Gabarito da Lista de Exercícios de SMA0301-Cálculo I - Módulo 3

Última atualização em 19/04/2023

Exercício 1 (a) 1. *Temos que* $s(0) = 2m$ *e* $s(2) = 0m$*, assim, o deslocamento do corpo é* $\Delta s = s(2) - s(0) = -2m$.

A velocidade média é $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$*, então temos* $v_m = \frac{-2}{2-0} = -1m/s$.

2. *Temos que* $s(0) = 0m$ *e* $s(6) = 0m$*, assim, o deslocamento do corpo é* $\Delta s = s(6) - s(0) = 0m$.

A velocidade média é $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$*, então temos* $v_m = \frac{0}{6-0} = 0m/s$.

3. *Temos que* $s(0) = 0m$ *e* $s(3) = -9m$*, assim, o deslocamento do corpo é* $\Delta s = s(3) - s(0) = -9m$.

A velocidade média é $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$*, então temos* $v_m = \frac{-9}{3-0} = -3m/s$.

4. *Temos que* $s(0) = 0m$ *e* $s(3) = 2,25m$*, assim, o deslocamento do corpo é* $\Delta s = s(3) - s(0) = 2,25m$.

A velocidade média é $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$*, então temos* $v_m = \frac{2,25}{3-0} = 0,75m/s$.

(b) *Como* $v = \frac{ds}{dt}$ *e* $a = \frac{dv}{dt}$,

1. *Temos que*

$$v(t) = 2t - 3$$

e

$$a(t) = 2.$$

Assim $|v(0)| = 3m/s$, $|v(2)| = 1m/s$ *e* $a(0) = a(2) = 2m/s^2$.

2. *Temos que*

$$v(t) = 6 - 2t$$

e

$$a(t) = -2.$$

Assim $|v(0)| = 6m/s$, $|v(6)| = 6m/s$ *e* $a(0) = a(6) = -2m/s^2$.

3. *Temos que*

$$v(t) = -3t^2 + 6t - 3$$

e

$$a(t) = -6t + 6.$$

Assim $|v(0)| = 3m/s$, $|v(3)| = 12m/s$, $a(0) = 6m/s^2$ *e* $a(3) = -12m/s^2$.

4. *Temos que*

$$v(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$$

e

$$a(t) = 3t^2 - 6t + 2.$$

Assim $|v(0)| = 0m/s$, $|v(3)| = 6m/s$, $a(0) = 2m/s^2$ *e* $a(3) = 11m/s^2$.

(c) *O corpo muda de direção no instante t tal que v(t) = 0.*

1. *Como* $0 = v(t) = 2t - 3$ *logo* $t = 1,5s$.
2. *Como* $0 = v(t) = 6 - 2t$ *logo* $t = 3s$.
3. *Como* $0 = v(t) = -3t^2 + 6t - 3$ *logo* $t = 1s$.
4. *Como* $0 = v(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$ *logo* $t = 1s$ *e* $t = 2s$.

Exercício 2 (a) *Notemos que* $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ *logo a velocidade é nula se* $3t^2 - 12t + 9 = 0$. *Isto é, a velocidade é nula em* $t = 1s$ *e* $t = 3s$. *Além disso, a função aceleração é* $a(t) = 6t - 12$ *e assim, a aceleração nos instantes que a velocidade é nula vao ser* $a(1) = -6m/s^2$ *e* $a(3) = 6m/s^2$.

(b) *Pelo feito no item a),* $a(t) = 6t - 12$. *Logo a aceleração é nula em* $t = 2s$. *Assim, o módulo da velocidade do corpo em* $t = 2s$ *é* $|v(2)| = 3m/s$.

(c) *A distância total percorrida pelo corpo é* $s(2) - s(0) = 2 - 0 = 2m$.

Exercício 3 *Como* $v = \frac{ds}{dt}$, *temos que*

$$v_{\text{Marte}} = 3,72t$$

e

$$v_{\text{Jupiter}} = 22,88t.$$

Logo, o tempo que vai levar a pedra atingir a velocidade de 27,8 m/s em Marte vai ser de $t = \frac{27,8}{3,72} = 7,47s$ *e em Jupiter vai ser de* $t = \frac{27,8}{22,88} = 1,22s$.

Exercício 4 (a) *Temos que a velocidade vai ser* $v(t) = 112 - 32t$. *Assim,* $v(2) = 48m/s$, $v(3) = 16m/s$ *e* $v(4) = -16m/s$.

(b) *A altura máxima é alcançada no instante* t *tal que* $v(t) = 0$. *Logo,* $t = \frac{112}{32} = 3,5s$.

(c) *O objeto atinge o chão no instante t tal que* $s(t) = 112t - 16t^2 = 0$ *onde* $t \neq 0$. *Logo* $t = 7s$.

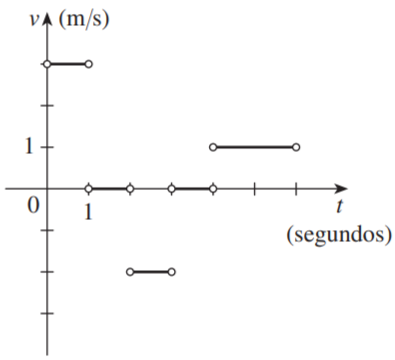
(d) *A velocidade no instante* $t = 7s$ *é* $v(7) = 112m/s$.

Exercício 5 *(a) Temos que* $v(t) = \frac{ds}{dt} = 24t^{\frac{1}{2}} - 24$ *logo* $v\left(\frac{1}{4}\right) = 24.(0,5) - 24 = -12$ *Isso significa que a velocidade é de 12 m/s com sentido oposto ao positivo no referencial. Assim, o carro move-se 12 m/s ao oeste.*

(b) Se $v(t) = 0$, *logo* $24t^{\frac{1}{2}} - 24 = 0$ *e assim* $t = 1s$. *Assim, temos que* $s(1) = 16 - 24 + 16 = 8m$.

Exercício 6 *(a) Direita:* $0 < t < 1$ *e* $4 < t < 6$; *esquerda:* $2 < t < 3$; *está parada:* $1 < t < 2$ *e* $3 < t < 4$.

(b)



Exercício 7 *Seja z a distância entre A e B, x a distância percorrida por A e y a distância percorrida por B. Note que*

- $z^2 = (150 - x)^2 + y^2$
- $\dfrac{dx}{dt} = 35\text{km/h}$
- $\dfrac{dx}{dt} = 25\text{km/h}$

Derivando ambos os lados da expressão do primeiro item, temos

$$2z\frac{dz}{dt} = -2(150 - x)\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}.$$

Observe que, após $4h$, $x = 4 \cdot 35 = 140\text{km}$, $y = 4 \cdot 25 = 100\text{km}$ *e*

$$z^2 = 100^2 + (150 - 140)^2$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{10100}.$$

Portanto,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(150 - 140) \cdot (-35) + 100 \cdot 25}{\sqrt{10100}} = \frac{2150}{\sqrt{10100}}\text{km/h}.$$

Exercício 8 (a) *Para $f(x)$ ser diferenciável em $x = a$, precisamos verificar a existência do seguinte limite* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Para $a < 1$, temos

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = \lim_{x \to a} 1 = 1$$

Para $a = 1$, temos

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x+1 = 1+1 = 2$$

Para $1 < a < 9$, *temos*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x\to a} x+a = 2a$$

Para $a = 9$, *temos*

$$\lim_{x\to 9^-} \frac{f(x)-f(9)}{x-9} = \lim_{x\to 9^-} \frac{x^2-9^2}{x-9} = \lim_{x\to 9^-} \frac{(x+9)(x-9)}{x-9} = \lim_{x\to 9^-} x+9 = 9+9 = 18$$

$$\lim_{x\to 9^+} \frac{f(x)-f(9)}{x-9} = \lim_{x\to 9^+} \frac{27\sqrt{x}-9^2}{x-9} = 27 \lim_{x\to 9^+} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = 27 \lim_{x\to 9^+} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} =$$

$$27 \lim_{x\to 9^+} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = 27 \lim_{x\to 9^+} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

Para $a > 9$, *temos*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{27\sqrt{x}-27\sqrt{a}}{x-a} = 27 \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = 27 \lim_{x\to a} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} =$$

$$27 \lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = 27 \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{27}{2\sqrt{a}}$$

Portando, f *é diferenciável em* $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 1 \text{ e } x \neq 9\}$

(b) *Para* $f(x) = x$, $f^{-1}(x) = x$, *onde o domínio de* $f^{-1}(x)$ *é* $\{x \in \mathbb{R}; x < 1 \text{ e } x \neq 0\}$.

Para $f(x) = x^2$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, *como o domínio de* f *é* $\{x \in \mathbb{R}; 1 \leqslant x \leqslant 9\}$ *e seu contradomínio é* $\{x \in \mathbb{R}; 1 \leqslant x \leqslant 81\}$, *todos os valores de* x *para* $f^{-1}(x)$ *serão positivos, desse modo sempre existirá raiz real e o domínio de* f^{-1} *será* $\{x \in \mathbb{R}; 1 \leqslant x \leqslant 81\}$ *e seu contradomínio será* $\{x \in \mathbb{R}; 1 \leqslant x \leqslant 9\}$.

Para $f(x) = 27\sqrt{x}$, $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{729}$ *e seu domínio será* $\{x \in \mathbb{R}; x > 81\}$

Portanto $f^{-1}(x)$ *existe para todo* $x \in \mathbb{R} \setminus 0$.

