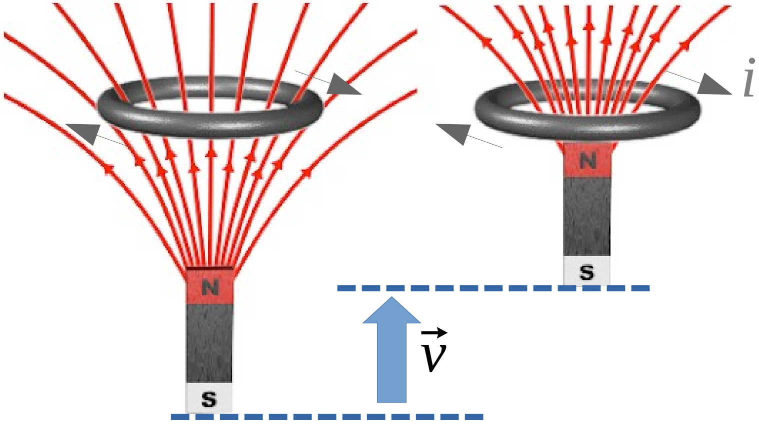
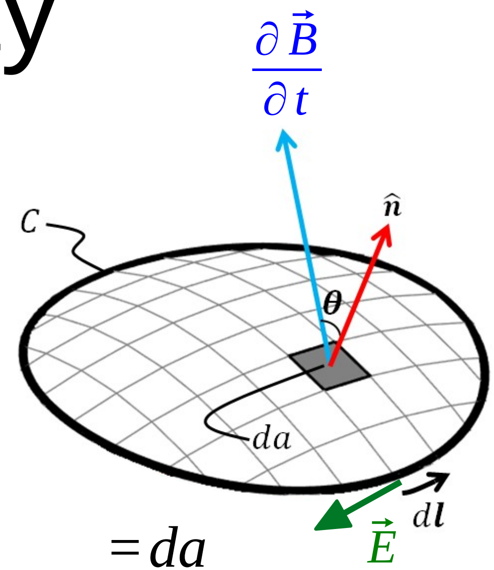
Física III 2023 (IF) – Aula 24

Objetivos de aprendizagem

- Enunciar o Teorema de Stokes
- Obter o rotacional de um campo vetorial em coordenadas cartesianas
- Enunciar a “Lei de Faraday da eletrostática”, nas formas integral e diferencial
- Determinar se um campo vetorial é conservativo

A Lei de Faraday





$= da$

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l} = -\Phi_{(\partial \vec{B}/\partial t)} = -\int_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\hat{n}\, dS$$

$$\left(\text{força eletromotriz: } \oint_C \frac{\vec{F}}{q}.d\vec{l} = -\frac{d\Phi_{(\vec{B})}}{dt}\right)$$

Lei de Faraday “eletrostática”

(Sem movimento de cargas elétricas: $i = 0 \ \rightarrow \ B = 0$)

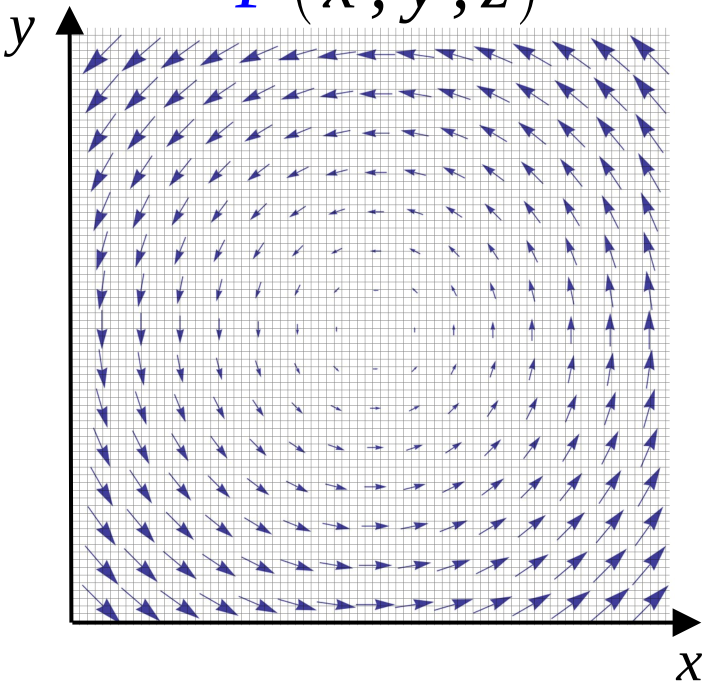
$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l} = 0 \quad \left(\vec{B}(x,y,z,t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0\right)$$

