Máximos e mínimos
Aula 19

Primeiro Semestre de 2023

Definição (Máximos e Mínimos Locais)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função.*

- *Diremos que* $x_0 \in D_f$ *é um* ***ponto de máximo local*** *de* f, *se existir* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_f$. *Neste caso, diremos que* $f(x_0)$ *é um* ***máximo local***.

- *Diremos que* $x_0 \in D_f$ *é um* ***ponto de mínimo local*** *de* f, *se existir* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_f$. *Neste caso, diremos que* $f(x_0)$ *é* ***mínimo local***.

- *Um ponto* $x_0 \in D_f$ *será dito um* ***ponto extremo local***, *se* x_0 *for um ponto de máximo local ou um ponto de mínimo local.*

Definição (Máximos e Mínimos Globais)

- *Diremos que $x_0 \in D_f$ é um* **ponto de máximo global** *de f, se $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in D_f$. Neste caso, $f(x_0)$ é um* **máximo global**.

- *Diremos que $x_0 \in D_f$ é um* **ponto de mínimo global** *de f, se $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in D_f$. Neste caso, $f(x_0)$ é* **mínimo global**.

- *Um ponto $x_0 \in D_f$ será dito um* **ponto extremo global**, *se x_0 for um ponto de máximo ou de mínimo global.*

Exemplo

O valor máximo de $f(x) = \cos(x)$ é 1 e é assumido infinitas vezes.

Definição

*Um **ponto crítico** de uma função f é um ponto c onde ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

Exemplo

Os pontos críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$ são $\dfrac{3}{2}$ e 0.

Temos que $f'(x) = \dfrac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$. Então, $f'(x) = 0$ se $12 - 8x = 0$, ou seja $x = \dfrac{3}{2}$ e $f'(0)$ não existe.

Proposição

Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. Se* $c \in (a, b)$ *for um ponto extremo (máximo ou mínimo, local ou global) de* f, *então* $f'(c) = 0$.

Observações:

- Todo ponto extremo de uma função diferenciável definida em um intervalo aberto é um ponto crítico. Se f estiver definida em um intervalo aberto, deveremos procurar os pontos extremos entre os pontos críticos.
- Se I não for um intervalo aberto, o resultado poderá não ser verdadeiro. Por exemplo, $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, os pontos extremos serão $x=0$ e $x=1$. Em ambos os casos, $f'(x)=1$.
- A recíproca não vale. De fato, $f(x)=x^3$ é crescente e $f'(0) = 0$.

- A função $f(x) = |x|$ tem valor mínimo em $x = 0$, mas $f'(0)$ não existe. Não podemos tirar a hipótese de diferenciabilidade.
- O Teorema de Weierstrass afirma que uma função contínua em um intervalo fechado assume seus valores máximo e mínimo globais, mas não diz como encontrá-los.
- Notemos que o valor extremo de uma função contínua definida num intervalo fechado ou ocorre num ponto crítico ou ocorre em um extremo do intervalo.

Método do Intervalo Fechado

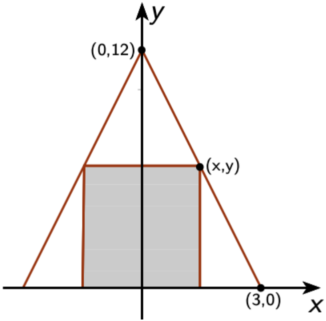
Para encontrar os valores máximos e mínimos globais de uma função contínua f num intervalo fechado $[a, b]$:

1. Encontre os valores de f nos pontos críticos de f em (a, b).
2. Encontre os valores de f nos extremos do intervalo.
3. O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo global e o menor desses valores é o mínimo global.

Exemplo

Um triângulo isósceles tem uma base de 6 unidades e uma altura de 12 unidades. Encontre a área máxima possível de um retângulo que pode ser colocado dentro do triângulo com um dos lados sobre a base do triângulo.

Solução: Introduzimos um sistema de coordenadas de modo a que a base do triângulo esteja sobre o eixo x e o eixo y o corta ao meio. Logo, nosso problema será achar o valor máximo da área A do retângulo dada por $A = 2xy$.



Como (x, y) está sobre o lado do triângulo temos que $y = 12 - 4x$. Assim, a área pode ser expressa apenas em função de x:

$$A(x) = 2x(12 - 4x) = 24x - 8x^2.$$

Como x e y representam comprimentos e A é uma área, estas variáveis não podem ser negativas. Segue-se que $0 \leq x \leq 3$.

Assim, nosso problema pode ser formulado da seguinte maneira: encontre o valor máximo da função

$$A(x) = 24x - 8x^2 \qquad 0 \leq x \leq 3.$$

Temos que $A'(x) = 24 - 16x$, então $x = \dfrac{3}{2}$ é o único ponto crítico. Avaliamos A nos extremos e no ponto crítico: $A(0) = 0$, $A(\frac{3}{2}) = 18$ e $A(3) = 0$. Portanto, a área máxima possível é 18 unidades.