(c) *Temos*

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \text{ e } x \neq 0 \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 81 \\ \frac{x^2}{729}, & x > 81 \end{cases}$$

Para $a < 1$ *e* $x \neq 0$, *temos*

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} = 1$$

Para $a = 1$, *temos*

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} =$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

Para $1 < a < 81$, *temos*

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} =$$

$$\lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Para $a = 81$, *temos*

$$\lim_{x\to 81^-} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(81)}{x-81} = \lim_{x\to 81^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{81}}{x-81} = \lim_{x\to 81^-} \frac{\sqrt{x}-9}{x-81} \cdot \frac{\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}+9} =$$

$$\lim_{x\to 81^-} \frac{x-81}{(x-81)(\sqrt{x}+9)} = \lim_{x\to 81^-} \frac{1}{\sqrt{x}+9} = \frac{1}{\sqrt{81}+9} = \frac{1}{18}$$

$$\lim_{x\to 81^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(81)}{x-81} = \lim_{x\to 81^+} \frac{\frac{x^2}{729}-\sqrt{81}}{x-81} = \lim_{x\to 81^+} \frac{x^2 - 9\cdot 729}{729(x-81)} =$$

$$\lim_{x\to 81^+} \frac{x^2-81^2}{729(x-81)} = \lim_{x\to 81^+} \frac{(x-81)(x+81)}{729(x-81)} = \lim_{x\to 81^+} \frac{x+81}{729} = \frac{162}{729} = \frac{2}{9}$$

Para $a > 81$, *temos*

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{x^2}{729}-\frac{a^2}{729}}{x-a} =$$

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{729(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{729(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{729(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{x+a}{729} = \frac{2a}{729}$$

A derivada de f^{-1} *é dada por*

$$(f^{-1})'(x) = \begin{cases} 1, & x < 1 \text{ e } x \neq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 1 < x < 81 \\ \frac{2x}{729}, & x > 81 \end{cases}$$

e f^{-1} *não é derivável em* $x = 1$ *e* $x = 81$.

Exercício 9 *Para* $f(x)$ *ser diferenciável em* $x = 2$*, precisamos verificar a existência do seguinte limite* $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x + 2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} 1 = 1$$

Como $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim_{x\to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$*, então* $\nexists \lim_{x\to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ *e portanto* f *não é diferenciável em* $x = 2$*.*

Exercício 10

(a) *Calcularemos primeiro a derivada* $f'(2)$ *utilizando limite:*

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{x^2-4}{x-2} - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{(x+2)(x-2)}{x-2} - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x + 2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x - 2}{x - 2} = 1.$$

A derivada de uma função representa o coeficiente angular da reta tangente à função f *no ponto* $(x, f(x))$*. Desta forma, a derivada de* x *só seria nula se o gráfico da função fosse paralelo ao eixo* x *em um intervalo em torno de* $x = 2$*. Além disso, é importante perceber que para realizar o cálculo da derivada em um ponto, não é correto calcular* $f(x)$ *(que possui um valor constante) e depois a derivada, pois desse modo a derivada seria nula em qualquer ponto.*

(b) *Como* $2 \in \mathrm{Dom}(f)$*, para descobrir se* f *é contínua em* $x = 2$*, deve-se calcular o limite de* $f(x)$ *com* x *tendendo a* 2 *e verificar se assume o mesmo valor de* $f(2)$*:*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

Como $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$*, então* f *é contínua em* $x = 2$*.*

(c) *Como visto no item (b), o limite que verifica a continuidade de uma função* g *em um ponto* $p \in \mathrm{Dom}(g)$ *é*

$$\lim_{x\to p} g(x)$$

e esse limite deve ser igual a $g(p)$*.*

E como visto no item (a), o limite que calcula a derivada de g *em* $p \in \mathrm{Dom}(g)$ *é*

$$g'(p) = \lim_{x\to p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p}$$

(d) *Para calcular possíveis assíntotas verticais, deve-se tomar os limites:* $\lim_{x\to p^+} g(x)$ *e* $\lim_{x\to p^-} g(x)$*; Caso algum destes limites resultar em* $+\infty$ *ou* $-\infty$*, então a reta* $x = p$ *será assíntota vertical da função* g*.*

Para calcular possíveis assíntotas horizontais, deve-se tomar os limites: $\lim_{x\to -\infty} g(x)$ *e* $\lim_{x\to +\infty} g(x)$*; Caso algum destes limites resultar em um valor finito* c*, então a reta* $y = c$ *será assíntota horizontal da função* g*.*

(e) *Refazendo* (a), *temos:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x^2-4}{x-2}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x+1}{x-2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x+1}{x-2}=-\infty$$

Como $\lim_{x\to 2^+} f(x)\neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$, *não existe derivada em* $x=2$ *para a nova função.*
Refazendo (b), *temos:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2} x+2=2+2=4$$

Temos que $f(2)=1$, *como* $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$, *então* f *não é contínua em* $x=2$.

Exercício 11

(a) *Para que a função f seja contínua em 2 é necessário que:* $2\in \mathrm{Dom}(f)$ *e* $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$. *É possível notar que* $f(2)=1$ *e calculando os limites:*

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x+1=2+1=3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} 1=1$$

Portanto, f *não é contínua em* $x=2$.

(b)

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1-1}{x-2}=0$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x+1)-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{x-2}=-\infty$$

Como não existe $\lim_{x\to 2} f(x)$, *então* f *não é diferenciável em* $x=2$.

(c) *A partir do gráfico da função, é possível notar que ocorre um "salto"quando* $x=2$, *indicando a descontinuidade da função nesse ponto. Além disso, para qualquer* $x>2$, *a função é constante e, desse modo, a derivada nesses pontos é zero. Já para valores de* x *menores que 2, o crescimento da função é não nulo, ou seja sua derivada não é zero. Dessa forma,* f *não é derivável em 2.*

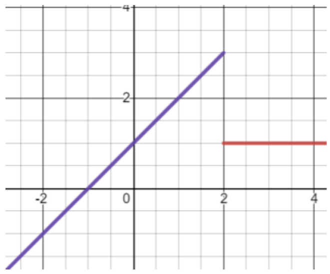
(d) *Para* $a<2$, *temos*

$$f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x+1-(a+1)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=1$$

e para $a>2$, *temos*

$$f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1-1}{x-a}=0.$$

Só não existe derivada para $x=2$. *Dessa forma, o domínio da função derivada é* $\mathrm{Dom}(f')=\{x\in\mathbb{R}; x\neq 2\}$.



Exercício 12

(a) *Note que* $4 \in \mathrm{Dom}(f)$ *e temos*

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to^-} -x+4 = -4+4 = 0$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} x-4 = 4-4 = 0$$

$$f(4) = 4-4 = 0$$

Como $\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = 0 = f(4)$ *a função é contínua em* $x = 4$.

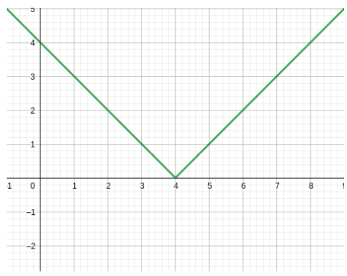
(b)

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \frac{x-4}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4^-} \frac{-x+4}{x-4} = \lim_{x\to 4^-} -1\frac{x-4}{x-4} = -1 \lim_{x\to 4^-} 1 = -1$$

Como não existe $\lim_{x\to 4} f(x)$, *então* f *não é diferenciável em* $x = 4$.

(c) *A função é contínua, portanto não existem "saltos"em seu gráfico. Entretanto, como é possível observar, em* $x = 4$ *o gráfico possui um "bico", o que indica que não existe derivada nesse ponto, pois não é possível encontrar reta tangente nesse ponto.*



(d) *Para* $x < 4$, $f'(x) = -1$ *e para e para* $x > 4$, $f'(x) = 1$. *Só não existe derivada para* $x = 4$. *Dessa forma, o domínio da função derivada é* $\mathrm{Dom}(f') = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 4\}$.

Exercício 13 (a) *Note primeiramente que* $0 \in \mathrm{Dom}(f)$ *e*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} -x^2 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0,$$

então $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, *portanto* f *é contínua em* 0.

(b)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}-x=0,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0^-}x=0.$$

Logo, $\exists\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *e portanto* f *é derivável em* 0.

(c) f *é contínua em* $a\in\mathbb{R}^*$ *pertencente ao domínio da* f, *pois*

$$\lim_{x\to a}f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to a}x^2=a^2=f(a), & se\ a<0\\ \lim_{x\to a}-x^2=-a^2=f(a), & se\ a>0\end{cases}$$

f *é derivável em* $a\in\mathbb{R}^*$ *pertencente ao domínio da* f, *pois*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\begin{cases}\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=2a, & se\ a<0\\ \lim_{x\to a}\frac{-x^2-(-a^2)}{x-a}=\frac{-(x-a)(x+a)}{x-a}=-2a, & se\ a>0\end{cases}$$

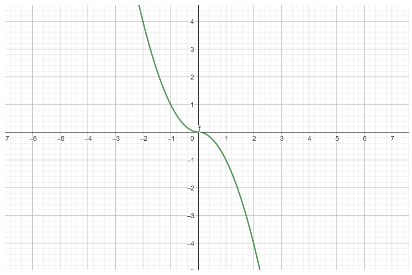
(d) 

Figura 1: $f(x)$

(e) *De acordo com os itens anteriores,*

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & se\ x<0\\ -2x, & se\ x\geq 0\end{cases},$$

portanto $\mathrm{Dom}(f')=\mathbb{R}$.

