6. Sistemas de referência não inerciais

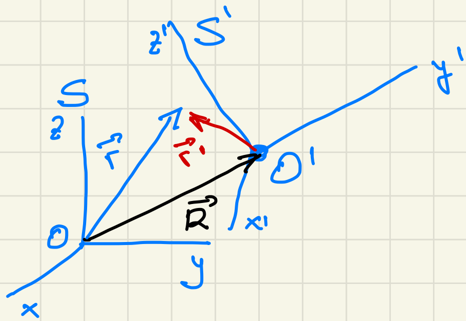
18/5/23

6.1 Referenciais não inerciais

Consideremos um referencial inercial S. Um outro referencial S' é não inercial se

i) O' descreve um movimento acelerado c/ respeito a S

ii) Os eixos de coordenadas de S' não mantêm os mesmos ângulos com respeito aos eixos de S, ou seja o referencial está rodando!



Consideremos os dois casos separadamente.

6.1.1 Referenciais acelerados sem rotação

Da figura $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$$

Aplicando a lei de Newton no referencial inercial S:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{total} \Rightarrow m\left[\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}\right] = \vec{F}_{total}$$

No referencial S': $\vec{F}'_{total}(t) = \vec{F}_{total}(t)$

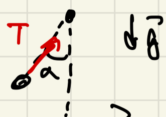
Logo, $$m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{F}'_{total}(t) - m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

Podemos "definir" a força de inércia (fictícia)

$$\vec{F}_I = -m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$ e escrever

$$m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{F}'_{total} + \vec{F}_I$$

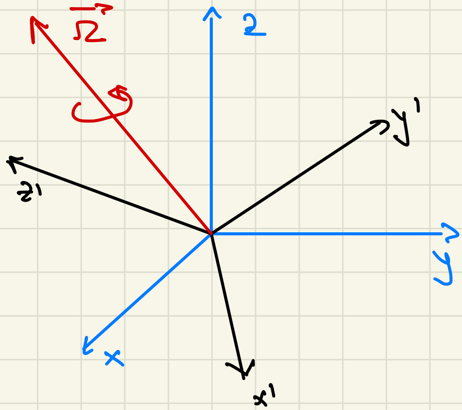
Exemplo: $S \equiv$ Rua $S' =$ Carro c/ aceleração constante e massa pendurada no teto. em equilíbrio



Ref. Inercial	Ref. Carro
$mg - T\cos\alpha = 0$	$Mg - T\cos\alpha = 0$
$Ma = T\sin\alpha$	$T\sin\alpha + F_I = 0 = T\sin\alpha - Ma$
$\Rightarrow \begin{cases} tg\,\alpha = a/g \\ T = M\sqrt{g^2+a^2} \end{cases}$	$\Rightarrow \begin{cases} tg\,\alpha = a/g \\ T = M\sqrt{a^2+g^2} \end{cases}$

6.1.2 Referenciais girantes

Consideremos que S' "apenas" esteja girando com respeito a S onde S é inercial.



Vimos que uma rotação infinitesimal é dada por

$$\delta x^i = \epsilon^{ijk}\,\theta^j x^k$$

$$= \sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2}\;\epsilon^{ijk}\,\frac{\theta^j}{\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2}}\,x^k$$

$$= \delta\theta\;\epsilon^{ijk}\,n^j x^k$$

with $\delta\theta = \sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2}$ e $n^j = \theta^j \big/ \sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2}$

Ou seja $\quad \boxed{\delta\vec{x} = \delta\theta\;\vec{n}\wedge\vec{x}}$

$$\vec{r} = \vec{r}\,'$$

Agora $\quad \vec{r}\,' = x'\,\vec{e}_x{}' + y'\,\vec{e}_y{}' + z'\,\vec{e}_z{}' \Rightarrow$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\,\vec{e}_x{}' + \frac{dy'}{dt}\,\vec{e}_y{}' + \frac{dz'}{dt}\,\vec{e}_z{}'$$

$$+\, x'\,\frac{d\vec{e}_x{}'}{dt} + y'\,\frac{d\vec{e}_y{}'}{dt} + z'\,\frac{d\vec{e}_z{}'}{dt}$$

mas num intervalo $\delta t \Rightarrow$ rotação $\vec{\Omega}\, dt$

$$\Rightarrow d\vec{e}'_x = \vec{\Omega}\, dt \wedge \vec{e}'_x \Rightarrow \frac{d\vec{e}'_x}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}'_x$$ e análogo p/ $\vec{e}'_y$, $\vec{e}'_z$

Logo

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{e}'_x + \frac{dy'}{dt}\vec{e}'_y + \frac{dz'}{dt}\vec{e}'_z + \vec{\Omega} \wedge (\vec{e}'_x x + \vec{e}'_y y + \vec{e}'_z z)$$

$$\therefore \boxed{\left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_S = \left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{S'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}' \Rightarrow}$$

Vale para qualquer vetor!

↳ onde os versores $\vec{e}'_{x,y,z}$ estão fixos!

