

MAT0310 - Geometria III

Lista 4 - 2023

Profa. Cláudia Cueva Candido

1. Prove que dados dois pontos distintos A e B do plano, existe uma única reflexão R_M em relação a um ponto M tal que $R_M(A) = B$.
2. Dada uma reta r do plano, sabemos que $R_M(r)$ também é uma reta. Por quê? Investigue: quais podem ser as posições relativas entre r e $R_M(r)$?
3. Dados cinco pontos coplanares M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 , não colineares três a três, construa um pentágono, não necessariamente convexo, que tenha os $M_i, i = 1, \dots, 5$, como pontos médios dos seus lados.
4. Dizemos que um ponto M do plano é um ponto de simetria de um subconjunto A do plano se A é invariante por R_M , isto é, $R_M(A) = A$. Neste caso, diremos ainda que A é simétrico pela reflexão R_M . Mostre que se M e N são pontos de simetria distintos de um subconjunto A do plano, então $R_M(N)$ e $R_N(M)$ são também pontos de simetria de A. Que consequência(s) tem esse resultado?
5. Sabemos que a imagem de um triângulo por uma reflexão R_M é um triângulo. Por quê? Apesar disso, mostre que nenhum ponto do plano é ponto de simetria de um triângulo dado. (Veja definição de ponto de simetria na questão 4)
6. Dados três quaisquer dos pontos, não necessariamente distintos, A, B, C, D, prove que, sendo $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, o quarto ponto é unicamente determinado pela equação $T\vec{v} = R_D \circ R_C$.
7. Prove:
 - a) $R_D \circ R_C \circ R_B \circ R_A = \text{Id}$ se e somente se o quadrilátero ABCD é um paralelogramo (eventualmente degenerado).
 - b) usando reflexões em relação a pontos, que os pontos médios dos lados de um quadrilátero arbitrário são vértices de um paralelogramo.
8. Em que casos vale a igualdade $R_{M_n} \circ \dots \circ R_{M_1} = R_{M_1} \circ \dots \circ R_{M_n}$? Considere o caso em que n é par e o caso em que n é ímpar. Enuncie e prove os resultados encontrados.
9. Sendo A um ponto comum a duas circunferências dadas, trace, por A, uma reta que determina nas circunferências cordas distintas de mesmo comprimento.
10. Dados uma circunferência S, uma reta r e um ponto A, trace por A uma reta que corta S e r nos pontos B e C, respectivamente, tal que A é o ponto médio do segmento BC.