Lista de Exercícios Módulo 4 de SMA0301-Cálculo I

Máximos, mínimos e pontos de inflexão

Exercício 1 *(a) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e seja derivável em 2.*
(b) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e seja contínua, mas não derivável em 2.
(c) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e não seja contínua em 2.

Exercício 2 *(i) Descreva os passos do método para encontrar máximo e mínimo globais para função contínua em intervalo fechado.*

(ii) Determine o máximo e mínimo global nos intervalos fixados das seguintes funções. Use o método da função contínua no intervalo fechado. Note que aqui, neste método, não se analisa sinal de derivada.

(a) $f(x) = \dfrac{2x^2+4x}{2+x^2}$ *no intervalo* $[-1,5]$;

(b) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$ *no intervalo* $[-1,1]$;

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$ *no intervalo* $[0,1]$;

(d) $f(x) = x \ln x$ *no intervalo* $[1/3, 2]$;

(iii) Sobre o item (b), $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$, *responda:*

(b1) Nos pontos de máximo e mínimo é sempre verdade que a derivada é zero? Ou seja, é sempre ponto crítico? Explique;

(b2) Se o intervalo fosse $[-1,2]$, f *teria máximo e mínimo globais? Quais seriam? Em quais pontos ocorrem?*

(b3) Mude o intervalo para que o máximo e mínimo globais não tenham derivadas nulas.

Exercício 3 *(i) Defina ponto crítico de* $f(x)$.
(ii) Dê exemplo simples de uma $f(x)$ *onde o ponto crítico não é máximo e nem mínimo.*
(iii) Enuncie o teste da derivada primeira.
(iv) Quais as definições de máximos e mínimos globais (ou seja, absolutos) e máximos e mínimos locais (ou seja, relativos)?
(v) Para cada uma das funções f *abaixo, determine os pontos de máximo e de mínimos locais (relativos) e os intervalos onde ela é crescente ou decrescente:*

a) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$ b) $f(x) = \cos(x) - \cos^2(x)$ c) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-4)^{1/3}}$

d) $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ e) $f(x) = \ln(x^2+2)$

Exercício 4 *(i) Defina ponto de inflexão. O que concavidade tem a ver com a derivada segunda de f? Explique.*
(ii) Em cada um dos itens do Exercício 3 determine os pontos de inflexão e analise a concavidade.

Exercício 5
(a) Mostre que para todo $a, b > 0$ *temos que* $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. *Sugestão: use o fato que se* $f'(x) = 0$ *num intervalo, então* f *éconstante nesse intervalo.*
(b) Pode existir uma função diferenciável, não constante, tal que $f'(x) = 0$ *para todo* x *no seu domínio?*
(c) Mostre que a função $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, *onde* $a, b, c \in R$ *são constantes fixadas, não tem máximo ou mínimo se, e somente se,* $a^2 \leq 3b$.
(d) Determine as constantes $a, b \in R$ *de tal modo que a função do item (c) acima tenha como pontos críticos* $x = -2$ *e* $x = 3$. *Neste caso, em qual deles* f *terá um máximo?*

Exercício 6
(a) Mostre que os zeros da função $f(x) = \text{sen}(x)$ *são seus únicos pontos de inflexão.*
(b) Dê condições sobre a, b, c *e* d *para que o gráfico de* $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$:

(i) não tenha ponto de inflexão;
(ii) tenha um único ponto de inflexão;
(iii) tenha, exatamente, dois pontos de inflexão.

Esboço de Gráficos

Exercício 7 *Utilizando as técnicas do Cálculo Diferencial, faça um esboço do gráfico das seguintes funções:*

a) $f(x) = x^{1/5} - 1$ b) $f(x) = 8x^{1/3} + x^{4/3}$ c) $f(x) = \text{sen}(x) + \cos(x)$

d) $f(x) = e^{1/x}$ e) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 - 9}$ f) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{2x - 1}$

Note que utilizando os passos do exercício 11, você deixará os gráficos mais precisos.

Exercício 8 *Determine* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, *esboce o gráfico e identifique as assíntotas verticais e horizontais.*
a) $f(x) = \frac{8}{(2x+5)^5}$, $a = -5/2$ *b)* $f(x) = \frac{3x^2}{(2x-9)^2}$, $a = 9/2$ *c)* $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-x-2}$, $a = -1$, $a = 2$.