Agora podemos calcular a aceleração:

$$\left.\frac{d^2\vec{r}'}{dt}\right|_S = \left.\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}\right|_{S'} + \vec{\Omega} \wedge \left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{S'}$$

$$+ \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_S \wedge \vec{r}' + \cancel{\vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega}}^{\,0} + \vec{\Omega} \wedge \left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_S + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}')$$

$$\therefore \boxed{\frac{d^2\vec{r}'}{dt} = \left.\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}\right|_{S'} + 2\vec{\Omega} \wedge \left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{S'} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}')}$$

Onde usamos que $\vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \equiv 0$.

Logo, no caso geral

$$\left.\frac{d^2\vec{r}}{dt}\right|_S = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \left.\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}\right|_{S'} + 2\vec{\Omega}\wedge\left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{S'} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{r}' + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}')$$

A lei de Newton no referencial inercial é dada por

$$m\left.\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}\right|_S = \vec{F}_{total}$$

Usando a expressão acima temos que no referencial não inercial é dada por

$$m\left.\frac{d^2\vec{r}}{dt'^2}\right|_{S'} = \vec{F}_{total} - m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \rightarrow \text{força inercial translacional}$$

$$- m\, 2\vec{\Omega}\wedge\left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{S'} \rightarrow \text{força de Coriolis}$$

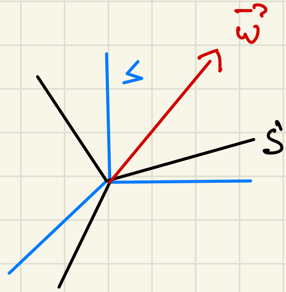
$$- m\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{r}' \rightarrow \text{força de Euler ou azimuthal}$$

$$- m\,\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}') \rightarrow \text{força centrífuga}$$

6.2 Utilizando o formalismo Lagrangiano

Para simplificar consideremos que o referencial S' apenas gira com respeito ao referencial inercial S. No referencial S, para um potencial central,

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}^{\,2} - U(r)$$



Agora $\vec{r} = \vec{r}\,'$ e sabemos que

$$\vec{v}\Big|_S = \underbrace{\vec{v}\Big|_{S'}}_{\vec{v}\,'} + \vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'$$

Com isso: $L = \frac{m}{2}\left(\vec{v}\,'^{2} + \vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'\right)^2 - U(r')$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}\,'} = \nabla_{\vec{v}\,'}\left[\frac{m}{2}\left(\vec{v}\,' + \vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'\right)^2 = m\left(\vec{v}\,' + \vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'\right)\right.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}\,'}\right) = m\dot{\vec{v}}\,' + m\dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{r}\,' + m\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}\,'$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}\,'} = \nabla_{\vec{r}\,'}L = \frac{m}{2}\nabla\left[\underbrace{2\vec{v}\,'\cdot\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'}_{\to\, 2\vec{r}\,'\cdot\vec{\omega}\wedge\vec{v}\,'} + \left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'\right)^2\right] - \nabla U$$

mas $\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'\right)^2 = \vec{\omega}\cdot\vec{\omega}\;\vec{r}\,'\cdot\vec{r}\,' - \left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\,'\right)^2$

$$\nabla'\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'\right)^2 = 2\,\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}\;\vec{r}\,' - 2\,\vec{\omega}\left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\,'\right)$$
$$= -2\,\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)$$

$$\therefore\ m\dot{\vec{v}}' = -\nabla U - m\dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{r}' - 2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}' - m\,\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r})$$

Oh!

6.3 Exemplos

23/5/23

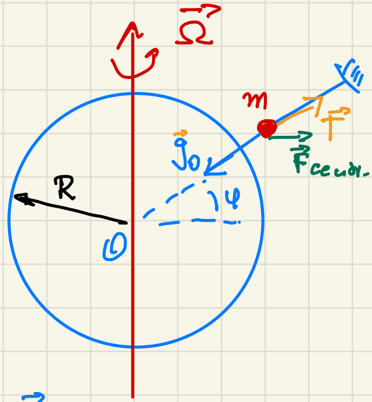
1. Valor local de g

Consideremos um pêndulo parado com respeito à Terra.

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{T} + m\vec{g}_0 - \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}')$$

$$= \vec{T} + m[\vec{g}_0 - \underbrace{\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}')}_{\vec{F}_{cf}}] = 0$$

parado



$$|\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}')| = m\Omega^2 R\cos\varphi = |\vec{F}_{cf}|$$

Usando coord. esféricas: $\vec{F}_{cf} = m\Omega^2 R\cos\varphi[\cos\varphi\,\vec{e}_r + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{e}_\theta]$

Equilíbrio na direção $\vec{e}_r \Rightarrow T_r = m(g_0 - m\Omega^2 R\cos^2\varphi)$

equilíbrio na direção $\vec{e}_\theta \Rightarrow T_\theta = -m\Omega^2 R\cos\varphi\sin\varphi$

- Como $T_\theta \neq 0 \Rightarrow$ o fio não aponta para O.
- Aparentemente o g local é: $g = g_0 - \Omega^2 R\cos^2\varphi$