GABARITO

MAT105 – Prova 1

Nome: ____________________

Número USP: ____________________

Esta é a primeira prova de MAT105 - 2023. Resolva os exercícios abaixo. Justifique <u>TODAS</u> as suas respostas. Note que as questões dessa prova somam 13 pontos. Note também que não é necessário fazer todas as questões para tirar 10 na prova. Leia todas as questões antes de começar a prova e utilize bem o seu tempo (é muito provável que não dê tempo de fazer todas as questões). Boa prova!

1. (3 pontos) Dados os vetores linearmente independentes $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ constroem-se, a partir de um ponto arbitrário O os pontos

$$A = O + \vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}, \quad B = O - \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$$

$$C = O + \vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}, \quad D = O - 2\vec{u} - \vec{v}.$$

Determine se os vetores, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ são linearmente dependentes ou independentes. Justifique claramente a sua resposta.

$\overrightarrow{OA} = \vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$

$\overrightarrow{OB} = -\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$

$\overrightarrow{OC} = \vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$

$\overrightarrow{OD} = -2\vec{u} - \vec{v}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$

$= -2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} =$

$= 5\vec{v} - 4\vec{w}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} =$

$= -3\vec{u} + \vec{v}$

Para decidir se são L.I. ou L.D. vamos considerar a eq. $\circledast$

$\circledast \quad x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow x(-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w}) + y(5\vec{v} - 4\vec{w}) + z(-3\vec{u} + \vec{v}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (-2x - 3z)\vec{u} + (x + 5y + 3z)\vec{v} + (-4x - 4y)\vec{w} = \vec{0}$

Como $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ L.I., esta equação é equivalente à

$$\begin{cases} -2x \qquad - 3z = 0 & (1) \\ x + 5y + 3z = 0 & (2) \\ -4x - 4y \qquad = 0 & (3) \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow y = -x$

$(1) \Rightarrow z = -\frac{2}{3}x$

$(2) \Rightarrow x + 5(-x) + 3(-\frac{2}{3}x) = 0$

$\Rightarrow -6x = 0$

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = z = 0$

Logo,

$\circledast \Rightarrow x = y = z = 0$ e portanto

$\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ é L.I.

2. (3 pontos) Seja $\vec{a} = (-1, 1, 1)$ e seja $\vec{b} \in V^3$ tal que $\vec{b} \neq \vec{0}$ satisfaz as seguintes condições:

- $\vec{a} \perp \vec{b}$
- A projeção ortogonal de $\vec{b}$ em $\vec{v} = (1, 0, 0)$ é o vetor nulo, isto é $\text{proj}_{\vec{v}}^{\perp}\vec{b} = \vec{0}$.

Sabendo que $\vec{c} \in V^3$ é um vetor não nulo tal que tal que $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$, decida se $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é necessariamente uma base de V^3. Justifique sua resposta com uma demonstração ou um contra-exemplo.

Resolução 1

Note que $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ e $\vec{c} \neq \vec{0}$ são vetores tais que $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$

Vou mostrar que isso implica que $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ L.I. :

Considere $(*)$ $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$

Fazendo o produto escalar dos dois lados de $(*)$ com $\vec{a}$ obtemos

$(*) \Rightarrow x\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + y\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + z\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 0$

$\Rightarrow x\|\vec{a}\|^2 = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$\vec{a} \neq \vec{0}$

Analogamente, fazendo produto escalar dos dois lados de $(*)$ com $\vec{b}$ e $\vec{c}$ obtemos que $(*) \Rightarrow y = 0$ e $(*) \Rightarrow z = 0$

Logo $(*) \Rightarrow x = y = z = 0$ e portanto $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ L.I.