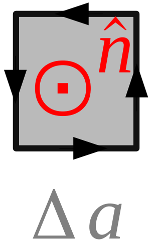
Obs.: Nesse caso o campo elétrico é conservativo, o que permite definir uma função potencial, da qual ele é o gradiente, com sinal trocado:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Rotacional de um campo vetorial

$\vec{F}(x, y, z)$





$\Delta\Gamma$ (caminho pequeno no entorno de um ponto)

“Circulação”:

$$C_{\Delta\Gamma} = \oint_{\Delta\Gamma} \vec{F} . d\vec{l}$$

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{C_{\Delta\Gamma}}{\Delta a} \equiv \mathrm{rot}\,\vec{F} . \hat{n} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} . \hat{n}$$

$$\hat{n} = \hat{i}, \hat{j}, \hat{k} \ldots$$

Rotacional em coordenadas cartesianas

- Operador nabla $\vec{\nabla}=(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k})$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k})\times(F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k})$$

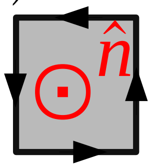
$$\mathrm{rot}\,\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\hat{i}(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z})+\hat{j}(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x})+\hat{k}(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y})$$

Rotacional em coord. cart.

$$\vec{F}(x, y, z)$$

$$F_x(x, y+\Delta y, z)$$

$$\Delta\Gamma$$



$$F_y(x, y, z)$$

$$\Delta a$$

$$F_y(x+\Delta x, y, z)$$

$$\Delta a = \Delta x \Delta y$$

Teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{l} = \int_{S(C)} (\vec{\nabla}\times\vec{F}).\hat{n}\,dS$$

(campo vetorial qualquer)

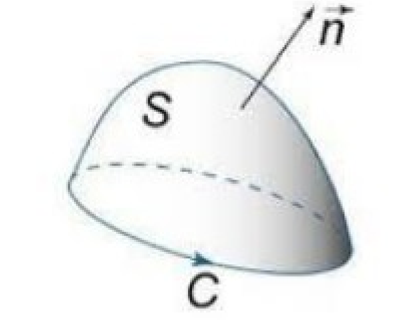
- Análogo ao Teorema de Gauss

$$\int_S \vec{F}.\hat{n}\,dS = \int_{V(S)} (\vec{\nabla}.\vec{F})\,dV$$

Teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{l} = \int_{S(C)} (\vec{\nabla}\times\vec{F}).\hat{n}\,dS$$

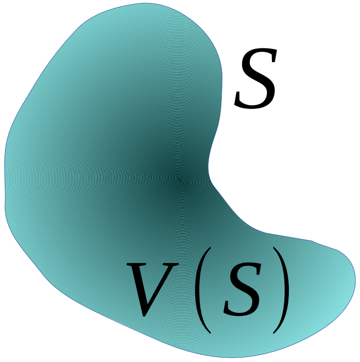
(campo vetorial qualquer)



S aberta

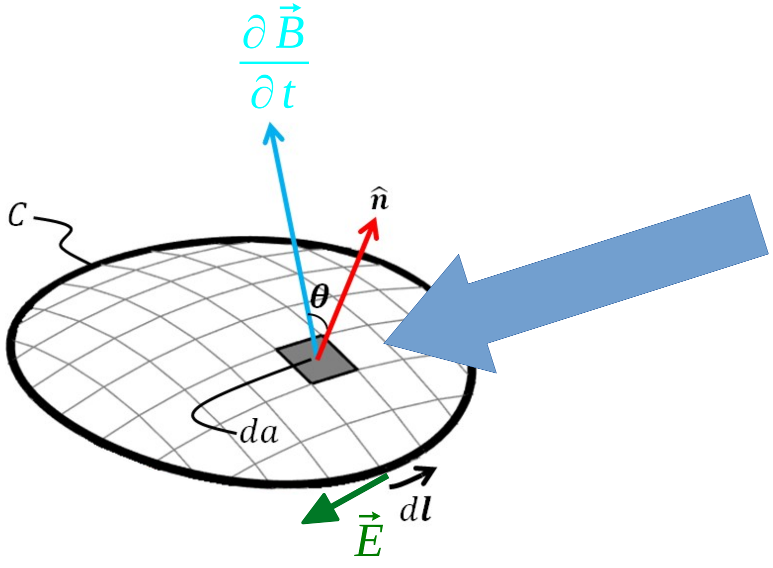
- Análogo ao Teorema de Gauss

$$\int_S \vec{F}.\hat{n}\,dS = \int_{V(S)} (\vec{\nabla}.\vec{F})\,dV$$

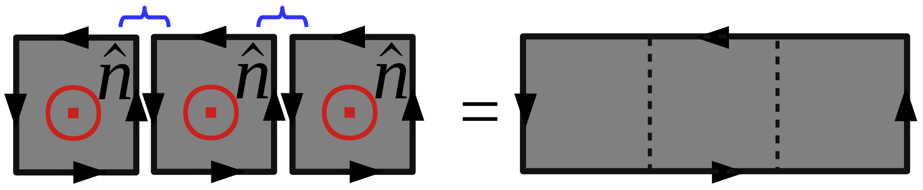


S fechada

Origem do Teorema de Stokes



Contribuições de trechos internos se anulam

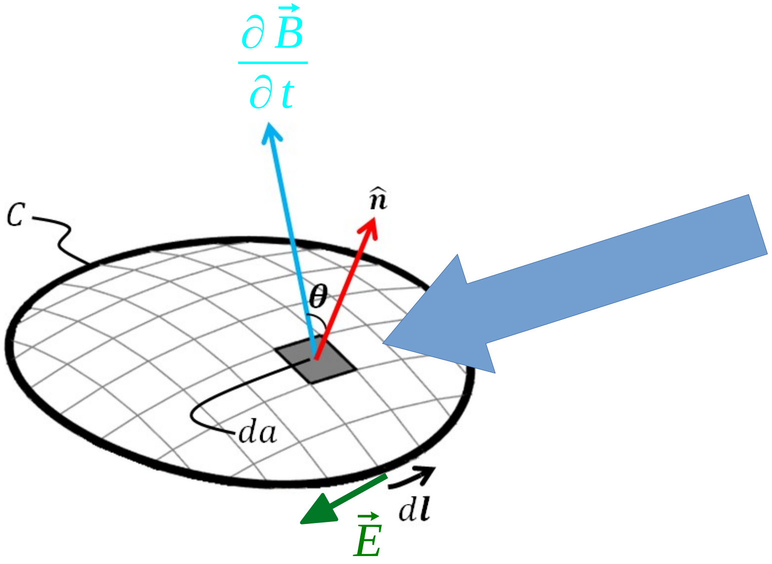


Δa

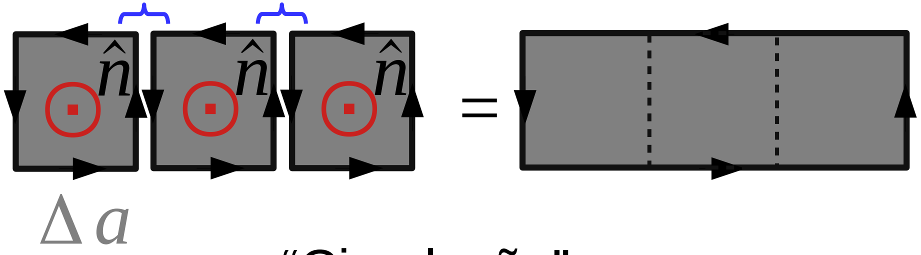
"Circulação":

$$C_{\Delta\Gamma} = \oint_{\Delta\Gamma} \vec{F} . d\vec{l}$$

Origem do Teorema de Stokes



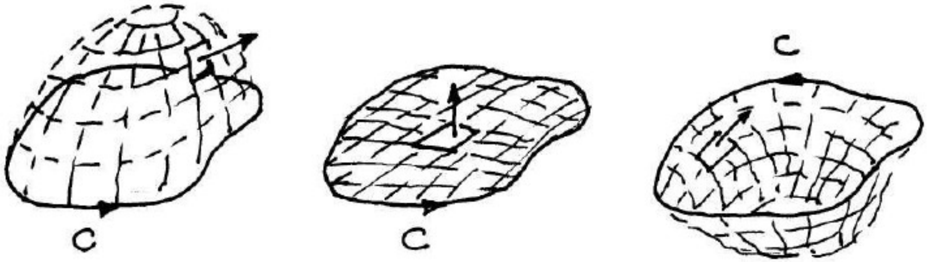
Contribuições de trechos internos se anulam



“Circulação”:

$$C_{\Delta\Gamma} = \oint_{\Delta\Gamma} \vec{F} \, . \, d\vec{l}$$

Obs.:
Tanto faz



Rotacional do campo eletrostático

L. Faraday (*)

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l}=0 \quad \left(\vec{B}=0\right)^{(*)}$$

F. integral

T. Stokes

$$\boxed{\oint_C \vec{E}.d\vec{l}=\int_{S(C)} \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right).\hat{n}\,dS}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E}=0}$$