Exercício 14 (a) *Seja* $p\in\mathrm{Dom}(f)$ *e assuma que* f *é diferenciável em* p, *ou seja,* $f'(p)=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$. *Considere o seguinte limite*

$$\lim_{x\to p}f(x)-f(p)=\lim_{x\to p}(x-p)\frac{f(x)-f(p)}{(x-p)}=\lim_{x\to p}(x-p).\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=0.f'(p)=0.$$

Então, temos

$$\lim_{x\to p} f(x) - f(p) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to p} f(x) - \lim_{x\to p} f(p) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to p} f(x) - f(p) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to p} f(x) = f(p).$$

Portanto, f *é contínua em* p*.*

(b) *A recíproca não é verdadeira. Tome como contraexemplo a função* $f(x) = |x|$*, as justificativas estão no Exercício 16.*

Exercício 15 (a)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = 0.$$

Logo, $\nexists \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ *e portanto* f *não é derivável em* 0*.*

(b)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = 0.$$

Logo, $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ *e portanto* f *é derivável em* 0*.*

Exercício 16 (a) *Note primeiramente que* $0 \in \mathrm{Dom}(f)$ *e*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0),$$

portanto f *é contínua em* 0*.*

(b)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Logo, $\nexists \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ *e portanto* f *não é derivável em* 0*.*

(c) f *é contínua em* $a \in \mathbb{R}^*$ *pertencente ao domínio da* f*, pois*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} |x| = |a| = f(a).$$

f *é derivável em* $a \in \mathbb{R}^*$ *pertencente ao domínio da* f*, pois*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{cases} \lim_{x\to a} \frac{|x| - |a|}{x - a} = 1, & se\ a > 0 \\ \lim_{x\to a} \frac{|x| - |a|}{x - a} = -1, & se\ a < 0 \end{cases}$$

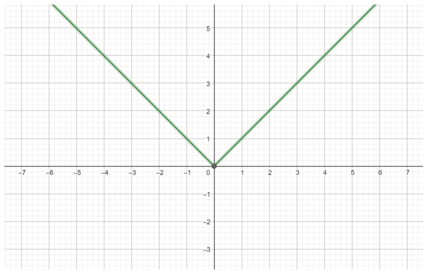
(d) 

Figura 2: $f(x) = |x|$

Exercício 17 (a) *Note primeiramente que* $0 \in \mathrm{Dom}(f)$ *e*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{3}} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0 = f(0),$$

portanto f *é contínua em* 0.

(b) $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \dfrac{x^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{x - a} = \dfrac{1}{3a^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}.$

(c) *Não existe* $f'(0)$, *pois como vimos no item (b),* $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ *e portanto* $0 \notin \mathrm{Dom}(f')$.

Exercício 18 *Temos que a derivada é definida como* $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$, *e para que ela exista, ou seja, para que esse limite exista em* $x = 0$, *os limites laterais tem que apresentar os mesmos valores. Assim temos calcular* $\lim_{h\to^{+}0} \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$ *e* $\lim_{h\to^{-}0} \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$, *para* $x = 0$ *e comparar os seus valores.*

Para $\lim_{h\to^{+}0} \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$, *temos:*

$$\lim_{h\to^{+}0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{h\to^{+}0} \frac{f(0) - f(0-h)}{h} = \lim_{h\to^{+}0} \frac{f(0) - f(-h)}{h},$$

por $h \to^{+} 0$ *fazer com que* $h > 0$, *e que* $-h < 0$

$$\lim_{h\to^{+}0} \frac{1 - (-1)}{h} = \lim_{h\to^{+}0} \frac{2}{h},$$

que é um limite indeterminado que tende a $-\infty$.

Agora para $\lim_{h\to^{-}0} \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$, *temos:*

$$\lim_{h\to^{-}0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{h\to^{-}0} \frac{f(0) - f(0-h)}{h} = \lim_{h\to^{-}0} \frac{f(0) - f(-h)}{h},$$

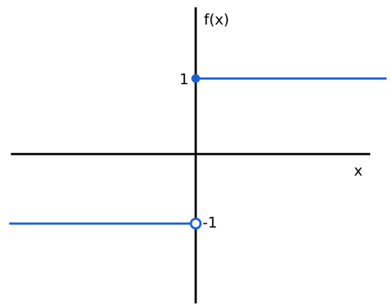
por $h \to^{-} 0$ *fazer com que* $h < 0$, *e que* $-h > 0$

$$\lim_{h\to^{-}0} \frac{1 - 1}{h} = \lim_{h\to^{-}0} \frac{0}{h} = 0.$$

Olhando para os limites laterais notamos que $\lim_{h\to^{+}0} \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h} \neq \lim_{h\to^{-}0} \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$. *Portanto, pelos limites laterais, para* $x = 0$, *serem diferentes, temos que o limite*

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}$ *não é determinado, e que portanto a derivada de* $f(x)$ *para esse ponto não pode ser calculada.*

Se fizermos o gráfico da $f(x)$ *podemos notar o seguinte também:*



Por ela não ser continua em $x=0$*, olhando para um* $x\to 0$ *vindo dos negativos, a* $f(x)$ *tem que dar um salto de variação que tende ao infinito para subir de* -1 *para* 1*, porém, vindo de um* x *dos positivos, a* $f(x)$ *se comporta como uma constante, com uma variação nula. Essa dualidade do valor da derivada que depende da direção em que se escolheu mover o* x *faz com que ela não possa ser verdadeiramente determinada em* $x=0$.

Exercício 19 *(a) Observe que se* $x\neq 0$*,* $f(x)=x^2\operatorname{sen}(1/x)$ *logo* f *é derivável para todo* $x\neq 0$*. Calculemos a derivada: temos* $f'(x)=2x\operatorname{sen}(1/x)-\cos(1/x)$ *para* $x\neq 0$ *e*

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}(1/x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, tem-se $f'(x)=\begin{cases} 2x\operatorname{sen}(\frac{1}{x})-\cos(1/x) & \text{, se } x\neq 0 \\ 0 & \text{, se } x=0 \end{cases}$*. Notemos que o domínio de* f' *é* $\mathbb{R}$*. Também notamos que as funções* $\operatorname{sen}(1/x)$ *e* $\cos(1/x)$ *são contínuas para* $x\neq 0$*. Só falta analisar a continuidade de* f' *em* $x=0$*. Com efeito,*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0} 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\cos(1/x) \\ &= \text{indeterminado}. \end{aligned}$$

Portanto, f' *é contínua em* $\mathbb{R}-\{0\}$.

(b) Da mesma maneira que (a), observemos que

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)-2}{x}=+\infty \text{ou}-\infty.$$

Por tanto, não existe $f'(0)$ *e* $f'(x)=2x\operatorname{sen}(1/x)-\cos(1/x)$ *para* $x\in\mathbb{R}-\{0\}$*. Isto é, o domínio de* f' *é* $\mathbb{R}-\{0\}$*. Assim, f' é contínua em* $\mathbb{R}-\{0\}$.

Exercício 20

(a) Temos que $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$, *portanto* $f'(x) = 0$.

(b) Temos que $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n - (x-h)^n}{h}$, *podemos expandir* $(x-h)^n$ *pelo polinômio de newton dado por* $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + ... + b^n$, $\lim_{h\to 0} \frac{x^n - (x-h)^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n - x^n + nx^{n-1}h + ... + h^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + ... + h^n}{h} = \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + ... + h^{n-1} = \lim_{h\to 0} n(x-h)^{n-1} = nx^{n-1}$, *portanto* $f'(x) = nx^{n-1}$.

(c) Primeiramente, temos que $f(x) = y = x^{\frac{1}{n}}$, *ou seja,* $y^n = x$, *assim fazemos a derivada para os dois lados, no lado com o* x *usamos a regra determinada em (b), com* $n = 1$, $\frac{d}{dx}y^n = 1 \cdot x^{1-1} = 1$, *assim temos que* $\frac{d}{dx}y^n = 1$. *Para derivarmos* y^n, *que depende de* x, *podemos usar uma regra chamada regra da cadeia, que nos permite descrever* $\frac{d}{dx}y^n$ *como* $\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$, *portanto* $\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = 1$. *Assim* $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

(d) Temos que $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x-h)}{h}$, *pela relação trigonométrica* $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\operatorname{sen}(b)$ *podemos reescrever*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)\cos(-h) - \cos(x)\operatorname{sen}(-h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)(1 - \cos(-h)) - \cos(x)\operatorname{sen}(-h)}{h},$$

por $\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen}(a)$ *temos*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)(1 - \cos(-h)) + \cos(x)\operatorname{sen}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)(1 - \cos(-h))}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\operatorname{sen}(h)}{h},$$

$\lim_{h\to 0} \cos(-h) = 1$ *e* $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)(1 - \cos(-h))}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\operatorname{sen}(h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)(1-1)}{h} + \lim_{h\to 0} \cos(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)(0)}{h} + \cos(x) = \cos(x),$$

portanto $f' = \cos(x)$.

(e) Temos que $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x) - \cos(x-h)}{h}$, *pela relação trigonométrica* $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$ *podemos reescrever*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x) - \cos(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x) - \cos(x)\cos(-h) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(-h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(1 - \cos(-h)) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(-h)}{h},$$

por $\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen}(a)$ *temos*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(1-\cos(-h)) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(1-\cos(-h))}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)}{h},$$

$\lim\limits_{h\to 0} \cos(-h) = 1$ *e* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(1-\cos(-h))}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(1-1)}{h} - \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(x) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(0)}{h} - \operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(x),$$

portanto $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$.

(f) *Temos que* $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x)-f(x-h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^x - e^{x-h}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^x - e^x \cdot e^{-h}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^x(1-e^{-h})}{h}$, *pelo limite* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-e^{-h}}{h} = 1$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^x(1-e^{-h})}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-e^{-h}}{h} = e^x$, *portanto* $f'(x) = e^x$.

(g) *Temos que*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(\frac{x}{x}+\frac{h}{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h},$$

fazendo $h = u \cdot x$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h} = \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+\frac{ux}{x})}{ux} = \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{ux} = \frac{1}{x} \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \frac{1}{x} \lim_{u\to 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}},$$

por $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$, $\frac{1}{x}\ln\left(\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right) = \frac{1}{x}\ln(e) = \frac{1}{x}$, *portanto* $f'(x) = \frac{1}{x}$.