Resolução 2

- $\vec{b} = (r, s, t) \neq (0,0,0)$

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow -r+s+t=0$

$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \langle \vec{b}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow r = 0$

Logo, $r=0$ e $t=-s$, isto é,

$\vec{b} = (0, s, -s) \quad s \in \mathbb{R}, \quad s \neq 0$

- $\vec{c} = (x, y, z)$

$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 0 \Leftrightarrow -x+y+z=0$

$\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle s(0,1,-1), (x,y,z) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow s \langle (0,1,-1), (x,y,z) \rangle = 0 \underset{s \neq 0}{\Leftrightarrow} \langle (0,1,-1), (x,y,z) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow y - z = 0$

Logo x, y, z satisfaz $\begin{cases} -x+y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} y = z \\ x = 2z \end{matrix} \Leftrightarrow \vec{c} = (2z, z, z), \quad z \neq 0$

(z arbitrário)

Vamos agora provar que $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ L.I.

Considere

$(*)\quad \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \alpha(-1,1,1) + \beta(0,s,-s) + \gamma(2z,z,z) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow (-\alpha + 2z\gamma,\ \alpha + s\beta + z\gamma,\ \alpha - s\beta + z\gamma) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + 2z\gamma = 0 \\ \alpha + s\beta + z\gamma = 0 \\ \alpha - s\beta + z\gamma = 0 \end{cases}$ onde $s \neq 0$, $z \neq 0$

Matriz Estendida:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2z & 0 \\ 1 & s & z & 0 \\ 1 & -s & z & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_1]{L_2 \to L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2z & 0 \\ 0 & s & 3z & 0 \\ 0 & -s & 3z & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2z & 0 \\ 0 & s & 3z & 0 \\ 0 & 0 & 6z & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \to L_1 - \frac{1}{3}L_3]{L_2 \to L_2 - \frac{1}{2}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6z & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \to \frac{1}{6z}L_3]{L_1 \to -L_1,\ L_2 \to \frac{1}{s}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

(pode pois $s \neq 0$, $z \neq 0$)

$(*) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ e portanto $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ L.I.

3. Seja B uma base ortonormal. Considere a base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ onde os vetores

$$\vec{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})_B, \quad \vec{e}_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})_B, \quad \vec{e}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)_B$$

foram obtidos pelo método de ortonormalização de Gram-Schmidt a partir da base $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$;

$$\vec{f}_1 = (1,1,1)_B, \quad \vec{f}_2 = (2,2,-1)_B, \quad \vec{f}_3 = (1,-1,0)_B.$$

(a) (1 ponto) Encontre as coordenadas do vetor $\vec{a} = (1,2,3)_F$ na base B.

(b) (2 pontos) Encontre as coordenadas do vetor $\vec{b} = (1,2,3)_B$ na base E.

(a) $\vec{a} = (1,2,3)_F \Rightarrow \vec{a} = \vec{f_1} + 2\vec{f_2} + 3\vec{f_3}$

$\Rightarrow \vec{a} = (1,1,1)_B + 2(2,2,-1)_B + 3(1,-1,0)_B$

$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = (8,2,-1)_B}$

(b) Resolução 1:

Note que $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é base O.N. (foi obtida pelo método de Gram-Schmidt)

Logo $\vec{b} = (\langle \vec{b}, \vec{e}_1 \rangle, \langle \vec{b}, \vec{e}_2 \rangle, \langle \vec{b}, \vec{e}_3 \rangle)_E$

Como B é base O.N., podemos calcular os produtos escalares pela fórmula usual (soma dos produtos das coordenadas)

Logo

$\langle \vec{b}, \vec{e}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$

$\langle \vec{b}, \vec{e}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{-3}{\sqrt{6}}$

$\langle \vec{b}, \vec{e}_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$

$\boxed{\vec{b} = (\frac{6}{\sqrt{3}}, \frac{-3}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})_E}$

b) Resolução 2:

Queremos $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{b} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)_B + y\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)_B$$

$$+ z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)_B$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{6}} + \frac{z}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{6}} - \frac{z}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2y}{\sqrt{6}}\right)_B$$