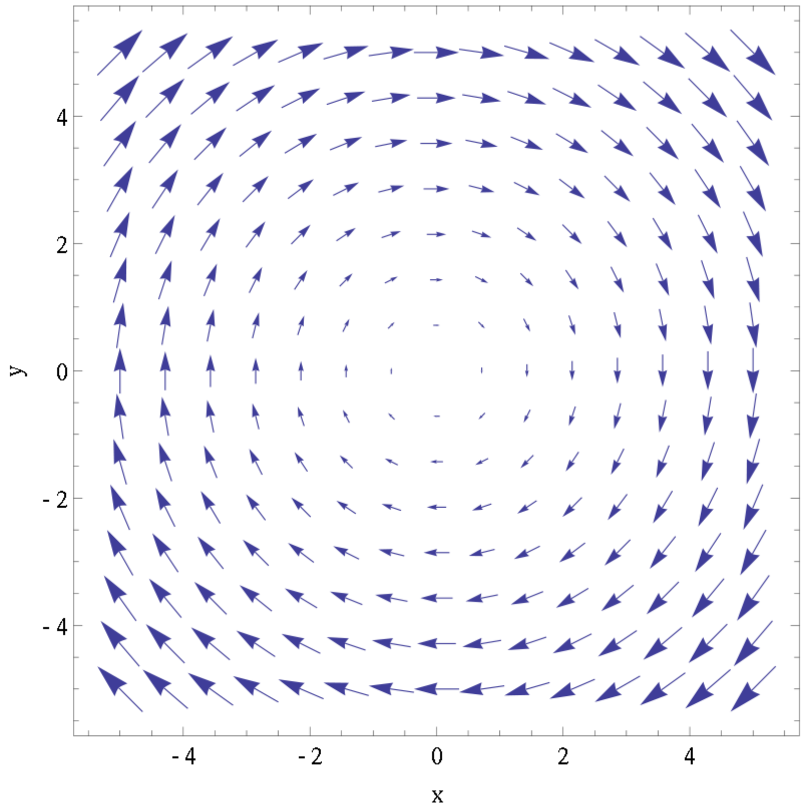
F. diferencial da L. Faraday (*)

Obs.: Se o rotacional é zero → o campo é conservativo

Exemplos

a) $\vec{F}(x,y,z) = -mg\hat{k}$

b) $\vec{F}(x,y,z) = y\hat{i} - x\hat{j}$



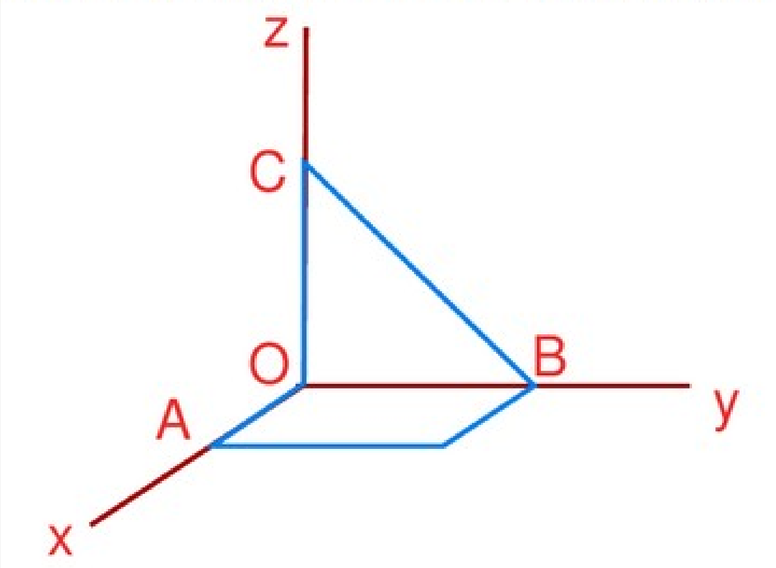
c) $\vec{F}(x,y,z) = x^2\hat{i} + y^2\hat{j}$

Exemplo 1 Cap. 24 p/ próxima aula

Verifique diretamente a validade do Teorema de Stokes para o campo vetorial dado pela expressão:

$$\vec{F} = x^2\hat{i} + xy\hat{j} + (y^2 + z^2)\hat{k}$$

para o caso do caminho fechado C, consistindo de segmentos de reta (em azul, como indicado na figura abaixo), que parte da origem O, passando pelos pontos (A,0,0)-(A,B,0)-(0,B,0)-(C,0,0) (em coordenadas cartesianas) e retornando à origem. Assuma que a superfície limitada por este caminho consiste de duas faces planas, uma quadrangular, no plano xy e outra triangular, no plano yz.



Exemplo 2 Cap. 24

Mostre que o rotacional do gradiente de qualquer função escalar é nulo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V(x, y, z) = 0.$$