Exercício 9 *Esboce o gráfico de uma função* f *que satisfaça:*

(a) f *contínua,* $f(0) = 4$, $f(2) = 2$, $f(5) = 6$, $f'(0) = f'(2) = 0$, $f'(x) > 0$ *se* $|x - 1| > 1$, $f'(x) < 0$ *se* $|x - 1| < 1$, $f''(x) < 0$ *se* $x < 1$ *ou se* $|x - 4| < 1$, $f''(x) > 0$ *se* $x > 5$ *ou se* $|x - 2| < 1$.

(b) f *contínua,* $f(0) = 2$, $f(2) = 1$, $f(4) = f(10) = 0$, $f(6) = -4$, $f'(2) = f'(6) = 0$, $f'(x) < 0$ *em* $(-\infty, 4), (4, 6)$ *e* $(10, \infty)$, $f'(x) > 0$ *em* $(6, 10)$, *não existem* $f'(4)$ *e* $f'(10)$, $f''(x) > 0$ *em* $(-\infty, 2), (4, 10)$ *e* $(10, \infty)$, $f''(x) < 0$ *em* $(2, 4)$.

(c) $f(2) = 4$, $f'(x) > 0$ *se* $x < 2$, $f'(x) < 0$ *se* $x > 2$, $f''(x) > 0$ *se* $x \neq 2$, $\lim_{x\to 2} |f'(x)| = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

(d) $f'(1) = f'(-1) = 0$, $f'(x) < 0$ *se* $|x| < 1$, $f'(x) > 0$ *se* $1 < |x| < 2$, $f'(x) = -1$ *se* $|x| > 2$, $f''(x) < 0$ *se* $-2 < x < 0$, *ponto de inflexão* $(0, 1)$.

Exercício 10 *Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento, calcule todos os limites necessários e esboce o gráfico de* f*, onde*

(a) $f(x) = x + \dfrac{2}{x^2}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 4x}{2 + x^2}$

(c) $f(x) = x^x$, $x > 0$

Exercício 11 *Para cada uma das funções abaixo*

- *determine* $\mathrm{Dom}(f)$*;*
- *determine os pontos onde* f *intercepta o eixo* x *e o eixo* y*.*
- *determine os pontos críticos e intervalos de crescimento e decrescimento;*
- *determine os candidatos a pontos de inflexão e estude a concavidade e pontos de inflexão;*
- *faça uma tabela com sinais de* f' *e* f''*, que justifiquem onde estão os máximos, mínimos e pontos de inflexão.*
- *determine se existem assíntotas verticais e horizontais;*
- *esboce o gráfico.*

$$(a) f(x) = x \ln x \qquad (b) f(x) = \frac{x^3}{1 + x^2} \qquad (c) f(x) = xe^{-2x}$$

Dica: *Note que* $\dfrac{x^3}{1 + x^2} = x - \dfrac{x}{1 + x^2}$.

Exercício 12 *Esboce o gráfico de*

$$y = \frac{1 + 5x - 2x^2}{x - 2}$$

e ache uma equação para a assíntota oblíqua.

Aplicações de Derivadas

Exercício 13 *Encontre o ponto da curva* $y = 2/x$, $x > 0$ *que está mais próximo da origem.*

Exercício 14 *Duas partículas* P *e* Q *movem-se, respectivamente, sobre os eixos* Ox *e* Oy. *A função posição de* P *é* $x = \sqrt{t}$ *e de* Q *é* $y = t^2 - 3/4$, $t \geq 0$. *Determine o instante em que a distância entre* P *e* Q *seja a menor possível.*

Exercício 15 *Mostre que se* a, b, c, d *forem inteiros positivos, então teremos*

$$\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \geq 16.$$

Exercício 16 *Um vitral tem o formato de um retângulo encimado por um semi-círculo. O vidro utilizado na parte semi-circular é menos translúcido, de forma que a quantidade de luz que passa por unidade de área é* $2/3$ *do permitido pelo vidro da parte retangular. Sendo o perímetro do vitral fixado em* 6m, *calcule as medidas do vitral que permita maior passagem de luz.*

Exercício 17 *Use o teste da derivada primeira para provar que a mais curta distância de um ponto* (x_1, y_1) *á reta* $ax + by + c = 0$ *é dada por* $d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Exercício 18 *Prove que a equação* $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ *admite uma única raiz real. Determine um intervalo de amplitude* 1 *que contenha tal raiz.*

Exercício 19 *Prove para quaisquer que sejam* $x > 0$, $\operatorname{sen} x > x - \dfrac{x^3}{3!}$.

