Variáveis Aleatórias Contínuas

Ciências Contábeis - FEA - Noturno

1º Semestre 2023

Profs. Leonardo T. Rolla e Nikolai Kolev

(baseado em material previamente
desenvolvido pelo Prof. Gilberto Alvarenga Paula)

Sumário

Sumário

Definição

Uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua.

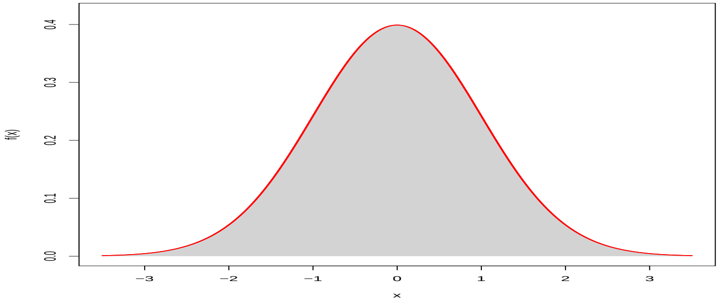
Exemplos

- altura de um adulto
- custo do sinistro de um carro
- temperatura mínima diária
- saldo em aplicações financeiras
- ganho de peso após dieta
- distância percorrida

Função densidade de probabilidade

A função densidade de probabilidade (f.d.p.) de uma variável aleatória X é uma função $f(x) \geq 0$ cuja área total sob a curva seja igual à unidade. Em termos matemáticos

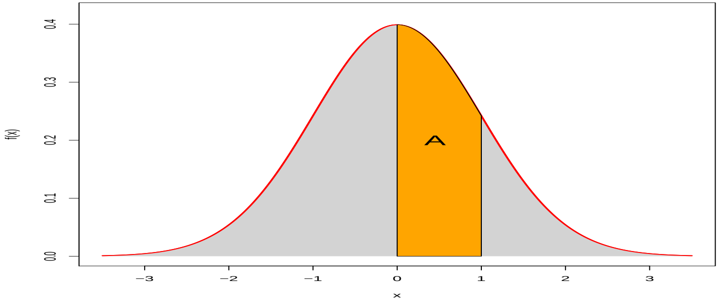
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$



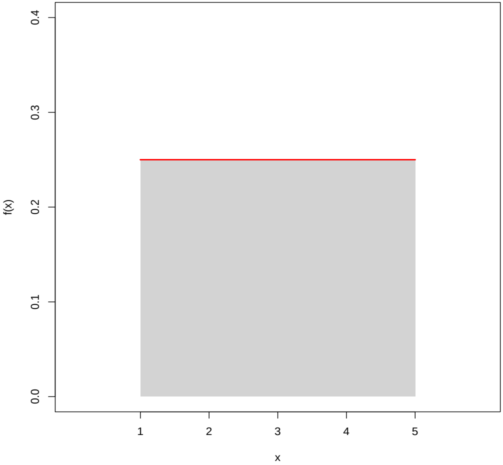
Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(a \leq X \leq b)$ corresponde à área sob a curva no intervalo $[a, b]$. Em termos matemáticos

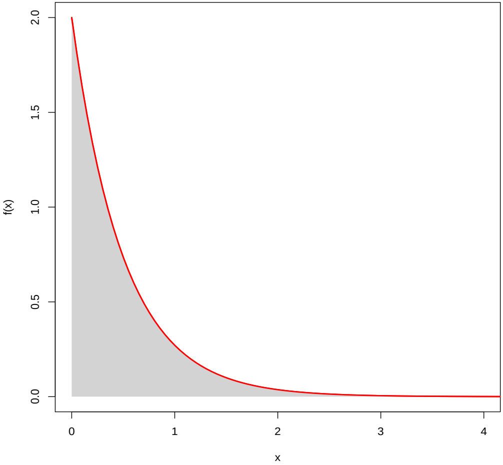
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$



