

**Lista V****Tarefa de leitura:**

1. Lemos parágrafos 2.4 a 2.7 bem como 7.1.

**Problemas para o dia 6 de junho**

1. Um esfera uniforme de massa  $m$  e raio  $r$  é colocada sobre um cilindro fixo de raio  $R$  conforme mostra a figura abaixo. A única força externa é a gravidade. Se a esfera começa a rodar sem escorregar do equilíbrio a partir a uma altura do seu centro de massa  $r + R - \epsilon$ , onde  $\epsilon \ll r$  e  $R$ , encontre o ponto onde a esfera se descola do cilindro utilizando o método de multiplicadores de Lagrange.

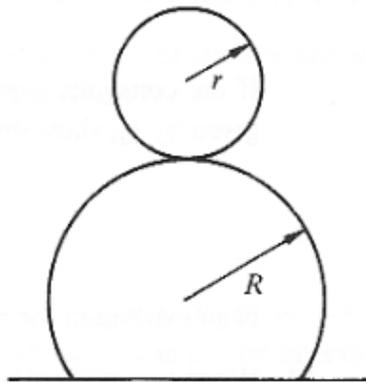


Figura 1: Sistema do problema 1.

2. A Lagrangiana de um sistema é dada por

$$-\frac{m}{2}q\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{1}{2}m\omega_0^2q^2 .$$

Deduz a equação de Euler-Lagrange no caso de lagrangianas que dependem da derivada segunda. Aplique o resultado para a lagrangiana acima.

3. Considere um sistema de partículas de massas  $m_j$  e coordenadas cartesianas  $\vec{x}_j$ . A lagrangiana do sistema é dada por

$$L = \sum_j \frac{m_j}{2} \dot{\vec{x}}_j^2 - \sum_{i,j} V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) .$$

- (a) A transformação  $\vec{x}_j \rightarrow \vec{x}_j + a\vec{s}$ , é uma simetria do sistema? Justifique.
- (b) Use o teorema de Noether para obter a quantidade conservada.
- (c) Qual o significado físico da quantidade conservada?
4. Considere o sistema do problema anterior. Dada uma rotação infinitesimal na direção  $\vec{n}$  por um ângulo  $\delta\theta$ , a transformação é

$$\vec{x}_j \rightarrow \vec{x}_j + \delta\theta \vec{n} \wedge \vec{x}_j .$$

Utilizando o teorema de Noether obtenha a quantidade conservada associada a rotações.

5. Considere um sistema unidimensional com coordenada generalizada  $q$  cuja lagrangiana é

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) .$$

Uma transformação de escala modifica a variável independente tempo bem como a variável dinâmica segundo

$$q(t) \rightarrow q'(t) = \rho^d q(\rho t) .$$

A quantidade  $d$  é chamada “dimensão de escala” da variável dinâmica  $q$ .

- (a) Derive a forma infinitesimal desta transformação. Dica: escreva  $\rho = e^\alpha$  onde  $\alpha$  é pequeno.
- (b) Qual o valor que a dimensão de escala  $d$  deve ter para que a teoria seja invariante por esta transformação para  $V = 0$ ?
- (c) Para o valor de  $d$  do item anterior, determine a forma mais geral de  $V$  para que a teoria seja invariante de escala.
- (d) Usando o teorema de Noether, obtenha a quantidade conservada ( $D$ ) pela transformação de escala. Note que seu resultado depende explicitamente do tempo apesar da sua derivada total com respeito ao tempo ser zero!