Coleção de Exercícios 3

1. Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ com matriz de probabilidades de transição $\mathbf{P}$ dada por

	0	1	2	3	4
0	1/2	1/2	0	0	0
1	0	1/3	2/3	0	0
2	0	0	1/3	2/3	0
3	0	1/3	0	1/3	0
4	2/3	0	0	0	1/3

   (a) Determine $P(\ X_2 = 1 \mid X_0 = 0\ )$ e $P(\ X_2 = 1 \mid X_0 = 0\ , X_5 = 0\ )$.

   (b) Suponha que esta cadeia de Markov começa no estado 4 (ou seja, suponha que a distribuição de probabilidade no instante zero, denotada por π_0, seja dada por $\pi_0(i) = P(\ X_0 = i\ ) = 1$ se $i = 4$ e $\pi_0(i) = P(\ X_0 = i\ ) = 0$ se $i \neq 4$). Determine π_1, a distribuição de probabilidade desta cadeia no instante 1, e estime $\pi_{7.324.809.217.746}$, a distribuição de probabilidade no instante $n = 7.324.809.217.746$.

2. Um sistema de comunicação é tal que, se um símbolo é transmitido corretamente, a probabilidade de que o símbolo seguinte seja correto é de 0,9. Se, no entanto, um símbolo for transmitido incorretamente, a probabilidade de o próximo também o seja é de 0,5. A transmissão pode ser modelada pela sequência markoviana, $\{X_1, X_2, \ldots\}$ onde $X_i = 1$ se o i-ésimo símbolo for transmitido corretamente, e $X_i = 0$ se o i-ésimo símbolo for incorreto. Suponha que a probabilidade de que o primeiro símbolo seja transmitido corretamente seja 0,7. a) Calcule a Matriz de transição. b) Calcule $P(X_3 = 1|\pi_0)$, onde π_0 é a distribuição inicial dada(a probabilidade de que o primeiro símbolo seja transmitido corretamente é 0,7). c) Após muito tempo qual é a proporção de símbolos transmitida corretamente?

3. Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ com matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por

	0	1	2	3	4
0	1/3	0	2/3	0	0
1	1/3	0	0	2/3	0
2	0	1/5	3/5	1/5	0
3	0	3/4	0	1/4	0
4	0	0	1/2	0	1/2

   a) Determine $P(X_4 = 0|X_2 = 4)$. b) Determine $P(X_4 = 0|X_2 = 4, X_5 = 1)$. c) Determine uma distribuição estacionária. Ela é única? d) Estime $P(X_n = 1|X_0 = 0)$ para n grande.

4. Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0, 1, 2\}$ com matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por

	0	1	2
0	1/3	1/3	1/3
1	1/2	1/2	0
2	0	1/2	1/2

a) Classifique os estados desta cadeia. b) Determine $P(X_3 = 1|X_2 = 0)$ e $P(X_5 = 1|X_3 = 0)$. c) Determine $P(X_5 = 1|X_3 = 0, X_6 = 2)$. d) Determine uma distribuição estacionária. Ela é única?

5. Três bolas numeradas de 1 até 3 são distribuidas em duas urnas A e B. A cada instante, um dado honesto é lançado. Se o número que aparece na face de cima for de 1 até 3, a bola de número correspondente é trocada de urna; se, por outro lado, a face que sai para cima for 4, 5 ou 6, as urnas permanecem como estão até o instante seguinte, quando o processo todo se repete. Seja $X_n \in \{0, 1, 2, 3\}$ o número de bolas na urna A no instante n. a) Determine a matriz de transição da cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$. b) Seja π a distribuição de probabilidade em $\{0, 1, 2, 3\}$ dada por $\pi(k) = \binom{3}{k}(\frac{1}{2})^3$. Essa distribuição é estacionária?

6. Certo aparelho pode estar em três estados: 0=funcionando, 1=quebrado e aguardando início de serviço de reparo e 2=quebrado e sendo consertado. Os tempos de permanência (em minutos) em cada estado têm distribuições geométricas independentes com médias $1/\mu_a$ min, $1/\mu_b$ min e $1/\mu_c$ min, resp. Ao final do tempo de permanência num estado a escolha do estado seguinde se faz conforme a matriz de transição dada por $Q(0, 1) = Q(1, 2) = Q(2, 0) = 1$ e $Q(i, j) = 0$ caso contrário. Se X_n = estado do aparelho ("funcionando", "quebrado e aguardando início de serviço de reparo" ou "quebrado e sendo consertado"), mostre que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é uma cadeia de Markov e determine sua matrix de transição.

7. Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$ com matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por

	0	1	2	3
0	1/3	0	2/3	0
1	0	1/3	1/3	1/3
2	1/3	0	2/3	0
3	1/3	0	0	2/3

a) Classifique esta cadeia. b) Determine: $P(X_7 = 0|X_5 = 1)$. c) Determine $P(X_7 = 0|X_5 = 1, X_8 = 0)$. d) Estime $P(X_{5724659} = 0|X_0 = 2)$.

8. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma cadeia de Markov em tempo discreto no espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ com matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	0	0	0	0
1	1/2	0	1/2	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	2/3	1/3	0
4	0	0	0	2/3	1/3	0
5	0	0	1/3	0	1/3	1/3

a) Determine as classes de estados irredutíveis, classifique a cadeia de Markov em tempo discreto $\{X_n\}_{n\geq 1}$ e determine os períodos dos estados. b) Determine $P(X_{10} = 1|X_0 = 5, X_7 = 2)$. c) Determine $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 4|X_0 = 5)$.