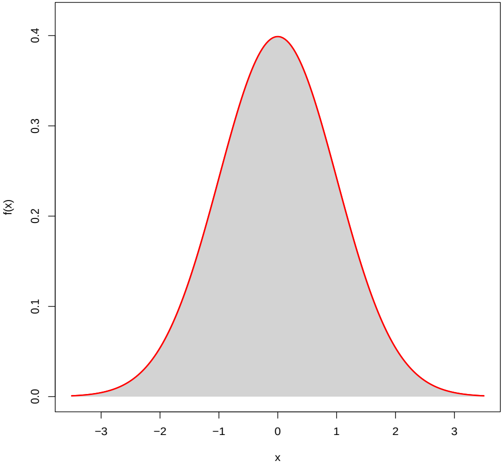
Distribuição Uniforme



Distribuição Exponencial



Distribuição Normal



Sumário

Definição

A esperança matemática de uma variável aleatória contínua X fica dada por

$$\mu = \mathsf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Definição

A variância de uma variável aleatória X contínua é definida por

$$\begin{aligned} \mathsf{Var}(X) &= \mathsf{E}[X-\mu]^2 \\ &= \mathsf{E}(X^2) - \mu^2, \end{aligned}$$

em que

$$\mathsf{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx.$$

Propriedades

$$\mathsf{E}(aX + bY) = a\,\mathsf{E}(X) + b\,\mathsf{E}(Y)$$

$$\mathsf{E}(a) = a$$

$$\mathsf{Var}(aX + b) = a^2\,\mathsf{Var}(X)$$

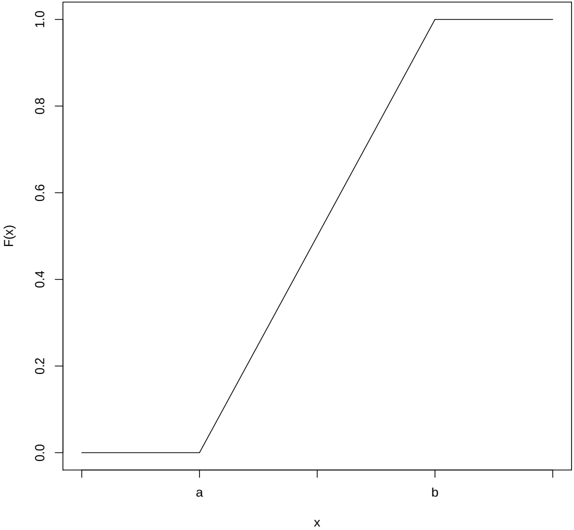
Sumário

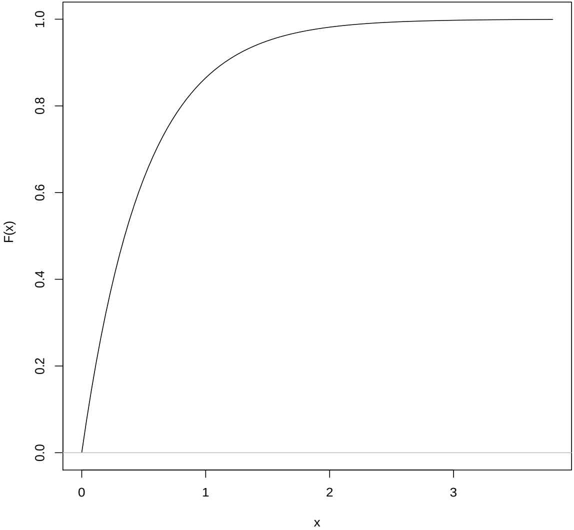
Definição

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória T contínua é definida por

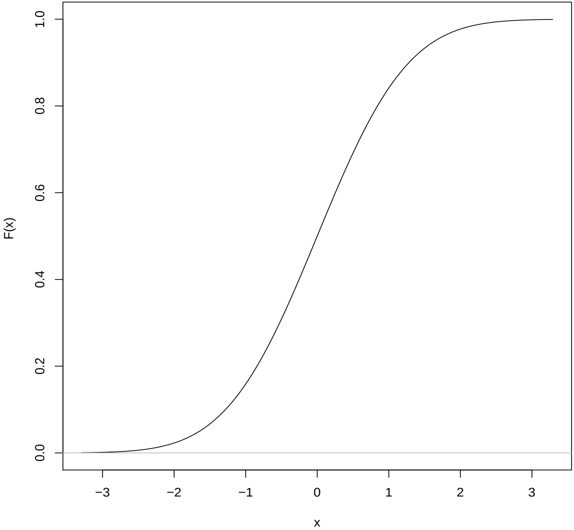
$$F(x) = P(T \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Distribuição Uniforme




F(x)
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
1
2
3

Distribuição Normal



Propriedades

F_X é "crescente" (não-decrescente)

F_X "vai de 0 a 1"
(tende a 0 para x grande negativo e tende a 1 para x grande positivo)