Critério da derivada primeira

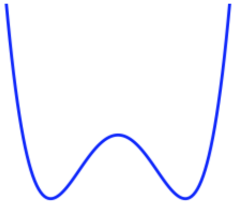
O resultado abaixo segue dos Corolários do Terorema do Valor Médio.

Proposição (Critério da derivada primeira)

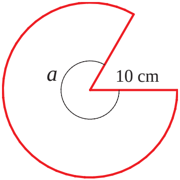
Seja f uma função contínua e c um ponto crítico de f.

(i) *Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.*

(ii) *Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.*



Minha primeira medalha de escoteiro



Para construir um cone circular reto remove-se um setor de uma folha circular de cartolina de raio R cm e une-se as duas margens retilíneas do corte, conforme a figura abaixo, em que a indica o ângulo do setor circular restante. Sabendo que o volume do cone de raio da base r e altura h é igual a $(1/3)\pi r^2 h$, determine:

a) o volume do cone obtido em função do ângulo a.

b) o ângulo a_0 para o qual o volume do cone obtido seja o maior possível.

Temos

$$2\pi r = Ra \Rightarrow \boxed{r = \frac{Ra}{2\pi}.}$$

$$R^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow \boxed{h = \sqrt{R^2 - r^2}.}$$

Com $a \in (0, 2\pi)$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \frac{R^2 a^2}{4\pi^2} \sqrt{R^2 - \frac{R^2 a^2}{4\pi^2}} = \frac{\pi R^2 a^2}{12\pi^2} \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - a^2} = \frac{R^3 a^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - a^2}$$

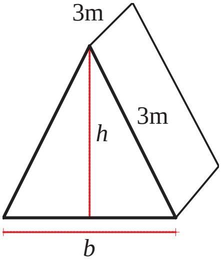
$$V = \frac{R^3}{24\pi^2} a^2 \sqrt{4\pi^2 - a^2}$$

$$V' = \frac{R^3}{24\pi^2 \sqrt{4\pi^2 - a^2}} a \left(8\pi^2 - 3a^2\right)$$

- $V' > 0$ em $(0, \pi\sqrt{8/3})$
- $V' < 0$ em $(\pi\sqrt{8/3}, 2\pi)$
- V assume máximo global em $a = \pi\sqrt{8/3}$
- ângulo a ser retirado é de $\approx 66,06$ graus

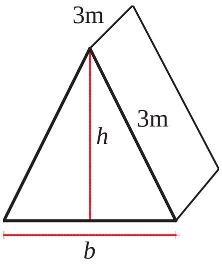
Minha segunda medalha de escoteiro

Suponha que, a partir de uma lona de plástico com 6 metros de comprimento e 3 de largura, desejamos construir uma barraca com vista frontal na forma de um triângulo isósceles. Se denotarmos por h a altura da barraca e por b o comprimento da sua base, a situação pode ser descrita pela figura ao lado.

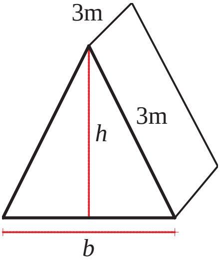


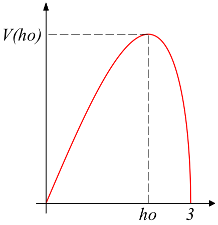
Queremos escolher as dimensões de h e b de modo que o volume da barraca seja o maior possível.

Para tanto, vamos inicialmente observar que este volume, em metros cúbicos, é dado pela área do triângulo que fornece a vista frontal da barraca multiplicado por 3, isto é, o volume é exatamente $(3/2)bh$.



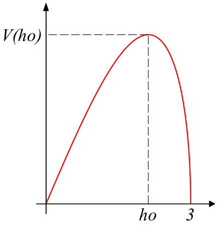
É importante notar que o valor de b depende de h. De fato, usando o Teorema de Pitágoras, vemos que $3^2 = h^2 + (b/2)^2$, ou ainda, $b = 2\sqrt{9 - h^2}$. Assim, podemos construir uma função $V(h)$ que fornece, para cada valor de h, o volume da barraca.





A expressão dessa função é

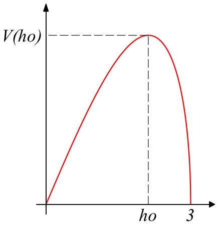
$$V(h) = 3h\sqrt{9 - h^2}, \quad h \in [0, 3].$$



A expressão dessa função é

$$V(h) = 3h\sqrt{9 - h^2}, \quad h \in [0, 3].$$

Analisando o gráfico da função V ao lado concluímos que o seu maior valor é atingido para algum $h_0 \in (0, 3)$, pois V pode ser definida de forma contínua no intervalo $[0, 3]$.

