Aula 16: Compactos II

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1^o **Semestre de 2023 - Curso de Topologia**

Na aula passada . . .

Definição 1

Seja (X, τ) *um espaço topológico. Dizemos que* $\mathcal{B}$ *é uma* sub-base *para* (X, τ) *se* $\{B_1 \cap \cdots \cap B_n : B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}\}$ *é uma base para* X*.*

Proposição 2 (Lema da sub-base de Alexander)

Sejam (X, τ) *espaço topológico e* $\mathcal{B}$ *uma sub-base para* X*. Se toda cobertura para* X *feita por elementos de* $\mathcal{B}$ *admite subcobertura finita, então* X *é compacto.*

Teorema 3 (de Tychonoff)

Seja $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha\in A}$ *família de espaços compactos. Então* $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ *é compacto.*

Demonstração. Pelo Lema da Sub-base, basta mostrar que toda cobertura $\mathcal{C}$ para $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ feita por abertos da forma $\pi_\alpha^{-1}(V)$ onde V é aberto em X_α, admite subcobertura finita.

Para cada α, seja

$$C_\alpha = \left\{V \in \tau_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(V) \in \mathcal{C}\right\}.$$

Vamos mostrar que existe $\alpha \in A$ tal que C_α é uma cobertura para X_α.

Suponha que não. Então para cada $\alpha \in A$, existe $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que $x_\alpha \notin \bigcup_{V\in C_\alpha} V$. Note que $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \notin \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$, contradição.

Seja $\beta \in A$ tal que C_β é cobertura para X_β. Como X_β é compacto, existem $V_1, \ldots, V_n \in C_\beta$ tais que $X_\beta = \bigcup_{i=1}^n V_i$.

Note que $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \bigcup_{i=1}^n \pi_\beta^{-1}(V_i)$. Como cada $\pi_\beta^{-1}(V_i) \in \mathcal{C}$, obtemos o resultado.

Proposição 4

Seja (X, τ) um espaço compacto de Hausdorff. Seja, também, $\sigma \supsetneq \tau$ uma topologia sobre X. Então, (X, σ) não é compacto.

Demonstração. Seja $A \in \sigma \backslash \tau$. Então, $X \backslash A$ não é fechado em (X, τ). Logo, $X \backslash A$ não é compacto em (X, τ). Seja $\mathcal{C}$ cobertura aberta (em τ) para $X \backslash A$ que não admite subcobertura finita.
Então, $\mathcal{C} \cup \{A\}$ é uma cobertura (em σ) sem subcobertura finita. Logo, (X, σ) não é compacto.

Caracterização da Topologia produto - via compactos

Teorema 5

A topologia produto é a única que faz com que as projeções sejam contínuas e o produto de compactos de Hausdorff seja compacto.

Demonstração. Lembrar da Proposição 22 da Aula 11 - produto de Hausdorff é Hausdorff; Lembrar do Teorema de Tychonoff - produto de compactos é compacto.

Seja τ a topologia produto e σ uma topologia satisfazendo o enunciado. Pela definição de τ, se σ é tal que as projeções são contínuas, então $\tau \subset \sigma$. Por outro lado, se $\tau \subsetneq \sigma$, pelo resultado anterior, o produto não é compacto. Logo, $\tau = \sigma$.

Também conseguimos uma caracterização para os espaços completamente regulares.

Proposição 6

Seja (X, τ) um espaço topológico. Então (X, τ) é completamente regular se, e somente se, existe (Y, σ) compacto de Hausdorff tal que $X \subset Y$.

Demonstração. Se existe tal Y, então Y é normal (Proposição 14 da Aula 15) e, portanto, X é completamente regular (subespaço de Normal é Normal + Lema de Urysohn).

Por outro lado, se X é completamente regular, temos que X é homeomorfo a um subespaço de $\prod_{\alpha \in A}[0, 1]$ (Corolário 13 da Aula 12) que é compacto.

Exercícios - Teorema de Tychonoff

1. Mostre a volta do Teorema de Tychonoff: Se $\prod_{\alpha X_\alpha} X_\alpha \neq \emptyset$ é compacto, então cada X_α é compacto.
2. Seja $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in A}$ uma familia de espaços topológicos. Chamamos de topologia da caixa a topologia gerada pelos conjuntos da forma $\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ onde cada V_α é aberto em X_α.
   (a) Mostre que a topologia da caixa contém a topologia produto.
   (b) Considere $\{0, 1\}$ com a topologia discreta. Note que $\prod_{n \in \mathbb{N}}\{0, 1\}$ é compacto com a topologia produto. Mostre que $\prod_{n \in \mathbb{N}}\{0, 1\}$ é discreto (e infinito) com a topologia da caixa (e, portanto, não é compacto).
3. Considere $\mathbb{R}_S$ a reta de Sorgenfrey.
   (a) Note que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ é completamente regular mas não é normal.
   (b) Mostre que existe K compacto de Hausdorff tal que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \subset K$.
   (c) Conclua que nem todo subespaço de espaço normal é normal.
   (d) Generalize o resultado anterior: Todo espaço completamente regular que não é normal gera um exemplo de espaço normal com um subespaço não normal.

Exercícios - Teorema de Tychonoff

Será apresentada a seguir uma demonstração alternativa para o Teorema de Tychonoff. O roteiro dela é o seguinte: caracterizamos a compacidade em termos de ultrafiltros e depois provamos a caracterização no produto, usando que ela vale em cada coordenada.

Definição 7

Seja X um conjunto. Dizemos que $F \subset \wp(X)$ é um filtro sobre X se

(a) $\emptyset \notin F$ *(condição de não trivialidade);*

(b) *se $a, b \in F$, então $a \cap b \in F$;*

(c) *se $a \in F$ e $b \supset a$, então $b \in F$.*

Dizemos que F é um ultrafiltro se F é maximal (i.e., se $G \supset F$ é um filtro, então $G = F$).

4. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $x \in X$. Mostre que $F = \{A \subset X : A \text{ é vizinhança de } x\}$ é um filtro sobre x.
5. Seja X um conjunto e $x \in X$. Mostre que $F = \{A \subset X : x \in A\}$ é um ultrafiltro.

6. Sejam $X \neq \emptyset$ e $F \subset \wp(X)$ com a propriedade da intersecção finita. Mostre que

$$F' = \left\{ A \subset X : \exists B_1, \ldots, B_n \in F, \bigcap_{i=1}^{n} B_i \subset A \right\}$$

é um filtro sobre X (o chamamos de filtro gerado por F).

7. Seja F um ultrafiltro e seja $Y \notin F$. Mostre que existe $A \in F$ tal que $A \cap Y = \emptyset$.

8. Sejam X um conjunto não vazio e F um filtro sobre X. Mostre que são equivalentes:

   (i) F é ultrafiltro;

   (ii) para todo $Y \subset X$, temos que $Y \in F$ ou $X \backslash Y \in F$.

9. Seja (X, τ) infinito. Considere $\mathcal{F} = \{F \subset X : X \backslash F \text{ é finito }\}$

   (a) Mostre que $\mathcal{F}$ satisfaz a p.i.f.

   (b) Mostre que qualquer $G \subset \mathcal{F}$ ultrafiltro não é da forma $\{A \subset X : x \in A\}$ para algum $x \in X$. Note que, de fato, existe algum $G \supset \mathcal{F}$ ultrafiltro.

Exercícios - Teorema de Tychonoff

10. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{F}$ uma cadeia de subconjuntos de X, cada um deles com a propriedade da intersecção finita. Então, $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F$ tem a propriedade da intersecção finita. ($\mathcal{F}$ é uma cadeia se para todo $A, B \in \mathcal{F}$ temos $A \subset B$ ou $B \subset A$.)
11. Sejam X um conjunto não vazio e F um filtro sobre X. Então, existe $G \supset F$ que é ultrafiltro sobre X.

Definição 8

Sejam (X, τ) um espaço topológico e F um filtro sobre X. Dizemos que $x \in X$ é um ponto aderente a F se, para todo $A \in F$, temos $x \in \bar{A}$

Dizemos que F converge para X se, para toda vizinhança de x, temos que $V \in F$. (Notação: $F \to x$.

Exercícios - Teorema de Tychonoff

12. Mostre que se (X, τ) é de Hausdorff, então cada ultrafiltro sobre X converge para, no máximo, um ponto.
13. Seja (X, τ) um espaço topológico. Mostre que são equivalentes:
    (i) (X, τ) é compacto;
    (ii) Todo filtro sobre X tem ponto aderente;
    (iii) Todo ultrafiltro sobre X converge.
14. Seja $\mathcal{F}$ um ultrafiltro sobre $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.
    (a) Mostre que, se $F \in \mathcal{F}$, então $\pi_\alpha^{-1}[\pi_\alpha[F]] \in \mathcal{F}$ para todo $\alpha \in A$.
    (b) Mostre que, para todo $\alpha \in A$, $\{\pi_\alpha[F] : F \in \mathcal{F}\}$ é ultrafiltro sobre X_α.
15. (Teorema de Tychonoff). Seja $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de espaços topológicos compactos. Então, $X = \prod X_\alpha$ é compacto.

Vamos gora trabalhar com um conceito que é usado muitas vezes com a compacidade.

Definição 9

Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $x \in X$ é um ponto de acumulação de $A \subset X$ se $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Note que se x é ponto de acumulação de A, então $x \in \bar{A}$. Mas não necessariamente vale a volta (ver exercício).

Proposição 10

Seja (X, τ) espaço T_1. Então $x \in X$ é ponto de acumulação de $A \subset X$ se, e somente se, para todo V aberto tal que $x \in V$ temos que $V \cap A$ é infinito.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja V aberto tal que $x \in V$. Suponha $V \cap A$ finito. Então $V' = V \setminus (A \setminus \{x\})$ é um aberto (usamos aqui T_1) tal que $x \in V'$ e $V' \cap A \subset \{x\}$ e, portanto, x não é ponto de acumulação.

$(\Leftarrow)$Por outro lado, se para todo V aberto tal que $x \in V$ temos que $V \cap A$ é infinito, então $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ e, portanto, x é ponto de acumulação de A.

A compacidade implica na existência de pontos de acumulação para conjuntos infinitos.

Proposição 11

Seja (X, τ) compacto. Então todo suconjunto infinito admite ponto de acumulação.

Demonstração. Seja $A \subset X$ um conjunto infinito. Suponha que todo $x \in X$ não é ponto de acumulação de A. Assim, para todo $x \in X$, existe V_x aberto tal que $x \in V_x$ e $V_x \cap A \subset \{x\}$. Note que isso dá uma cobertura aberta para X e, portanto, tem subcobertura finita. Assim, existem $x_1, \ldots, x_n \in X$ tais que $X \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Em particular, $A \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Mas note que isso implica que $A \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$, contradição com a infinitude de A.