$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

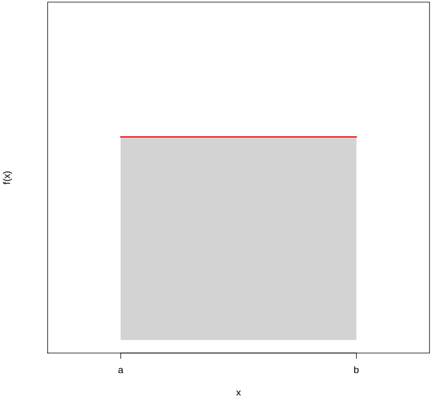
Cálculo da densidade a partir da distribuição acumulada

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x)$$

Sumário

Definição

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo [a,b], notação $X \sim U[a, b]$, então $f(x) = \frac{1}{(b-a)}$ para $a \leq x \leq b$ e $f(x) = 0$ em caso contrário.



A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória $T \sim U[a,b]$ é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b, \\ 1 & x \geq b. \end{cases}$$

Esperança e variância

Vamos supor que X é uma variável aleatória tal que $X \sim U[a, b]$.

Esperança

A esperança de X fica dada por

$$\mathsf{E}(X) = \int_a^b \frac{x}{(b-a)} dx = \frac{a+b}{2}.$$

Variância

A variância de X fica dada por

$$\mathsf{Var}(X) = \underbrace{\int_a^b \frac{x^2}{(b-a)} dx}_{\mathsf{E}(X^2)} - [\mathsf{E}(X)]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exemplo

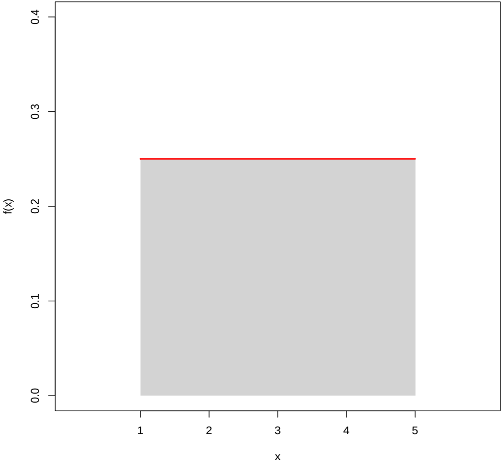
Densidade

Se X é uma variável aleatória uniforme no intervalo $[1,5]$, notação $X \sim U[1,5]$, então a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 1 \leq x \leq 5, \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Exemplo

Gráfico de $f(x)$

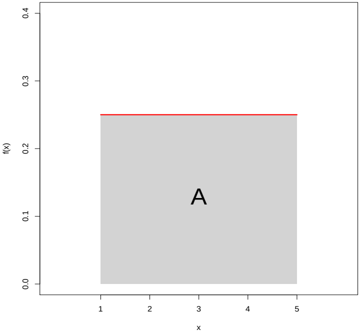


Exemplo

Área total

A área total sob a curva corresponde à área de um retângulo de base $\Delta = 4$ e altura $h = \frac{1}{4}$. Logo, a área total fica dada por

$$A = \Delta \times h = 4 \times \frac{1}{4} = 1.$$



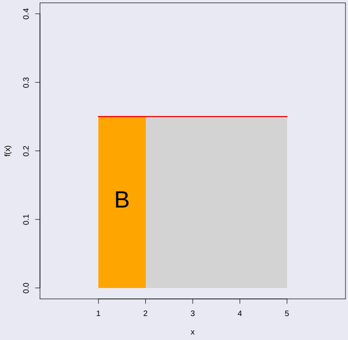
Exemplo

Área total

A área total sob a curva pode ser calculada diretamente pela solução da integral

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{1}{4} dx &= \frac{1}{4}\int_1^5 dx \\ &= \frac{1}{4} x\Big|_1^5 \\ &= \frac{1}{4}(5-1) \\ &= \frac{4}{4} = 1.\end{aligned}$$

Probabilidade de eventos



A probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ corresponde à área do retângulo de base $\Delta = 1$ e altura $h = \frac{1}{4}$.
Essa área fica dada por

$$B = \Delta \times h = 1 \times \frac{1}{4} = 0,25.$$

Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ pode ser calculada diretamente pela solução da integral

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{4} dx &= \frac{1}{4} \int_1^2 dx \\ &= \frac{1}{4} x \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{4}(2-1) \\ &= \frac{1}{4} = 0,25. \end{aligned}$$

Exemplo

Função de Distribuição Acumulada

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{4}, & 1 \leq x \leq 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

Exemplo

Cálculo da densidade a partir da distribuição acumulada

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 1 \leq x \leq 5, \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Sumário

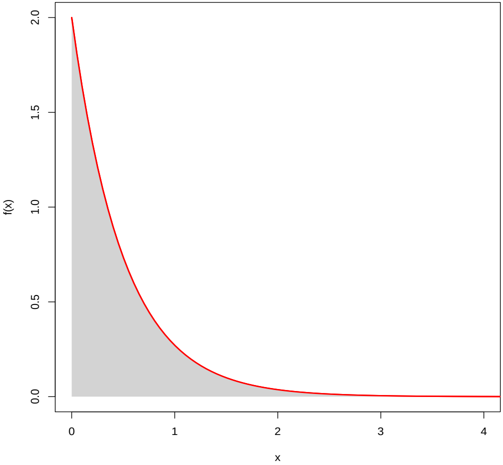
Distribuição Exponencial

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$ ($X \sim \text{Exp}(\lambda)$), a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

em que $x > 0$.

Gráfico de $f(x)$ para $\lambda = 3$



Área total

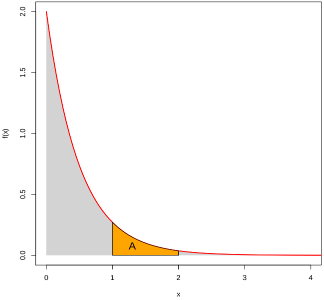
A área total sob a curva é calculada através da integral

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = 1.$$

Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ corresponde à área na figura abaixo e pode ser calculada pela integral

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}. \end{aligned}$$



Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$.

Esperança

A esperança de X fica dada por

$$\mathsf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Variância

A variância de X fica dada por

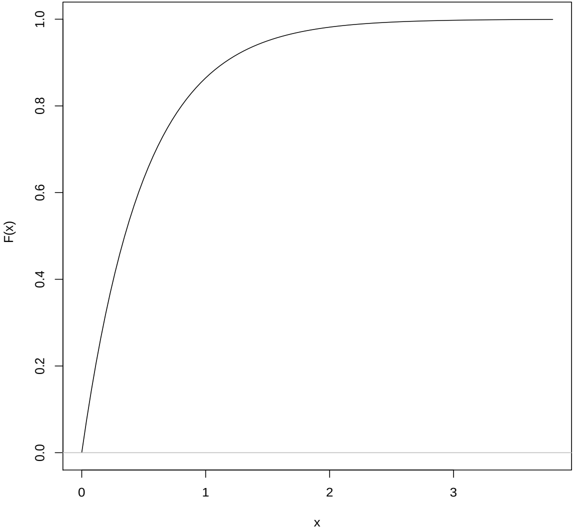
$$\mathsf{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Função de distribuição acumulada

A Função de Distribuição Acumulada de uma variável aleatória $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ fica dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0. \end{cases}$$

Gráfico de $F(x)$ para $\lambda = 1$



Sumário

Distribuição Normal

Se X é uma variável aleatória com distribuição normal de média μ e variância σ^2, a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2},$$

para $-\infty < x, \mu < +\infty$ e $\sigma > 0$. Notação: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

