Um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, E)$ do espaço euclideano $\mathbb{E}^3$ está fixado.

Exercício 1. Considere as seguintes equações das retas r e s e dos planos π_1 e π_2:

$$r : X = (1,1,0) + \lambda(0,1,1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s : \frac{x+1}{2} = y = -z$$

$$\pi_1 : x - y - z = 2$$

$$\pi_2 : (0,1,1) + \lambda(1,0,3) + \mu(-1,1,1), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Estude a posição relativa de:

a) r e s e, se concorrentes, encontre o ponto de intersecção;

Resolução. Note que $\vec{u} = (0,1,1)$ é vetor diretor de r e $\vec{v} = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ é vetor diretor de s.

Observe que não existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha \vec{v}$. Logo, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI.

A reta s pode ser descrita como $s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \end{cases}$

Temos $A = (1,1,0) \in r$ e $B = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \in s$.

Daí, $\overrightarrow{AB} = (-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Verifiquemos se $\{\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\}$ é LI ou LD:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & -1/2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{matrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \neq 0$$

Logo, $\{\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\}$ é LI e, portanto, r e s são reversas.

b) r e π_1 e, se transversais, encontre o ponto de intersecção.

Resolução. Note que r e π_1 são transversais se, e somente se, $\vec{n}_1 \cdot \vec{u} \neq 0$, onde $\vec{n}_1$ é o vetor normal ao plano π_1, dado por $\vec{n}_1 = (1,-1,-1)$, e $\vec{u}$ é o vetor diretor de r. Temos:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{u} = (1,-1,-1) \cdot (0,1,1) = 0 - 1 - 1 = -2 \neq 0.$$

Logo, r e π_1 são transversais.

O ponto $\{(x,y,z)\} = r \cap \pi_1$ satisfaz

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \\ x - y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} (1) - (1+\lambda) - (\lambda) &= 2 \\ -2\lambda &= 2 \\ \lambda &= -1 \end{aligned}$$

Daí,
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 1 = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

Portanto, $r \cap \pi_1 = \{(1,0,-1)\}$.

c) π_1 e π_2 e, se transversais, encontre a reta de intersecção.

Resolução. Note que $\vec{n_2} = (1,0,3) \wedge (-1,1,1)$ é normal ao plano π_2, onde

$$\vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix} = -3\vec{j} + \vec{k} - 3\vec{i} - \vec{j} = (-3,-4,1)$$

Então, a equação geral de π_2 é da forma

$$\pi_2 : \quad -3x - 4y + z + d = 0$$

Como $(0,0,1) \in \pi_2$, satisfaz essa equação, logo

$$-3.0 - 4.0 + 1 + d = 0$$
$$\Rightarrow \quad d = -1$$

Daí,

$$\pi_2 : -3x - 4y + z - 1 = 0.$$

Note que não existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{n_1} = \alpha \vec{n_2}$.

Disso segue que os planos são transversais.

Vamos encontrar a reta de interseção $t = \pi_1 \cap \pi_2$

Temos $\begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ -3x - 4y + z - 1 = 0 \end{cases}$

Chamamos $x = \lambda$, então

$$\begin{cases} \lambda - y - z - 2 = 0 \\ -3\lambda - 4y + z - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \lambda - y - 2 \\ -3\lambda - 4y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad -3\lambda - 4y + (\lambda - y - 2) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -2\lambda - 5y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\lambda$$

e $\quad z = \lambda - \left(-\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\lambda\right) - 2 = -\frac{7}{5} + \frac{7}{5}\lambda$

Logo, $t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\lambda \\ z = -\frac{7}{5} + \frac{7}{5}\lambda \end{cases}$

Representação geométrica do exercício: