Gabarito Comentado da Segunda Provinha de Física Moderna

1. Em 1896 Wien mostrou rigorosamente que a densidade $u_\nu(T)$ deveria ser da forma $u_\nu(T) = \nu^3 f(\nu/T)$, com f uma função desconhecida até então. Mostre que essa forma funcional explica
   (a) a lei do deslocamento de Wien,
   (b) que o valor máximo da densidade de energia é proporcional a T^3 e
   (c) a lei de Stefan-Boltzmann.

Respostas:

- (a) Neste item, devemos achar o ponto de máximo da função $u_\nu(T)$. Para isso, primeiro derivamos u_ν:
$$\frac{du_\nu}{d\nu} = 3\nu^2 f(\alpha) + \frac{\nu^3}{T}\frac{df(\alpha)}{d\alpha} \ ,$$
onde $\alpha \equiv \nu/T$. É errado igualar isso a zero. Será zero apenas no ponto de máximo da função u_ν, isto é, especificamente em ν_m. Assim,
$$\frac{du_\nu}{d\nu}|_{\nu_m} = \nu_m^2[3f(\alpha_m) + \alpha_m f'(\alpha_m)] = 0 \ ,$$
sendo
$$\alpha_m \equiv \nu_m/T \quad \text{e} \quad f'(\alpha_m) \equiv \frac{df}{d\alpha}|_{\alpha_m} \ .$$
Portanto, temos,
$$3f(\alpha_m) + \alpha_m f'(\alpha_m) = 0 \ ,$$
que é uma <u>equação algébrica</u> na variável α_m. <u>Não é uma equação diferencial</u>, pois a derivada f' foi calculada no ponto α_m, portanto, $f'(\alpha_m)$ é uma expressão algébrica em α_m.

  Da solução dessa equação algébrica tiramos o <u>valor numérico</u> de α_m. Enfatizo, α_m, embora desconhecido (pois não conheço f), é um número. Denotando esse número por b, ficamos com
$$\frac{\nu_m}{T} = b \rightarrow \nu_m = bT \ ,$$
que é a lei do deslocamento de Wien.

  Outro erro: a equação acima implica que
$$\frac{\nu_m}{T} = -\frac{3f(\nu_m/T)}{f'(\nu_m/T)} \ ,$$

mas afirmar que o lado direito é uma constante é errado, pois você ainda não sabe que a razão ν_m/T é um número! Só saberá quando resolver essa equação!

Após o trabalho de Planck de 1900 a função $f(\nu/T)$ ficou conhecida. Você pode refazer este item com a forma explicita de f dada em classe ou nas notas de aula.

- (b) O valor de $u_\nu(T)$ no ponto de máximo $\nu_m = bT$ é

$$u_{\nu_m}(T) = \nu_m^3 f(\nu_m/T) = (bT)^3 f(b) = b^3 f(b)\, T^3 \propto T^3 \ .$$

- (c) Integrando $u_\nu(T)$ em todas as frequências:

$$R \equiv \int_0^\infty e_\nu(T) d\nu = \int_0^\infty \frac{c}{4}\nu^3 f(\nu/T) d\nu = \frac{c}{4}\int_0^\infty (Tx)^3 f(x) dx = \sigma T^4 \ ,$$

que é a lei de Stefan-Boltzmann. Na última passagem fiz $x \equiv \nu/T$. Note que a integral $\int_0^\infty x^3 f(x) dx$ é um número, desconhecido se não soubermos f, mas é um número! Assim, R é proporcional à T^4.