(h) *Temos que*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x - a^{x-h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x\cdot\ln(a)} - e^{(x-h)\cdot\ln(a)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x\cdot\ln(a)} - e^{x\cdot\ln(a)} \cdot e^{-h\cdot\ln(a)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x\cdot\ln(a)}(1-e^{-h\cdot\ln(a)})}{h},$$

pelo limite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-e^{-h\cdot\ln(a)}}{h} = \ln(e^{\cdot\ln(a)}) = \ln(a)$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x\cdot\ln(a)}(1-e^{-h\cdot\ln(a)})}{h} = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1-e^{-h\cdot\ln(a)}}{h} = e^{x\cdot\ln(a)} \cdot \ln(a) = \ln(a)\cdot a^x,$$

portanto $f'(x) = \ln(a)a^x$.

(i) *A regra em que (b) e (c) são resumidas é a regra do produto, a qual não apenas serve para* n *ou* $\frac{1}{n}$ *com* $n \in \mathbb{N}$ *mas também para um* $r \in \mathbb{R}$.

(j) *Isso ocorre pelas funções para (b) e (h) serem bem diferentes, (b) é um* x *elevado a uma constante, enquanto (h) é uma constante elevado a* x *(ou um* $e^{x\cdot C}$, *pois* $a^x = e^{\ln(a)\cdot x}$, *sendo* $C = \ln(a)$*), tanto que a derivada de (b) é* nx^{n-1} *enquanto a de (h) é* $\ln(a)a^x$.

Exercício 21 *Observe que*

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

Agora, considere a sequência $(h_n)_n = \left(\frac{1}{(1/2 + n)\pi}\right)_n$ *e note que*

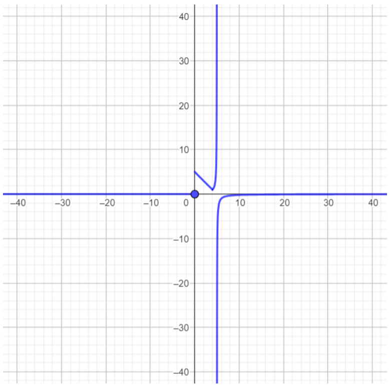
- $h_n \to 0$ *quando* $n \to \infty$.
- $\sin\left(\frac{1}{h_n}\right) = \begin{cases} 1, & \textit{se } n \textit{ par} \\ -1, & \textit{se } n \textit{ ímpar}. \end{cases}$

Logo, $\lim_{h\to 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right)$ *não existe e, consequentemente,* $f'(0)$ *não existe.*

Exercício 22 *(a)* $f'_-(4) = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{5 - (4+h) - 1}{h} = -1.$

$f'_+(4) = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{1/(5-(4+h)) - 1}{h} = 1.$

(b)



(c) f *é descontínua em* $x = 0$ *e em* $x = 5$.

(d) f *não é diferenciável em* $x = 0$ *e em* $x = 5$ *(pois é descontínua nestes pontos) e em* $x = 4$ *(as derivadas laterais são diferentes).*

Exercício 23 *Observe que*

$$h(x) = \begin{cases} -2x - 1, x \leq -2 \\ 3, -2 < x < 1 \\ 2x + 1, x \geq 1 \end{cases}$$

é derivável em $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

Além disso,

$$h'(x) = \begin{cases} -2, x < -2 \\ 0, -2 < x < 1 \\ 2, x > 1. \end{cases}$$

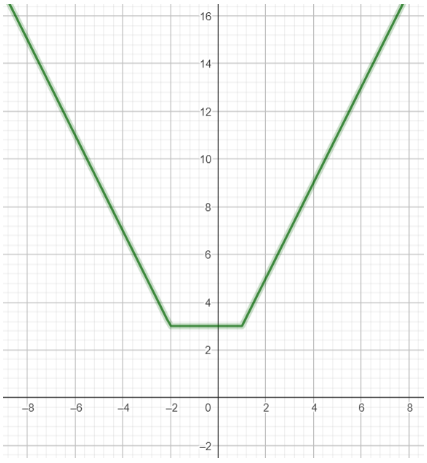


Figura 3: Gráfico de h.

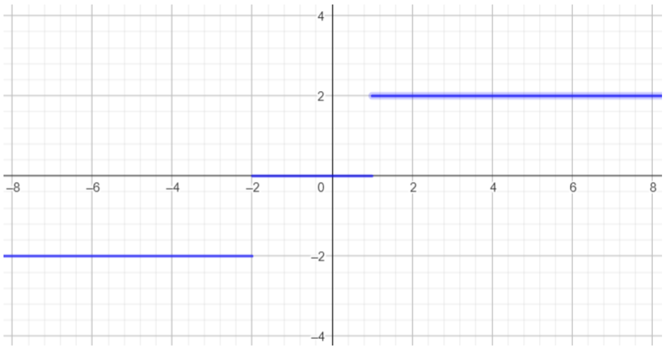


Figura 4: Gráfico de h'.

Exercício 24 (a) $f(t)$ *é uma função constante, portanto sabemos que a* $f'(t) = 0$.

(b) $g(x)$ *é uma subtração de uma função constante com uma polinomial, e sabemos que derivada de uma subtração é a subtração de derivadas, portanto* $g'(x) = \frac{d}{dx}17x - 65 = \frac{d}{dx}17x - \frac{d}{dx}65 = 17 - 0 = 17$.

(c) $H(u)$ *é uma razão das funções* $f(u) = 5u + 1$ *e* $g(u) = 3\sqrt{u}$, *assim podemos descobrir* $H'(u)$ *pela regra do quociente onde* $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, *portanto* $H'(u) = \frac{\frac{d}{du}(5u+1)\cdot(3\sqrt{u})-(5u+1)\frac{d}{du}(3\sqrt{u})}{(3\sqrt{u})^2} = \frac{(5)\cdot(3\sqrt{u})-(5u+1)(\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{u}})}{9u} = \frac{15\sqrt{u}-\frac{15u}{2\sqrt{u}}-\frac{3}{2\sqrt{u}}}{9u} = \frac{\frac{30u-15u-3}{2\sqrt{u}}}{9u} = \frac{\frac{15u-3}{2\sqrt{u}}}{9u} = \frac{\frac{5u-1}{2\sqrt{u}}}{3u} = \frac{\frac{5-\frac{1}{u}}{2\sqrt{u}}}{3} = \frac{5-\frac{1}{u}}{6\sqrt{u}}$.

(d) $u(x)$ *é a soma das funções* $f(x) = x^3$ *e* $g(x) = x$, *portanto* $\frac{du}{dx} = f'(x)+g'(x) = 3x^2+1$.

(e) $f(t)$ *é a soma das funções* $g(t) = t^{1/2}$ *e* $h(t) = k$, *supondo que* k *é uma constante qualquer,* $f'(t) = g'(t) + h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 0 = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, *senão* $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

(f) $g(u)$ *é a soma das funções* $f(u) = u^{-2}$ *e* $h(u) = m$, *supondo que* m *é uma constante qualquer,* $g'(u) = f'(u) + h'(u) = -2u^{-3}$, *senão* $g'(u) = f'(u) + h'(u) = -2u^{-3}$

(g) *Usando a regra da derivada da soma de funções, a da multiplicação de uma função por uma constante, e conhecendo que* $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x = \cos x$ *e* $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$, *temos que* $f'(t) = 2\cos t + \frac{1}{2x}$.

(h) *Conforme as regras anteriores, podemos separar* $y(t)$ *em duas funções mais simples e fazendo* $\frac{1}{t} = t^{-1}$, *com a derivada de potências temos que* $\frac{dy}{dt} = 1 + \frac{2}{t^2}$.

(i) $f(x)$ *é a soma das funções* $g(x) = x^3$ *e uma* $F(x)$, *portanto* $f'(x) = g'(x) + F'(x) = 3x^2 + F'(x)$.

(j) *Conforme as regras anteriores, podemos separar* $h(u)$ *em duas funções mais simples, e sabendo que* $\frac{d}{du}e^u = e^u$, *temos que* $h'(u) = 2F'(u) - 3e^u$.

(k) *Como nas anteriores, podemos separar* $f(x)$ *em funções mais simples de serem derivadas, e conhecendo que* $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen}x$, *temos que* $f'(x) = 3\operatorname{sen}x - 30x^{\frac{-5}{2}}$.

(l) *Para encontrar as derivadas segundas das funções podemos utilizar os mesmos truques e as mesmas regras que em todas as anteriores, o que nos permite a chegar nas seguintes funções:*

  (a) $f'(t)$ *é uma função constante, portanto sabemos que a* $f"(t) = 0$.

  (b) $g'(x)$ *é uma função constante, portanto sabemos que a* $g"(t) = 0$.

  (c) $H'(u) = \frac{5-\frac{1}{u}}{6\sqrt{u}}$, *para encontrar* $H"(x)$ *podemos usar a regra da razão, o que nos permite chegar a* $H"(x) = \frac{(--\frac{1}{u^2})\cdot 6\sqrt{u} - (5-\frac{1}{u})\cdot 6\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}}{(6\sqrt{u})^2} = \frac{(+\frac{1}{u^2})\cdot 6\sqrt{u} - (5-\frac{1}{u})\cdot \frac{3}{\sqrt{u}}}{36u} = \frac{\frac{6\sqrt{u}}{u^2} + \frac{3\frac{1}{u}-15}{\sqrt{u}}}{36u}$.

  (d) $u'(x) = 3x^2$, *portanto* $u"(x) = 6x$.

  (e) *Se* $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, $f"(t) = -\frac{1}{4}t^{-3/2}$, *mas se* $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{dk}{dt}$, $f"(t) = -\frac{1}{4}t^{-3/2}$.

