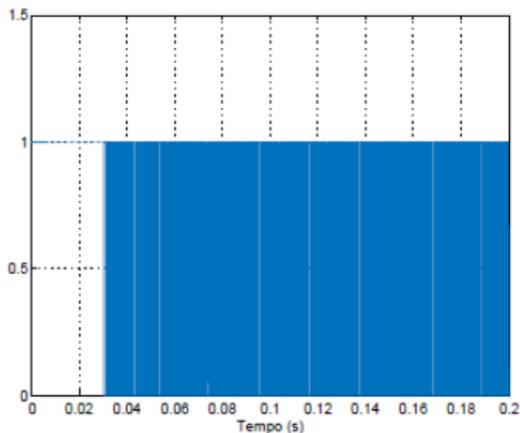
- 3 A lei de controle equivalente será obtida pela solução de $\dot{s} = 0$, isso é:

$$\dot{x}_1 = -(1 - u)\frac{1}{L}x_2 + \frac{V_i}{L} = 0 \quad (108)$$

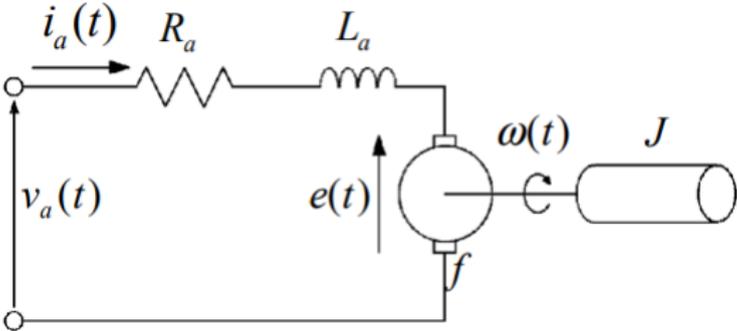
No Simulink monta-se a seguinte simulação com $V_i = 3.3 V$, $L = 10 mH$, $C_o = 1000\mu F$ e $R_o = 40 \Omega$:



Observe o sinal de controle, a frequência é variável e quando atinge a superfície de deslizamento a frequência fica **arbitrariamente alta** (sendo limitada na simulação pelo passo de resolução do solver do Simulink).



O sistema eletromecânico de um motor CC é mostrado a seguir. Aplicando-se uma tensão de excitação V_a , uma corrente i_a circula através do motor, sendo este modelado pelo indutor L_a , pela resistência do enrolamento R_a e pela força eletromotriz e .



Fonte: [8]

Aplicando as leis de *Kirchhof* e definindo-se como estados a corrente de armadura i_a e a velocidade angular ω , sendo a excitação a tensão de armadura V_a , o sistema pode ser representado em espaço de estados por:



Aplicando as leis de *Kirchhof* e definindo-se como estados a corrente de armadura i_a e a velocidade angular ω , sendo a excitação a tensão de armadura V_a , o sistema pode ser representado em espaço de estados por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-B}{J} & \frac{K_t}{J} \\ \frac{-K_b}{L_a} & \frac{-R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} V_a \quad (112)$$

Utilizando os dados de [9], a função de transferência é:

$$\frac{\omega(s)}{V_a(s)} = \frac{138,5}{s^2 + 1,48s + 12,81} \quad (113)$$

No domínio do tempo:

$$\ddot{\omega} + 1,48\dot{\omega} + 12,81\omega = 138,5V_a \quad (114)$$

(a) Tomando como variáveis $x_1 = \omega$, $\dot{x}_1 = x_2$ e $u = V_a$, escreva o sistema na forma $\dot{x} = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2]^T$.

(b) Definindo o erro de rastreamento como $e = \omega_{ref} - \omega$, sendo ω_{ref} a velocidade angular de referência, escolha a superfície de deslizamento $s(e) = ce + \dot{e}$, com $c > 0$.

(c) Encontre a lei de controle equivalente u_{eq} .

(d) Encontre a lei de controle descontínua u_n utilizando a função $sign(s)$ e defina o sinal de controle final $u = u_{eq} + u_n$. Após, utilize a função $sat(s/\phi)$ para redução do *chattering*.

(e) Plote a saída ω do motor utilizando os dois sinais de controle do item anterior. Verifique se há diferença quanto ao desempenho no rastreamento. Tome como referência a entrada $\omega_{ref} = h(t) - 0,5h(t - 4) + 0,3h(t - 7)$, sendo h o degrau unitário.