9. Numa repartição pública há 3 funcionários identificados por funcionários A, B e C. Cada um deles trabalha durante um tempo que é uma variável aleatória com distribuição exponencial com média $\lambda = 10$ minutos e sai para " tomar um café" sendo que o tempo até seu retorno ao trabalho também tem distribuição exponencial com média $\mu = 15$ min. Assuma independência. Denote por X_t o número de funcionários trabalhando no instante t. a) Determine as taxas de transição desta cadeia. b) Considere apenas o funcionário A. Seja $\{Y_t\}$ a cadeia de Markov que assume o valor 1 no instante t (isto é, $Y_t = 1$) se o funcionário A estiver trabalhando nesse instante e o valor zero caso contrário. A distribuição uniforme no espaço de estados desta cadeia ($S = \{0, 1\}$) é estacionária?

10. Um servidor da rede USP recebe solicitações de acesso, das 6 horas até as 18 horas, conforme um processo de Poisson $\{N_t\}_{t\geq 0}$ com taxa $\lambda = 20$ horas $^{-1}$. A probabilidade de cada solicitação ser proveniente de uma localidade brasileira é de 3/4. Assuma independência. a) Qual é o número médio de solicitações no intervalo de 14 até as 16 horas? b) Determine a probabilidade de não ter havido nenhuma solicitação proveniente de localidade brasileira entre 15 e 17 horas. c) Determine $P(N(9, 12) = 4|N(8, 18) = 10)$.

11. O conserto de um carro numa oficina envolve duas etapas, executadas por dois funcionários diferentes. A primeira etapa é executada pelo funileiro e demora um tempo que é uma v.a. com uma distribuição de probabilidade exponencial com média a horas. A segunda etapa é executada pelo pintor e seu tempo de execução é uma v.a. independente da primeira com distribuição também exponencial com média b horas. A oficina é pequena e só pode atender um carro por vez, de forma que se um cliente em potencial chega ao sistema e o encontra ocupado, ele vai embora. Clientes em potencial chegam conforme um processo de Poisson com taxa λ clientes por hora. a) Represente este sistema como uma cadeia de Markov em tempo contínuo. b) No regime estacionário, qual é a proporção do tempo na qual o funileiro está trabalhando?

12. Uma oficina tem M máquinas e um funcionário responsável por sua manutenção. Suponha que o tempo de funcionamento de cada máquina tem distribuição exponencial com média $\frac{1}{\lambda}$ e o tempo gasto por um funcionário para consertar uma máquina também tem distribuição exponencial com média $\frac{1}{\mu}$. a) Qual é o número médio de máquinas funcionando (no regime estacionário)? b) Qual é a proporção do tempo que uma máquina está funcionando (também no regime estacionário)?

13. Seja $\{X_t\}_{t\geq 0}$ um processo estocástico em tempo contínuo com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$ no qual: 1) os sucessivos tempos de permanência em cada estado $i \in S$ são v.a. $\{T_i^j\}_{j\geq 1}$ independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial (T_i^j indica a duracao da j-esima permanencia no estado i) com $E(T_i^j) = \frac{1}{\mu_i} > 0$; 2) nos momentos de

transição os sucessivos saltos são determinados pela matriz de transição **P** dada por

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}$$

a) Determine as taxas do processo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ se $\mu_i = 1$, $i \in S$. b) Determine $\lim_{t\to\infty} P(X_t = 2|X_0 = 3)$.

14. Considere duas filas $M/M/1$, denotadas por $\{X_t\}_{t\geq 0}$ e $\{Y_t\}_{t\geq 0}$, com as mesmas taxas $\lambda_n = \lambda$ e $\mu_n = \mu$, com $\mu > \lambda$. Se $X_0 \neq Y_0$, use acoplamento (ou seja, construa os dois pocessos, como discutido em aula, no mesmo espaço de probabilidade tal que :"se movem independentemente até que se encontram; se movem juntos a partir deste instante") para mostrar que $|P(X_t \in A) - P(Y_t \in A)|$ vai a zero quando $t \to \infty$ para todo $A \subset \mathbf{R}$. Qual é a interpretação deste resultado?

15. Seja $\{X_t\}_{t\geq 0}$ um processo estocástico em tempo contínuo com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$ no qual: 1) os sucessivos tempos de permanência em cada estado $i \in S$ são variáveis aleatórias $\{T_i^j\}_{j\geq 1}$ independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial com parâmetro μ_i (T_i^j indica a duracao da j-esima permanência no estado i, com $E(T_i^j) = \frac{1}{\mu_i} > 0$; 2) ao final de cada tempo de permanência num certo estado, o próximo estado é escolhido conforme a matriz de transição **P** dada por

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 2 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 3 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \end{array}$$

(a) Determine as taxas de transição dessa cadeia de Markov em tempo contínuo.

(b) Suponha que todos os parâmetros dos tempos de permanência sejam iguais, ou seja $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$, para algum $\mu > 0$. Determine, se existir, $\lim_{t\to\infty} P(X_t = 2|X_0 = 3)$ (a probabilidade, na distribuição estacionária, de estar no estado 2).