  (f) *Se* $g'(u) = -2u^{-3}$, $g"(u) = 6u^{-4}$, *e se* $g'(u) = -2u^{-3}$, $g"(u) = 6u^{-4}$.

  (g) $f'(t) = 2\cos t + \frac{1}{2x}$, *portanto, após separar e derivar cada função dentro dela,* $f"(t) = -2\operatorname{sen}t - \frac{1}{2}x^{-2}$.

  (h) $\frac{dy}{dt} = 1 + \frac{2}{t^2}$, *portanto* $\frac{d^2y}{dt^2} = -4t^{-3}$.

  (i) $f'(x)3x^2 + F'(x)$, *portanto* $f"(x) = 6x + F"(x)$.

  (j) $h'(u) = 2F'(u) - 3e^u$, *portanto* $h"(u) = 2F"(u) - 3e^u$.

  (k) $f'(x) = 3\operatorname{sen}x - 30x^{\frac{-5}{2}}$, *portanto* $f"(x) = 3\cos x + 45x^{\frac{-7}{2}}$.

(m) *Em (i) descobrimos que* $f'(x)3x^2 + F'(x)$, *portanto,* $f'(2) = 3(2)^2 + F'(2) = 12 + F'(2)$, *pela questão dizer que* $F'(2) = 5$, *concluímos que* $f'(2) = 12 + F'(2) = 17$.

(n) *Se* g *for função diferenciável em* x *então: caso u seja constante em relação a x temos* $f'(x) = g'(x) + \cos(x)$; *ou caso u seja uma função de x temos* $f'(x) = g'(x) + \cos(x) + u'(x)$.

Exercício 25 (a) $f(u) = \frac{6}{u^2} = 6u^{-2}$, *portanto, pela "regra do tombo",* $f'(u) = 6(-2)u^{-2-1} = -12u^{-3} = \frac{-12}{u^3}$.

(b) $f(u) = \frac{6}{u^2}$, *portanto, pela regra do quociente,* $f'(u) = \frac{\frac{d}{du}6u^2 - 2u6}{u^4} = \frac{-12u}{u^4} = \frac{-12}{u^3}$.

(c) *Ambos os métodos coincidem.*

(d) $f(x) = 3^x = e^{\ln 3 \cdot x}$, *portanto, pela regra da cadeia,* $f'(x) = 3^x \ln(3)$. $g(x) = x^3$, *portanto, pela "regra do tombo",* $g'(x) = 3x^2$. *Dessas derivadas se conclui que, por mais que envolvam expoentes e os valores de* x *e* 3, *elas não apenas usam regras de derivação diferentes como tem derivadas distintas.*

Exercício 26 (a) *O limite da velocidade média de* fg *é* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x)g(x) - f(x-h)g(x-h)}{h}$, *que é igual a* $\dfrac{d}{dx}fg(x)$. *Manipulando esse limite temos que*

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x) - f(x-h)g(x-h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x) - f(x-h)g(x-h) + \boxed{(f(x-h)g(x) - f(x-h)g(x))}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)(f(x) - f(x-h)) + f(x-h)(g(x) - g(x-h))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x)(f(x) - f(x-h))}{h} + \frac{f(x-h)(g(x) - g(x-h))}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)(f(x) - f(x-h))}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)(g(x) - g(x-h))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} g(x) \cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x-h) \lim_{h\to 0}\frac{g(x) - g(x-h)}{h} \\
&= g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x) - f(x-h)}{h} + f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x) - g(x-h)}{h} \\
&= \boxed{g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)}.
\end{aligned}
$$

Portanto, para $f(x)$ *e* $g(x)$ *deriváveis em* x, *temos que*

$$\frac{d}{dx}fg(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x) - f(x-h)g(x-h)}{h} = g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x),$$

o que é diferente de $f'(x)g'(x) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$.

(b) *Com regra do produto sendo* $\frac{d}{dx}fg(x) = g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$, *podemos fazer* $f'(x) = \frac{d}{dx}Fg(x) = F'(x)g(x) + F(x)g'(x)$, *por* $F(x) = f/g$ *temos* $f'(x) = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) = F'(x)g(x) + \frac{f(x)}{g(x)}g'(x)$, *isolando o* $F'(x)$ $f'(x) = F'(x)g(x) + \frac{f(x)}{g(x)}g'(x)) \to f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)}g'(x) = F'(x)g(x) \to \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)}g'(x)}{g(x)} = F'(x) \to \frac{\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)}}{g(x)} = F'(x) \to$
$$\boxed{\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = F'(x)}$$

(c) *Temos como* $f(x) = \frac{1}{x^n}$, *usando a regra do quociente, temos que* $f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}1 \cdot x^n - 1 \cdot \frac{d}{dx}x^n}{(x^n)^2} = \frac{0 \cdot x^n - n \cdot x^(n-1)}{x^{2n}} = \frac{-n \cdot x^(n-1)}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = \boxed{-nx^{-n-1}}$, *o que demontra que a mesma regra do 'tombamento' funciona para expoentes negativos.*

(d) *Temos como* $f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$, *usando a regra do quociente, temos que* $f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}\ln x \cdot \ln a - \ln x \cdot \frac{d}{dx}\ln a}{(\ln a)^2} = \frac{\frac{1}{x}\ln a - \ln x \cdot 0}{(\ln a)^2} = \frac{\frac{1}{x}\ln a}{(\ln a)^2} = \boxed{\frac{1}{x \cdot \ln a}}$.

Exercício 27 (a) *Pela regra do produto temos,* $f'(x) = \frac{d}{dx}(2\cos(x) + \operatorname{sen}(x)(x^2 + \log_5(x) + 2x) + (2\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\frac{d}{dx}(x^2 + \log_5(x) + 2x) =$

$$\boxed{(-2\operatorname{sen}(x) + \cos(x)(x^2 + \log_5(x) + 2x) + (2\cos(x) + \operatorname{sen}(x)(2x + \frac{1}{x\ln 5} + 2)}.$$

(b) *Temos* $f(x) = \operatorname{senh}x \cdot \tan x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$, *pela regra do produto temos* $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \cdot \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\frac{d}{dx}\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen}x \cdot - \operatorname{sen}x}{\cos^2 x}\right) \to \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \to f'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \cdot \sec^2 x = \boxed{\cosh x \tan x + \operatorname{senh}x \sec^2 x}$.

(c) *Temos* $f(x) = \operatorname{sen}x \ln x(e^x + 1) = \operatorname{sen}x(\ln x(e^x + 1))$, *usando a regra do produto temos* $f'(x) = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}x(\ln x(e^x + 1)) + \operatorname{sen}x\frac{d}{dx}(\ln x(e^x + 1)) =$

$$\boxed{\cos x(\ln x(e^x + 1)) + \operatorname{sen}x\left(\frac{1}{x}(e^x + 1) + \ln x \cdot e^x\right)}.$$

(d) *Usando a regra do quociente temos* $f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}x + 1)(\ln x + 2^x + 2^3 + k) - (\operatorname{sen}x + 1)\frac{d}{dx}(\ln x + 2^x + 2^3 + k)}{(\ln x + 2^x + 2^3 + k)^2} =$

$$\boxed{\frac{\cos x(\ln x + 2^x + 2^3 + k) - (\operatorname{sen}x + 1)(\frac{1}{x} + \ln 2 \cdot 2^x)}{(\ln x + 2^x + 2^3 + k)^2}}.$$

(e) *Usando a regra do quociente temos* $f'(x) = -\frac{\frac{d}{dx}(2\cos x)(x^2 + \frac{1}{2}x + 1) - (2\cos x)\frac{d}{dx}(x^2 + \frac{1}{2}x + 1)}{(x^2 + \frac{1}{2}x + 1)^2} = -\frac{-2\operatorname{sen}x(x^2 + \frac{1}{2}x + 1) - 2\cos x(2x + \frac{1}{2})}{(x^2 + \frac{1}{2}x + 1)^2} =$

$$\boxed{\frac{2\operatorname{sen}x(x^2 + \frac{1}{2}x + 1) + 2\cos x(2x + \frac{1}{2})}{(x^2 + \frac{1}{2}x + 1)^2}}.$$

(f) *Usando a regra do quociente temos* $f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}((x^3 + 7)\cos x)(x^2(\operatorname{sen}x + 1)) - ((x^3 + 7)\cos x)\frac{d}{dx}(x^2(\operatorname{sen}x + 1))}{(x^2(\operatorname{sen}x + 1))^2} =$

$$\boxed{\frac{((3x^2)\cos x + (x^3 + 7) \cdot -\operatorname{sen}x)(x^2(\operatorname{sen}x + 1)) - ((x^3 + 7)\cos x)(2x(\operatorname{sen}x + 1) + x^2(\cos x))}{(x^2(\operatorname{sen}x + 1))^2}}.$$

Exercício 28 *Para* $\operatorname{senh}x$ *temos* $\frac{d}{dx}\operatorname{senh}x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \cosh x$, *e para* $\cosh x$ *temos* $\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \operatorname{senh}x$.

Exercício 29 $\lim_{x \to \infty} \operatorname{senh}x = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \infty$.

Exercício 30 (a) $f'(x) = \frac{d}{dx}\cos^6(x) = 6(\cos(x))^5 \cdot \frac{d}{dx}\cos = 6\cos^5(x) \cdot -\sin(x) = -6\cos^5(x)\sin(x)$.

(b) $f'(v) = \frac{d}{dv}(17v-5)^1000 = 1000(17v-5)^{999} \cdot \frac{d}{dv}(17v-5) = 1000(17v-5)^{999} \cdot 17 = 17000(17v-5)^{999}$.

(c) $f'(z) = \frac{d}{dz}(1+\sqrt{z})^2 = 2(1+\sqrt{z}) \cdot \frac{d}{dz}(1+\sqrt{z}) = (1+\sqrt{z}) \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1+\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$.

(d) $f'(t) = \frac{d}{dt}[(1+\frac{1}{t})^{-1}+1]^{-1} = -1 \cdot ((1+\frac{1}{t})^{-1}+1)^{-2} \cdot \frac{d}{dt}((1+\frac{1}{t})^{-1}+1) = -((1+\frac{1}{t})^{-1}+1)^{-2} \cdot (-(1+\frac{1}{t})^{-2} \cdot (-\cdot t^{-2})+0) = -(\frac{t}{t+1}+1)^{-2} \cdot (-(\frac{t}{t+1})^2 \cdot (-\cdot t^{-2})) = -(\frac{2t+1}{t+1})^{-2} \cdot -(\frac{t}{t+1})^2 \cdot (-\cdot t^{-2}) = -(\frac{t+1}{2t+1})^2 \cdot -(\frac{t}{t+1})^2 \cdot (- \cdot t^{-2}) = -\frac{(t+1)^2}{(2t+1)^2} \cdot -\frac{t^2}{(t+1)^2} \cdot -\frac{1}{t^2} = -\frac{1}{(2t+1)^2}$.

(e) $f'(x) = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(9x+4) = \cos(9x+4) \cdot \frac{d}{dx}(9x+4) == 9\cos(9x+4)$.

(f) $f'(x) = \frac{d}{dx}\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{-1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$.

(g) $f'(x) = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}((2x+3)^4) = \cos((2x+3)^4)\frac{d}{dx}(2x+3)^4 = 8(2x+3)^3\cos((2x+3)^4)$.

(h) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) + \sqrt{\operatorname{sen}(x)}\right) = \cos\left(\sqrt{x}\right) \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)}} \cdot \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x) = \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} + \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$.

(i) $\frac{d}{dx}y = 3\left(\frac{x^2+x}{\operatorname{sen}x+x^3}\right)^2 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+x}{\operatorname{sen}x+x^3}\right) = 3\left(\frac{x^2+x}{\operatorname{sen}x+x^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{(2x+1)(\operatorname{sen}x+x^3)+(x^2+x)(\cos x+3x^2)}{(\operatorname{sen}x+x^3)^2}\right)$.

(j) $\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}x+x+1+x^3}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}x+x+1+x^3\right)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}(\operatorname{sen}x+x+1+x^3)^{-\frac{4}{3}} \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}x+x+1+x^3) = -\frac{1}{3}(\operatorname{sen}x+x+1+x^3)^{-\frac{4}{3}} \cdot (\cos x+1+0+3x^2) = -\frac{1}{3}(\operatorname{sen}x+x+1+x^3)^{-\frac{4}{3}} \cdot (\cos x+3x^2+1)$.

(k) $\frac{d}{dx}y = \cos(\tan(e^x)) \cdot \frac{d}{dx}\tan(e^x) = \cos(\tan(e^x)) \cdot \sec^2(e^x) \cdot \frac{d}{dx}e^x = \cos(\tan(e^x)) \cdot \sec^2(e^x) \cdot e^x$.

(l) $h'(x) = f'(2x) \cdot \frac{d}{dx}2x + \cos(g(x)) \cdot \frac{d}{dx}g(x) = f'(2x) \cdot 2 + \cos(g(x)) \cdot g'(x)$.

Exercício 31 *Para conhecer se é possível diferenciar $f(x)$ para $x \neq 2$ podemos verificar que $f(x)$ é continuo para esses valores, o que é verdade pelas funções $x\operatorname{sen}(\pi x)$, para $x \in (-\infty, 2]$, e $(x^2+1)\cos(\pi x)$, para $x \in (2, +\infty)$, serem continuas dentro dos seus domínios.*

Agora para saber se $f(x)$ é diferenciável em $x = 2$ o $\lim_{x\to 2}\frac{f(2)-f(x)}{x-2}$ tem que existir e para ele existir $\lim_{x\to^- 2}\frac{f(2)-f(x)}{x-2} = \lim_{x\to^+ 2}\frac{f(2)-f(x)}{x-2}$. O $\lim_{x\to^- 2}\frac{f(2)-f(x)}{x-2}$ é o limite para $x < 2$, e portanto $\lim_{x\to^- 2}\frac{f(2)-f(x)}{x-2} = \frac{d}{dx}x\operatorname{sen}(\pi x) = \operatorname{sen}(\pi x) + x\cos(\pi x) \cdot \pi$, fazendo $x = 2$, $\lim_{x\to^- 2}\frac{f(2)-f(x)}{x-2} = 2\pi$. Já o $\lim_{x\to^+ 2}\frac{f(2)-f(x)}{x-2}$ é o limite para $x > 2$, e assim $\lim_{x\to^+ 2}\frac{f(2)-f(x)}{x-2} = \frac{d}{dx}(x^2+1)\cos(\pi x) = (2x)\cos(\pi x) + (x^2+1)\operatorname{sen}(\pi x)\pi$, fazendo $x = 2$, $\lim_{x\to^+ 2}\frac{f(2)-f(x)}{x-2} = 4$. Com isso podemos conferir que os limites laterais não tem valores iguais, e que portanto $f(x)$ não é diferenciável em $x = 2$.

Exercício 32 (a) $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{3+\operatorname{sen}^2(x)}$

(b) $\frac{e^{x^3}\left(3x^2\left(x^2+1\right)-2x\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$

(c) $\frac{1-\operatorname{sen}(x)}{x+\cos(x)}$

(d) $\frac{\left(e^{3x}+7\right)^2\left(x\left(2x^2+3\right)(3x+5)^6+18x^2(3x+5)^5\left(x^2+3\right)\right)-2e^{3x}x^2\left(e^{3x}+7\right)(3x+5)^6\left(x^2+3\right)}{(x^2)^{\frac{1}{2}}\left((e^{3x}+7)^2\right)^{\frac{4}{3}}(x^2+3)^{\frac{1}{2}}}$

(e) $\frac{5}{x\ln(2)}$

(f) $-\frac{12\ln(a)}{(a^{3x}-a^{-3x})^2}$

(g) $\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+3)}$

(h) $\frac{e^{5x-2}\left(5e^{5x-2}-5e^{-5x+2}\right)}{e^{10x-4}+1}$

(i) $\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

Exercício 33 (a) $\frac{1}{4\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\sqrt{x+1}}$

(b) $2xe^{x^2}$

(c) $2e^{2x}\ln\left(x\operatorname{sen}(x)+\frac{e^{-x}}{x^5+1}\right)+\frac{e^{2x}\left(\operatorname{sen}(x)\left(x^5+1\right)^2+x\cos(x)\left(x^5+1\right)^2-e^{-x}\left(x^5+1\right)-5e^{-x}x^4\right)}{(x^5+1)(x\operatorname{sen}(x)(x^5+1)+e^{-x})}$

(d) $\frac{e^{x^3}\left(3x^2\left(x^2+1\right)-2x\right)}{(x^2+1)^2}$

Exercício 34 *a) Denotemos* $F(x) = (f(x)-\operatorname{sen}(x))^2+(g(x)-\cos(x))^2$, $x\in\mathbb{R}$. *Logo, observamos que*

$$\begin{aligned}F(x) &= (f(x))^2+(g(x))^2-2f(x)\operatorname{sen}(x)-2g(x)\cos(x)+\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)\\ &= (f(x))^2+(g(x))^2-2f(x)\operatorname{sen}(x)-2g(x)\cos(x)+1.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}F'(x) &= 2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)-2\left(f'(x)\operatorname{sen}(x)+f(x)\cos(x)\right)-2\left(g'(x)\cos(x)-g(x)\operatorname{sen}(x)\right)\\ &= 2f(x)g(x)-2f(x)g(x)-2(\operatorname{sen}(x)g(x)+f(x)\cos(x))-2(-f(x)\cos(x)-g(x)\operatorname{sen}(x))\\ &= 0,\end{aligned}$$

onde $x\in\mathbb{R}$. *Mas lembre-se que decorre do Teorema do Valor Médio que se uma função tem derivada nula em* $\mathbb{R}$, *então ela é constante em* $\mathbb{R}$ *(deve ter visto isto nas aulas, caso contrário não é difícil provar). Portanto,* F *é constante, isto é,* $F(x)=C$, $x\in\mathbb{R}$ *com* C *sendo uma constante real. Mas como* $f(0)=0$ *e* $g(0)=1$, *logo*

$$C=F(0)=0+(1-1)^2=0.$$

Portanto, $F(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$, *isto é,* $(f(x)-\operatorname{sen}(x))^2+(g(x)-\cos(x))^2=0$, *para todo* $x\in\mathbb{R}$.
b) Do item a), vamos ter que $(f(x)-\operatorname{sen}(x))^2=-(g(x)-\cos(x))^2$, *para* $x\in\mathbb{R}$. *Mas isto por propriedade dos números reais só pode acontecer se somente se* $(f(x)-\operatorname{sen}(x))^2=0$ *e* $(g(x)-\cos(x))^2=0$. *Assim,* $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ *e* $g(x)=\cos(x)$, *para todo* $x\in\mathbb{R}$.

Exercício 35 (a) *Vamos tomar* $\alpha = sec(x\sqrt{x^2+\sqrt{x}}+1)$. *Assim, fazendo* $f'(x) = \dfrac{d(tg(\alpha))}{dx} = \dfrac{d(tg(\alpha))}{d\alpha}\dfrac{d\alpha}{dx} = sec^2(\alpha)\dfrac{d\alpha}{dx}$. *(I)*

Como $\alpha = sec(x\sqrt{x^2+\sqrt{x}}+1)$, *vamos fazer* $\beta = x\sqrt{x^2+\sqrt{x}}+1$. *Assim,* $\dfrac{d(sec(\beta))}{dx} = \dfrac{d(sec(\beta))}{d\beta}\dfrac{d\beta}{dx} = sec(\beta)tg(\beta)\dfrac{d\beta}{dx}$. *(II)*

Como $\beta = x\sqrt{x^2+\sqrt{x}}+1$, *teremos que* $\dfrac{d\beta}{dx} = \dfrac{8x^2+5\sqrt{x}}{4\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}$. *(III)*

Substituindo (III) em (II): $\dfrac{d\alpha}{dx} = sec(x\sqrt{x^2+\sqrt{x}}+1)tg(x\sqrt{x^2+\sqrt{x}}+1)\dfrac{8x^2+5\sqrt{x}}{4\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}$. *(IV)*

Substituindo (IV) em (I):
$f'(x) = sec^2(sec(x\sqrt{x^2+\sqrt{x}}+1))sec(x\sqrt{x^2+\sqrt{x}}+1)tg(x\sqrt{x^2+\sqrt{x}}+1)\dfrac{8x^2+5\sqrt{x}}{4\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}$.

(b) $\frac{-2x\,\text{cotg}(x^2+4)}{\text{sen}(x^2+4)}$

(c) $\frac{\sec\left(\sqrt{x-1}\right)\tan\left(\sqrt{x-1}\right)}{2\sqrt{x-1}}$

(d) $2\sec^5(x)\tan(x) + 3\sec^3(x)\tan^3(x)$

(e) $\frac{\left(3x^2\sec(x)\tan(x)+\left(-\sec(x)+2\sec^3(x)\right)x^3\right)\left(x^2+1\right)\cos(x)-\left(2x\cos(x)-\text{sen}(x)\left(x^2+1\right)\right)x^3\sec(x)\tan(x)}{\left((x^2+1)\cos(x)\right)^2}$

(f) $-3\csc^2(x)\,\text{cotg}^2(x)$

(g) $\cosh^2(x) + \text{senh}^2(x)$

(h) $\frac{3e^{3x}}{e^{6x}+1}$

(i) $\frac{2e^{\sec\left(x^2\right)}x^2\sec\left(x^2\right)\tan\left(x^2\right)-e^{\sec\left(x^2\right)}}{x^2}$

(j) $\frac{1}{\arctan(-2x+1)(2x^2-2x+1)}$

(k) $3\ln(2)\cdot 8^x\,\text{arcsen}(4x) + \frac{2^{2+3x}}{\sqrt{1-16x^2}}$

(l) $\frac{\log_{10}(x)-1}{x} + \frac{\ln(2x)}{x\ln(10)}$

(m) $-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x\ln(2)} - \frac{1-\ln(x)}{x^2\ln(2)}$

(n) $\frac{6}{72x^2-84x+25}$

(o) $-\frac{\sqrt{x^2}}{x^2\sqrt{-8x^2-6x-1}}$

(p) $-\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$

Exercício 36 *Aplicando a regra da cadeia, concluímos*

$$\frac{dx}{dt} = -\omega\,\mathrm{sen}(\omega t), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\cos(\omega t),$$

assim,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = -\omega^2\cos(\omega t) + \omega^2\cos(\omega t) = 0.$$

Exercício 37 *Como* $g'(x)$ *existe, derivamos dos dois lado de* $f(g(x)) = x$ *e aplicamos a regra da cadeia, logo* $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x) = 1$. *Dessa forma,* $\dfrac{1}{g(x)}g'(x) = 1$ *o que implica* $g(x) = g'(x)$.

Exercício 38 *(a) Como* $(x^2-1)^3 = X^6 - 3x^4 + 3x^2 + 1$ *as derivadas não nulas são* $f(x) = (x^2-1)^3$, $f'(x) = 6x^5 - 12x^3 + 6x$, $f''(x) = 30x^4 - 36x^2 + 6$, $f'''(x) = 120x^3 - 72x$, $f^{(4)}(x) = 360x^2 - 72$, $f^{(5)}(x) = 720x$, $f^{(6)}(x) = 720$.

(b) $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$. *Portanto,* $f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$.

(c) Derivando uma vez, $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, *novamente* $f''(x) = 12x^2 - 6x - 12$. *Assim,* $f''(2) = 48 - 24 = 24$ *é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de* f' *no ponto* $(2, 3)$. *Logo,* $3 = 24 \cdot (2) + b$ *o que implica* $b = -45$. *Portanto, a reta tangente é* $y = 24x - 45$.

(d) Basta aplicar a regra da cadeia. $D_x^2 y = f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x)$

Exercício 39 (a) *Como* $f(x) > 0$, *então* $\ln(f(x)) = \cos(x^2) \cdot \ln(e^{2x} + 7)$, *logo* $f(x) = e^{\cos(x^2)\cdot\ln(e^{2x}+7)}$. *Daí,* $f'(x) = e^{\cos(x^2)\cdot\ln(e^{2x}+7)} \cdot [\cos(x^2) \cdot \ln(e^{2x} + 7)]' = (e^{2x} + 7)^c os(x^2) \cdot [\cos(x^2) \cdot \ln(e^{2x} + 7)]'$. *Portanto,*

$$f'(x) = \left(-2x\sin\left(x^2\right)\ln\left(e^{2x}+7\right) + \frac{2e^{2x}\cos\left(x^2\right)}{e^{2x}+7}\right)\left(e^{2x}+7\right)^{\cos\left(x^2\right)}.$$

(b) *Novamente* $f(x) > 0$. *Assim,* $\ln(f(x)) = \ln(x^2 e^{\sqrt{2x}}) = 2\ln(x) + \sqrt{2x}$. *Derivando ambos os lados, obtemos* $\dfrac{1}{f(x)}f'(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$. *Logo,*

$f'(x) = f(x) \cdot \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}\right) = 2xe^{\sqrt{2x}} + \frac{e^{\sqrt{2x}}\sqrt{x^3}}{\sqrt{2}}$

(c) *Raciocínio análogo* $x^{x^{x^x}}\left(x^{x^x}\ln(x)\left(x^x\ln(x)(\ln(x)+1) + x^{x-1}\right) + x^{x^x-1}\right)$.

Exercício 40 (a) $\dfrac{d}{dx}\cos^2(x+y) = 0$, *logo* $-2\cos(x+y)\mathrm{sen}(x+y)(1 + \dfrac{dy}{dx}) = 0$, *logo* $\dfrac{dy}{dx} = -1$, *assim como* $\dfrac{dx}{dy} = -1$.

(b) *De um lado,* $\dfrac{d}{dx}y^3 = 3y^2\dfrac{dy}{dx}$. *Por outro lado,* $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right) = \dfrac{(1-\frac{dy}{dx})(x+y)-(1+\frac{dy}{dx})(x-y)}{(x+y)^2}$.

Logo, $3y^2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y-2x\frac{dy}{dx}}{(x+y)^2}$. *Isolando,* $\dfrac{dy}{dx}$ *temos*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{3y^2\left(y+x\right)^2+2x}.$$

Analogamente,

$$\frac{dx}{dy} = 3y^2 + \frac{2x}{(x+y)^2}.$$

(c) *Primeiramente,* $\dfrac{d}{dx}(y^2-9)^4 = 8y(y^2-9)^3\dfrac{dy}{dx}$. *Por outro lado,* $\dfrac{d}{dx}(4x^2+3x+1)^2 = 2(4x^2+3x+1)(8x+3)$. *Assim,* $8y(y^2-9)^3\dfrac{dy}{dx} = 2(4x^2+3x+1)(8x+3)$. *Isolando* $\dfrac{dy}{dx}$, *obtemos*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4x^2+3x+1)(8x+3)}{4y(y^2-9)^3}.$$

Agora,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{8y(y^2-9)^3}{64x^3+72x^2+10x-3}.$$

(d) *Derivando em relação* x, *temos*

$3x^2+2xy+x^2\dfrac{dy}{dx}-2y^2-2xy\dfrac{dy}{dx}+3y^2\dfrac{dy}{dx}$. *Isolando,* $\dfrac{dy}{dx}$ *temos*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2-2xy+2y^2}{x^2-4xy+3y^2}.$$

Analogamente,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-x^2+4xy-3y^2}{3x^2+2x-2y^2}.$$

(e) *Derivando em relação a* x *temos,* $\cos(xy)\dfrac{d}{dx}(xy) + \dfrac{dy}{dx} - 2x = 0$. *Assim,*

$\cos(xy)\left(y + x\dfrac{dy}{dx}\right) + \dfrac{dy}{dx} - 2x = 0$. *Isolando,* $\dfrac{dy}{dx}$ *temos*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y\cos(xy)}{x\cos(xy)+1}.$$

Analogamente,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x\cos(xy)-1}{y\cos(xy)-2x}.$$

(f) *Derivando em relação a* x*, temos* $y + x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y}{x}$*. Analogamente,* $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{-x}{y}$.