Ou seja

$$(1,2,3)_B = \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{6}} + \frac{z}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{6}} - \frac{z}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2y}{\sqrt{6}}\right)_B$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{6}} + \frac{z}{\sqrt{2}} = 1 \\ \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{6}} - \frac{z}{\sqrt{2}} = 2 \\ \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2y}{\sqrt{6}} = 3 \end{cases}$$

Matriz Estendida

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 2 \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & \frac{-3}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_1 \to L_1 + \frac{1}{2}L_3]{L_2 \to L_2 - \frac{1}{2}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 3/2 \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{6}} & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 + \frac{1}{3}L_2} \left(\begin{array}{cccc} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{3}} = 2 \\ \frac{-3y}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2\sqrt{3} \\ y = -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \Rightarrow \boxed{\vec{b} = \left(2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_E}$$

<u>OBS</u>: Para comparar os dois resultados:

$2\sqrt{3} = (2\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$ | $-\frac{\sqrt{6}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{-6}{2\sqrt{6}} = \frac{-3}{\sqrt{6}}$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

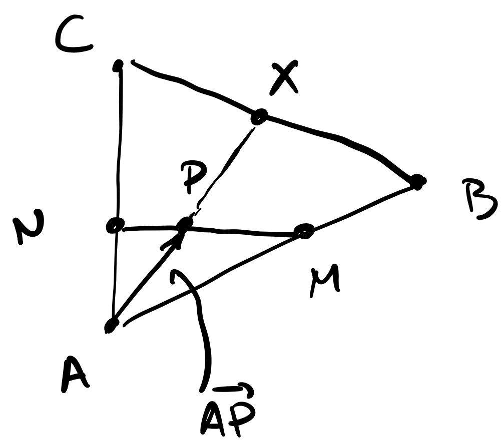
Ou seja, o resultado das duas formas de resolução são iguais.

4. (4 pontos) Sejam A, B e C vértices de um triângulo em $\mathbb{R}^3$. Sejam M, N e P os seguintes pontos de $\mathbb{R}^3$:

$$M = A + m\overrightarrow{AB}, \quad N = A + n\overrightarrow{AC}, \quad P = M + p\overrightarrow{MN},$$

onde m, n e p são números reais.

Encontre todos os valores de $m, n, p \in \mathbb{R}$ para os quais existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $X = A + t\overrightarrow{AP}$ é um ponto da reta que passa pelos pontos B e C. Para esses valores de m, n, p, determine t em função de m, n, p.



$X = A + t\overrightarrow{AP}$

$X = B + s\overrightarrow{BC} = A + \overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{BC}$

Vou expressar $\overrightarrow{AP}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$:

- $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} = m\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{MN}$
- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Logo,

$\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + p(-m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}) = (m - mp)\overrightarrow{AB} + np(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$= (m - mp + np)\overrightarrow{AB} + np\overrightarrow{BC}$

Logo, como $t\vec{AP} = \vec{AB} + s\vec{BC}$

temos que

$$(m - mp + np)t\,\vec{AB} + np\,t\,\vec{BC} = \vec{AB} + s\vec{BC}$$

e como $\vec{AB}, \vec{BC}$ L.I. (A, B, C são vértices de um triângulo)

$$\Rightarrow \begin{cases} (m - mp + np)t = 1 \\ np\,t - s = 0 \end{cases}$$

Matriz Extendida do sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} m - mp + np & 0 & 1 \\ np & -1 & 0 \end{array}\right)$$

- Se $m - mp + np = 0$ o sistema é impossível
- se $m - mp + np \neq 0$

$$\xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{m-mp+np} L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{m-mp+np} \\ np & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - npL_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{m-mp+np} \\ 0 & -1 & \frac{-np}{m-mp+np} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{m-mp+np} \\ 0 & 1 & \frac{np}{m-mp+np} \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ SPD

$$\boxed{t = \frac{1}{m-mp+np}}$$