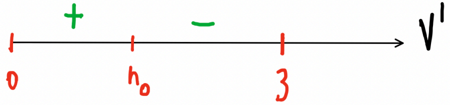


A expressão dessa função e sua derivada são

$$V(h) = 3h\sqrt{9-h^2}, \quad h \in [0,3].$$

$$V'(h) = \frac{27-6h^2}{\sqrt{9-h^2}}$$

A equação $V'(h) = 0$ é então equivalente a $9 - 2h^2 = 0$.
Desse modo, o único ponto do intervalo $(0,3)$ em que a derivada se anula é $h_0 = 3/\sqrt{2}$.



V é estritamente crescente em $[0, h_0]$.

V é estritamente decrescente em $[h_0, 3]$.

V assume valor máximo em h_0.

Exemplo

Determine os extremos locais de $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{1 + 3x^2}$ *e esboce o gráfico.*

Solução: Como $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{(1 + 3x^2)^2}$, o sinal de f' é dado pelo sinal do numerador $3x^2 + 2x - 1 = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$. Então,

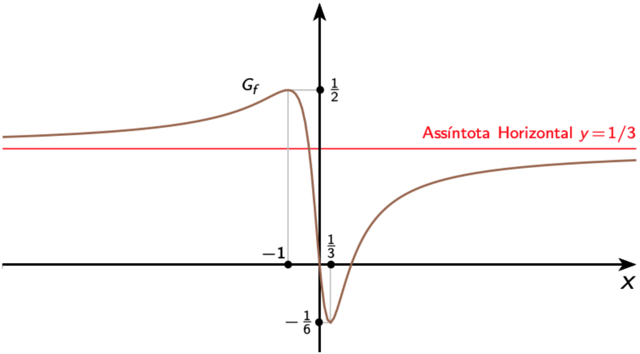
- $f'(x) = 0$ se $x = -1$ e $x = \frac{1}{3}$. Logo -1 e $\frac{1}{3}$ são pontos críticos,
- f é crescente em $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$ $(f'(x) > 0)$.
- f é decrescente $[-1, \frac{1}{3}]$ $(f'(x) < 0)$.

Assim,

$x = -1$ é ponto de máximo local com valor máximo $f(-1) = \frac{1}{2}$ e

$x = \frac{1}{3}$ é ponto de mínimo local com valor mínimo $f(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{6}$.

A reta $y = 1/3$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.



Exemplo

Mostre que $e^x \geq x + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução:

Se $f(x) = e^x - (x+1)$, $f(0) = 0$ e $f'(x) = e^x - 1$. Logo $f'(x) > 0$, se $x > 0$ e $f'(x) < 0$ se $x < 0$.

Portanto 0 é um ponto de mínimo global de f e $f(x) \geq f(0) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, mostrando o resultado.

Exemplo

Determine os extremos locais de $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$ *e esboce o gráfico.*

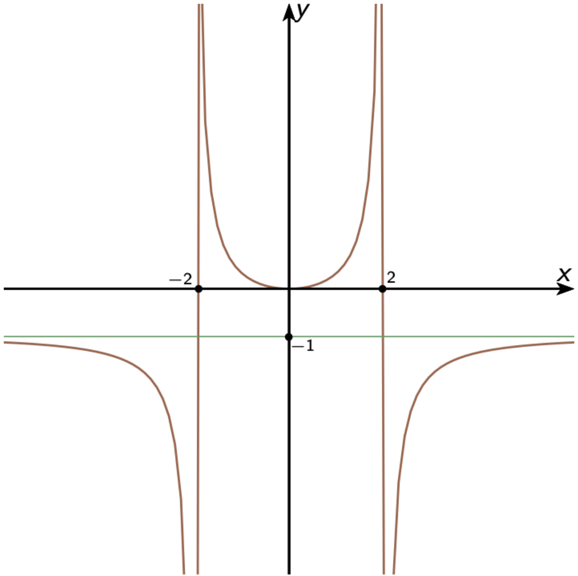
Solução: Temos que $f'(x) = \dfrac{8x}{(4 - x^2)^2}$. Então,

- $f'(x) = 0$ se $x = 0 \Rightarrow x = 0$ é ponto crítico,
- $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ é crescente, para $x \geq 0$, $x \neq 2$
- $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é decrescente, para $x \leq 0$, $x \neq -2$.

Logo, $x = 0$ é um ponto de mínimo local com mínimo $f(0) = 0$.

Como, $\lim\limits_{x \to \pm 2^-} = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x \to \pm 2^+} = \mp\infty$, temos assíntotas verticais em $x = 2$ em $x = -2$.

Como, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = -1$, temos uma assíntota horizontal $y = -1$.


y
x
−2
2
−1