Exercício 20 *(a) Determine o número real positivo cuja soma com o inverso do seu quadrado seja mínima.*

(b) Achar dois números positivos cuja soma é 16 *e cujo produto é o máximo possível.*

Exercício 21 *Determine a altura do cone circular reto, de volume máximo, inscrito na esfera de raio* R *dado.*

Exercício 22 *Um jardim retangular de* 50m^2 *de área deve ser protegido contra animais. Se um lado do jardim já está protegido por uma parede de celeiro, quais as dimensões da cerca de menor comprimento?*

Exercício 23 *Deseja-se construir uma caixa, de forma cilíndrica, de* 1m^3 *de volume. Nas laterais e no fundo será utilizado material que custa* $5,00$ *reais o* m^2 *e na tampa será utilizado material que custa* $10,00$ *reais o* m^2. *Determine as dimensões da caixa que minimizem o custo do material empregado.*

Exercício 24 *(IME) As arestas laterais de uma pirâmide regular com* n *faces têm medida* l. *Determine:*

(a) *a expressão do raio do círculo circunscrito à base, em função de* l*, de modo que o produto do volume da pirâmide pela sua altura seja máximo.*

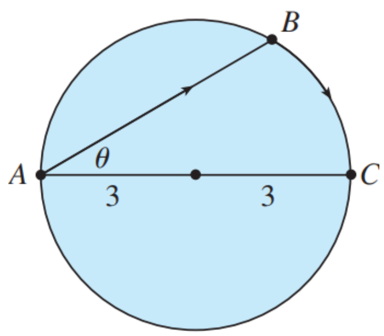
(b) *a expressão desse produto máximo, em função de* l *e* n*.*

Exercício 25 *Uma partícula desloca-se sobre o eixo* Ox *com velocidade* $v(t) = 2t-3$, $t \geq 0$*. Sabe-se que no instante* $t = 0$ *a partícula encontra-se na posição* $x = 5$*. Determine o instante em que a partícula estará mais próxima da origem.*

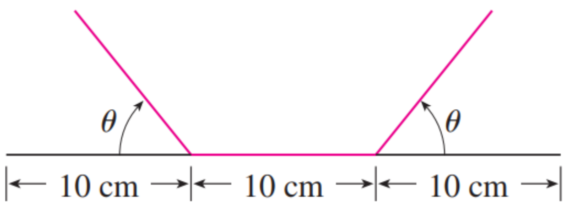
Exercício 26 *Um sólido será construído acoplando-se a um cilindro circular reto, de altura* h *e raio* r*, uma semi-esfera de raio* r*. Deseja-se que a área da superfície do sólido seja* 5π*. Determine* r *e* h *para que o volume do sólido seja máximo.*

Exercício 27 *Ao preço de* R\$1,50 *um vendedor ambulante pode vender* 500 *unidades de uma certa mercadoria que custa* 70 *centavos cada. Para cada centavo que o vendedor abaixa no preço, a quantidade vendida pode aumentar em* 25 *unidades. Que preço de venda maximizará o lucro?*

Exercício 28 *Uma mulher em um ponto* A *na praia de um lago circular com raio de* 3km *quer chegar no ponto* C *diametralmente oposto a* A *do outro lado do lago no menor tempo possível. Ela pode andar a uma taxa de* 6km/h *e remar um bote a* 3km/h*. Como ela deve proceder?*



Exercício 29 *Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura* 30cm *dobrando-se para cima* $1/3$ *da folha de cada lado, fazendo um ângulo* θ *com a horizontal. Como* θ *deve ser escolhido para que a calha carregue a maior quantidade de água possível?*



Exercício 30 *(IME) Considere uma esfera inscrita e tangente à base de um cone de revolução. Um cilindro está circunscrito à esfera de tal forma que uma de suas bases está apoiada na base do cone. Seja:* V_1 *o volume do cone e* V_2 *o volume do cilindro. Encontre o menor valor da constante* k *para o qual* $V_1 = kV_2$. *Sugestão: Considere o ângulo formado pelo diâmetro da base e a geratriz do cone em uma das extremidades deste diâmetro.*

Exercício 31 *Dois corredores iniciam uma corrida no mesmo instante e terminam empatados. Prove que em algum momento durante a corrida, eles tinham a mesma velocidade. [Dica: Considere* $f(t) = g(t) - h(t)$, *onde* g *e* h *são as duas posições dos corredores.]*