(g) *Obtemos,* $\operatorname{arctg}(x) + \dfrac{x}{x^2+1} + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$*, logo*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x - \arctan(x)\left(x^2+1\right)}{2y\left(x^2+1\right)}.$$

(h) *Derivando em relação a* x *temos,* $\dfrac{1}{\sqrt{2x+y}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2x+y}}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+2y}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+2y}}\dfrac{dy}{dx} = 0$*. Logo,*
$\dfrac{dy}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x+y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2y}}\right) = \dfrac{-2}{\sqrt{2x+y}} - \dfrac{-1}{\sqrt{x+2y}}$*. Isolando* $\dfrac{dy}{dx}$*,*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{-2}{\sqrt{2x+y}} + \dfrac{-1}{\sqrt{x+2y}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2x+y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2y}}}.$$

(i) *Temos,* $\cosh(x^2y)\dfrac{d}{dx}(x^2y) + \operatorname{senh}(y^2 - \cos(xy))\dfrac{d}{dx}(y^2 - \cos(xy)) = 0$*. Fazendo as contas,*
$\cosh(x^2y)(2xy + x^2\dfrac{dy}{dx}) + \operatorname{senh}(y^2 - \cos(xy))(2y\dfrac{dy}{dx} + y\operatorname{sen}(xy) + x\operatorname{sen}(xy)\dfrac{dy}{dx}) = 0$
$\dfrac{dy}{dx}(x^2\cosh(x^2y) + 2y\operatorname{senh}(y^2 - \cos(xy)) + \operatorname{senh}(y^2 - \cos(xy)x\operatorname{sen}(xy))) = -2xy\cosh(x^2y) - y\operatorname{sen}(xy)\operatorname{senh}(y^2 - \cos(xy))$*. Portanto,*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2yx\cosh\left(yx^2\right) + y\operatorname{sen}(yx)\operatorname{senh}\left(y^2 - \cos(yx)\right)}{x^2\cosh\left(yx^2\right) + 2y\operatorname{senh}\left(y^2 - \cos(yx)\right) + x\operatorname{sen}(yx)\operatorname{sen}\left(y^2 - \cos(yx)\right)}.$$

Exercício 41 *Isolando* y *da expressão* $4x^2 + 9y^2 = 40$*, temos* $y = \dfrac{\pm\sqrt{40-4x^2}}{3}$*. Logo,*
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{8x}{6\sqrt{40-4x^2}} = \pm\dfrac{2x}{3\sqrt{10-x^2}}$*. Queremos, pontos da elipse no qual a reta tangente tenha coeficiente angular* $\dfrac{-2}{9}$*. Logo,*
$\pm\dfrac{2x}{3\sqrt{10-x^2}} = \dfrac{-2}{9}$*, o que implica,* $\pm\dfrac{x}{\sqrt{10-x^2}} = \dfrac{-1}{3}$*. Elevando ao quadrado e multiplicando em cruz temos,*

$9x^2 = 10 - x^2$*, dessa forma* $10x^2 = 10$ *então* $x = \pm 1$*. Os valores de* $y = \pm 2$*. Como queremos, retas tangentes e com mesmo coeficiente angular, elas são paralelas. Os pontos em questão devem ser simétricos em relação a origem do plano (centro da elipse), logo* $(1,2)$ *e* $(-1,-2)$*. Basta, substituir na equação da reta* $y = -\dfrac{2}{9}x + b$ *em ambos os pontos, obtendo assim*

$2+\frac{2}{9}=b_0$, *ou seja,* $b_0=\frac{20}{9}$, *uma reta é* $y_1=-\frac{2}{9}+\frac{20}{9}$. *Para a outra reta,* $-2=\frac{2}{9}+b_1$, *então* $b_1=-\frac{20}{9}$. *Portanto, as retas tangentes são* $y=\frac{-2}{9}x\pm\frac{20}{9}$.

Exercício 42 *Considerando as variáveis* $x=x(t)$ *e* $y=t(t)$ *como funções de* t *e utilizando a regra da cadeia para derivar a equação* $x^2+4y^2=1$ *em relação a variável* t, *teremos*

$$\frac{d(x^2+4y^2)}{dt}=\frac{d}{dt}1 \implies 2\cdot x\cdot\frac{dx}{dt}+4\cdot 2\cdot y\cdot\frac{dy}{dt}=0$$

Substituindo $\frac{dx}{dt}=\operatorname{sen}(4t)$ *na equação a cima, teremos,*

$$2x\operatorname{sen}(4t)+8y\frac{dy}{dt}=0 \implies \frac{dy}{dt}=\frac{-x\operatorname{sen}(4t)}{4y}$$

Exercício 43 *Aplicando a regra da cadeia à função* $f(f^{-1}(x))=x$, *teremos*

$$f'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1}(x))'=1 \implies (f^{-1}(x))'=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Exercício 44 *a) Derivando implicitamente a seguinte identidade trigonométrica*

$$\operatorname{sen}(\cos^{-1}(x))=\sqrt{1-x^2},$$

teremos

$$\cos(\cos^{-1}(x))\cdot(\cos^{-1}(x))'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \implies (\cos^{-1}(x))'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

O domínio da função é o intervalo aberto $(-1,1)$.

b) Considerando a função $\cos(x)$, *pelo exercicio 43, teremos*

$$(\cos^{-1})'(x)=\frac{1}{\cos\prime(\cos^{-1}(x))}.$$

Sendo $\cos\prime(x)=-\operatorname{sen}(x)$ *e utilizando a igualdade trigonometrica* $\operatorname{sen}(\cos^{-1}(x))=\sqrt{1-x^2}$, *teremos*

$$(\cos^{-1})'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercício 45 *Derivando* $x^3f(x)^2+\cos(\sqrt{(}f(x)))=x$ *implicitamente teremos*

$$2x^3f(x)f'(x)-\frac{f\prime(x)\sin(\sqrt{f(x)})}{2\sqrt{f(x)}}+3x^2f(x)^2=1.$$

Isolando $f'(x)$, *teremos*

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{f(x)}-6x^2f(x)^{\frac{5}{2}}}{4x^3f(x)^{\frac{3}{2}}-\operatorname{sen}(\sqrt{f(x)})}.$$

Exercício 46 *Temos que calcular*

$$\lim_{y\to q}\frac{g(y)-g(q)}{y-q}.$$

Como f *é bijetora, então existem únicos* x, p *tais que* $f(x) = y$ *e* $f(p) = q$*, ou seja,* $g(y) = x$ *e* $g(q) = p$*. Note ainda que* f *é contínua, então quando* $y \to q$*, vem* $x \to p$ *(pois se* $x \to p'$*, temos* $y = f(x) \to f(p')$*, logo,* $f(p') = q = f(p)$*, portanto,* $p = p'$*). Ainda, como estamos assumindo* $y \neq q$ *para o cálculo do limite, temos* $x \neq p$*. Portanto, fazendo a mudança* $x = g(y)$*, obtemos*

$$\lim_{y\to q}\frac{g(y)-g(q)}{y-q} = \lim_{x\to p}\frac{x-p}{f(x)-f(p)} = \lim_{x\to p}\frac{1}{\frac{f(x)-f(p)}{x-p}} = \frac{1}{f'(p)} = \frac{1}{f'(g(q))}.$$

Portanto, g *é diferenciável e*

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1+e^{g(x)}}.$$

Em particular, como $f(0) = 1$*, então* $g(1) = 0$*, logo,*

$$g'(1) = \frac{1}{1+e^{g(1)}} = \frac{1}{1+e^{0}} = 1.$$

Diferenciando a expreção encontrada para g' *temos que*

$$g''(x) = -\frac{g'(x)e^{g(x)}}{(1+e^{g(x)})^2},$$

então

$$g''(1) = -\frac{g'(1)e^{g(1)}}{(1+e^{g(1)})^2} = -\frac{1\cdot e^0}{(1+e^0)^2} = -\frac{1}{4}.$$

Exercício 47 (a) *Vamos mostrar que a função adimite uma inversa provando que ela é bijetora, isto é injetora e sobrejetora. Para a injetividade, note que a função é estritamente crecente. De fato,*

$$\frac{d(x+x^3)}{dx} = 3x^2+1$$

Como $3x^2+1>0$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$*, temos que a função é estritamente crecente.*

Para a sobrejetividade, vamos calcular os seguintes limites

$$\lim_{x\to-\infty}(x+x^3) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty}(x+x^3) = \infty.$$

Como f *é contínua, segue do Teorema do Valor Intermediário que* f *é sobrejetora. Portanto,* g *admite função inversa* g*.*

(b) *Utilizando o resultado obtido no exercício 43, teremos* $g'(x) = \frac{1}{1+3g(x)^2}$*.*

(c) *Como* $f(0) = 0$ *temos que* $g(0) = 0$ *portanto*

$$g'(0) = \frac{1}{1 + 3 \cdot 0^2} = 1.$$

Exercício 48 *Derivando ambos os lados de* $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ *em relação a* x, *temos* $\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0$. *Logo,* $y' = -(y/x)^{1/3}$.

No ponto $(-3\sqrt{3}, 1)$, *temos* $y' = 1/\sqrt{3}$. *Portanto, a reta procurada é* $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 4$.

Exercício 49 *Aplicando* $\ln$ *em ambos os lados de* $y = x^x$, *temos que* $\ln y = x \ln x$. *Agora, derivando ambos os lados da igualdade anterior, obtemos* $\frac{y'}{y} = \ln x + 1$. *Logo,* $y' = x^x(\ln x + 1)$.

Exercício 50 *(a)* $u'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 0$.

(b) $v'(5) = \frac{f'(5)g(5) - f(5)g'(5)}{g(5)^2} = \frac{(-1/3) \cdot 2 - 3 \cdot 2/3}{2^2} = -\frac{2}{3}$.

Exercício 51 *Sejam* b = *base do triângulo e* h = *altura do triângulo, temos que* $b = 20 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ *e* $h = 10 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$. *Portanto,*

$$A(\theta) = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 50\pi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

e

$$B(\theta) = \frac{b \cdot h}{2} = 100 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Consequentemente,

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{50\pi \sin^2(\theta/2)}{100 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} = \frac{\pi}{2} \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = 0.$$

Exercício 52 *(a)* $h'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'(2) \cdot 6 = 30$.

(b) $H'(1) = g'(f(1))f'(1) = g'(3) \cdot 4 = 36$.

Exercício 53 *Note que*

- *Área do triângulo* $(A) = h^2 m^2$.
- *Volume* $(V) = 6 \cdot A = 6h^2 m^3$.
- $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$.

Portanto,

$$1,2 = 12h \cdot \frac{dh}{dt}$$
$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = 0,333m/min.$$