(f) Para o item anterior, plote o sinal de controle u . Verifique as diferenças que surgem em razão do sinal de controle utilizado ($sign(s)$ ou $sat(s/\phi)$) quanto ao desempenho e *chattering*.

(g) Considerando $\omega_{ref} = h(t)$, plote o plano de fase \dot{e} vs e e mostre o alcance e deslizamento da trajetória sobre a superfície s do item (b).

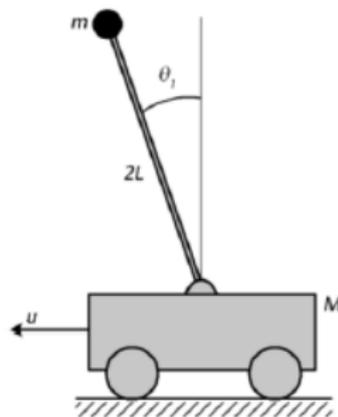


Considere o modelo matemático de um pêndulo invertido:

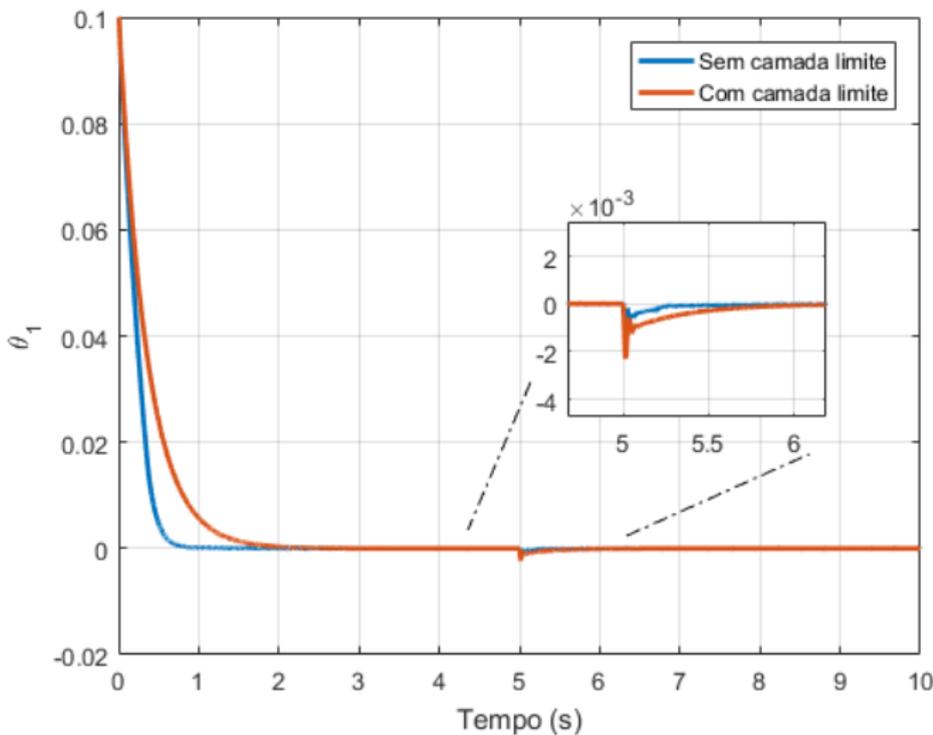
$$\dot{\theta}_1 = \theta_2 \quad (115)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{9,8 \operatorname{sen}(\theta_1) - \cos(\theta_1) \left[\frac{2}{3}u + \frac{1}{6}\theta_2^2 \operatorname{sen}(\theta_1) \right]}{\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\cos^2(\theta_1) \right]} \quad (116)$$

sendo θ_1 a posição vertical da barra.



Fonte: [10]



Referências

[11] Utkin, Vadim. Brief Comments for Doubts in Filippov Method. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* 33.6 (2022): 1628-1632.

[12] Bessa, Wallace M., Max S. Dutra, and Edwin Kreuzer. Sliding mode control with adaptive fuzzy dead-zone compensation of an electro-hydraulic servo-system. *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 58 (2010): 3-16.

[13] Ferrara, Antonella, Gian Paolo Incremona, and Michele Cucuzzella. *Advanced and optimization based sliding mode control: Theory and applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2019.

[14] Wang, Zuo, Shihua Li, and Qi Li. Discrete-time fast terminal sliding mode control design for DC–DC buck converters with mismatched disturbances. *IEEE Transactions on Industrial Informatics* 16.2 (2019): 1204-1213.