A normal-padrão é quando $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

Gráfico de $f(x)$

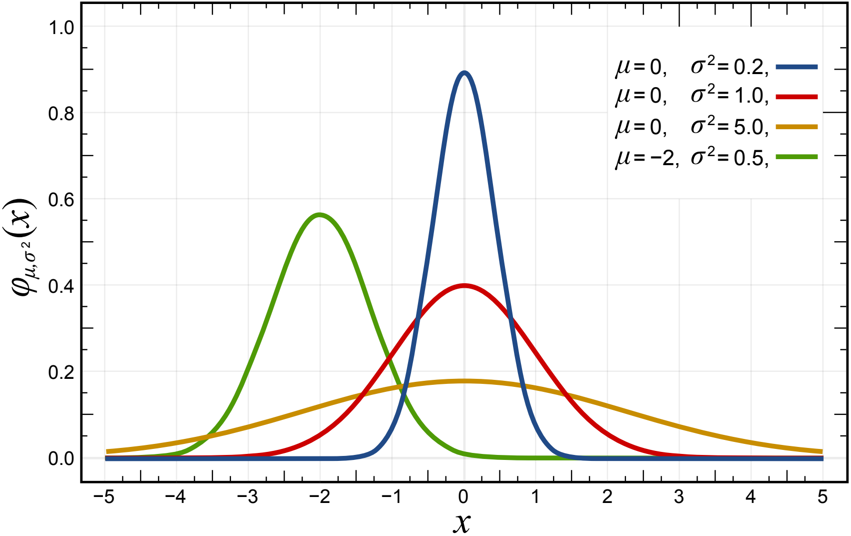
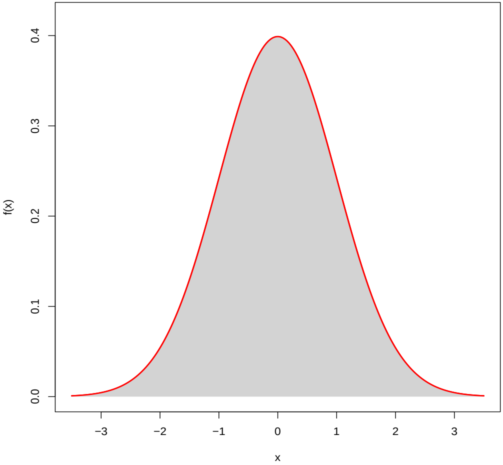


Gráfico de $f(x)$ para uma N(0,1)



Cálculo de probabilidades

Por exemplo, a probabilidade $A = P(0 \leq X \leq 1)$ pode ser calculada subtraindo os valores de uma tabela normal-padrão

$$P(X \leq 1) - P(X \leq 0) = 0{,}841 - 0{,}5 = 0{,}341.$$

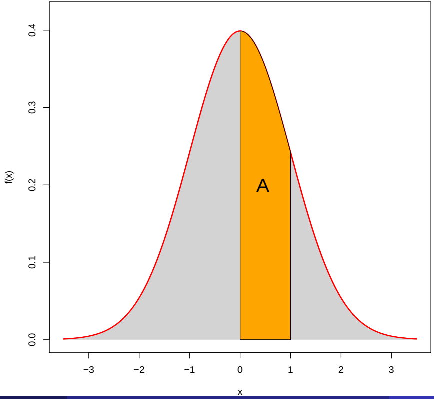
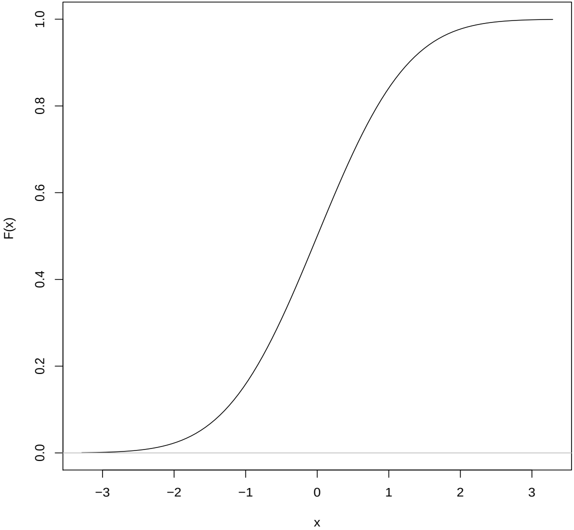


Gráfico de $F(x)$ para N(0,1)



Exercício

O tempo de vida de uma lâmpada segue distribuição exponencial com média de 14 meses. Suponha que o custo de fabricação da lâmpada seja de R$3,00 e que o preço de venda R$8,00. O fabricante oferece uma garantia que cobre 10% das lâmpadas fabricadas. Responde às questões abaixo:

(a) Calcule a probabilidade de uma lâmpada durar menos que 10 meses.

(b) Qual o tempo que delimita a garantia? Ou seja, qual é o tempo que não é superado por 10% das lâmpadas?

(c) Se sabemos que a lâmpada durou mais do que o tempo de garantia, qual a probabilidade de superar o tempo médio?

(d) Se a lâmpada falha no período de garantia, o fabricante devolve integralmente o valor da venda. Qual o lucro esperado por lâmpada?

Exercício

Suponha que

$$f_X(x) = \begin{cases} c\,x^2, & x \in [-1, 2] \\ 0, & x \notin [-1, 2] \end{cases}$$

Calcule c

Calcule F_X

Calcule E(X) e Var(X)

Calcule $P(X > 1|X > 0)$

Calcule f_X a partir de F_X