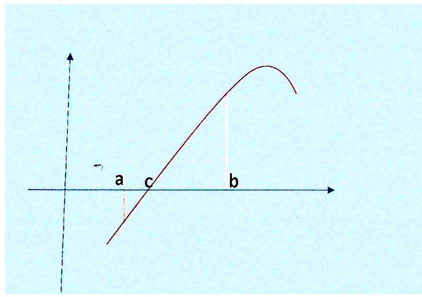
Dois teoremas importantes da Análise Real

Teorema do Anulamento: Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida num intervalo I, e suponhamos $a, b \in I$ com $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Então existe c entre a e b tal que $f(c) = 0$.



Demonstração: Sem perda de generalidade, suponhamos $a < b$. Considere o conjunto $A = \{x \in [a, b] : f(t) < 0, \forall\, t \in [a, x]\}$

$A \neq \emptyset$, pois $f(a) < 0$. Além disso, A é limitado superiormente por b (pois $A \subseteq [a, b]$).

Pelo Axioma da Completude, existe $c = supA$. Vamos provar que $f(c) = 0$.

Suponhamos que não. Então $f(c) < 0$ ou $f(c) > 0$.

Caso 1: $f(c) < 0$. Como f é contínua, pelo Teorema da Conservação do Sinal, existe $r > 0$ tal que

$$t \in \,]c - r, c + r[\, \Rightarrow \; f(t) < 0.$$

Como $c = supA$ e $c - r < c$, existe $x_1 \in A$ tal que $c - r < x_1$. Temos então que:

$$\left.\begin{array}{ll} f(t) < 0 & \forall\, t \in [a, x_1] \\ f(t) < 0 & \forall\, t \in]c - r, c + r[\\ c - r \leq x_1 < c < c + \frac{r}{2} & \end{array}\right\} \Rightarrow \; f(t) < 0, \forall\, t \in [a, c + \tfrac{r}{2}] \;\Rightarrow\; c + \tfrac{r}{2} \in A$$

o que contradiz o fato e c ser o supremo do conjunto A.

Caso 2: $f(c) > 0$. Novamente pelo Teorema da Conservação do Sinal, existe $r > 0$ tal que $f(t) > 0$, $\forall\, t \in \,]c - r, c + r[$. Como $c = supA$ e $c - r < c$, existe $x_2 \in A$ com $c - r < x_2$. Temos então que:

$$\left.\begin{array}{ll} f(t) > 0 & \forall\, t \in \,]c - r, c] \\ f(t) < 0 & \forall\, t \in [a, x_2] \\ c - r < x_2 < c & \end{array}\right\} : \text{ contradição.}$$

Logo, $f(c) = 0$, o que prova o teorema. $\triangle$

Uma consequência importante do Teorema do Anulamento é o chamado Teorema do Valor Intermediário.

Teorema do Valor Intermediário: Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida num intervalo I, e suponhamos $a, b \in I$ com $f(a) = \alpha$ e $f(b) = \beta$. Se $\alpha < \gamma < \beta$ então existe c entre a e b tal que $f(c) = \gamma$. Dessa forma, a imagem de um intervalo por uma função contínua é um intervalo.

Demonstração: Sem perda de generalidade, suponhamos $a < b$.

Seja $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x) - \gamma$, $\forall\, x \in [a, b]$.

Como f é uma função contínua, vale o mesmo para a função h.

Temos:

$$\begin{cases} f(a) = \alpha < \gamma \;\Rightarrow\; f(a) - \gamma < 0 \Rightarrow h(a) < 0 \\ f(b) = \beta > \gamma \;\Rightarrow\; f(b) - \gamma > 0 \Rightarrow h(b) > 0 \\ [a, b] \text{ é um intervalo} \end{cases}$$

Pelo Teorema do Anulamento, existe c entre a e b tal que $h(c) = 0$, e portanto, $f(c) - \gamma = 0$. Logo, $f(c) = \gamma$. $\triangle$