Vou resolver os itens (1), (2) e (3) simultaneamente.

$$\begin{cases} ax + y + bz = 2 \\ ax + ay + 4z = 4 \\ x + ay + 2z = b \end{cases}$$

Temos alguns casos:

$$\boxed{\text{I} - a = 0 \text{ e } b = 0}$$

Neste caso, o sistema é:

$$\begin{cases} y = 2 \\ 4z = 4 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

Daí $y = 2$, $z = 1$ e $x = -2z = -2$

Logo o sistema é possível e determinado com solução

$(-2, 2, 1)$.

$$\boxed{\text{II} \cdot \quad a=0 \text{ e } b\neq 0}$$

Neste caso o sistema é

$$\begin{cases} y + bz = 2 \\ 4z = 4 \\ x + 2z = b \end{cases}$$

donde segue que $z=1$ e

$y = 2 - bz$, $x = b - 2z$. Daí

o sistema é possível e determinado com solução

$(b-2, 2-b, 1)$, ou ainda,

$(-2, 2, 1) + b(1, -1, 0)$ $(b \in \mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{III} - \; a \neq 0 \text{ e } b = 0}$$

Neste caso o sistema é

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ ax + ay + 4z = 4 \\ x + ay + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow aL_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ (a-1)y + 4z = 2 \\ (a^2-1)y + 2az = -2 \end{cases}$$

Agora temos alguns subcasos:

III.1 $a=1$

Logo o sistema consiste em

$$\begin{cases} x+y = 2 \\ 4z = 2 \\ 2z = -2 \end{cases}$$

$4z=2$ implica $z = 1/2$ e
$2z=-2$ implica $z=-2$, o que
torna o sistema impossível.

III.2 $a=-1$

Logo o sistema consiste em

$$\begin{cases} -x+y = 2 \\ -2y+4z = 2 \\ -2z = -2 \end{cases}$$

Daí $z = 1$;

• $2y + 4 = 2$ implica $y = 1$ e

$x = -1$. Assim o sistema é

possível e determinado com

solução $(-1, 1, 1)$.

$$\boxed{\text{III}.3 \quad a \neq \pm 1}$$

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ (a-1)y + 4z = 2 \\ (a^2-1)y + 2az = -2 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - (a+1)L_2$$

$$\begin{cases} ax + y & = z \\ (a-1)y + 4z & = z \\ (2a - 4(a+1))z & = -2 - 2(a+1) \end{cases}$$

logo $(-2a-4)z = -2a-4$,

e temos dois subcasos:

$\boxed{\text{III}.3.1 \quad a=-2}$

Nesse caso a equação

$(-2a-4)z = -2a-4$ é do

tipo $0=0$, e o sistema é

possível e indeterminado,

com solução

$$y = \frac{4z-2}{3} \quad e \quad x = \frac{y-z}{2} = \frac{4z-8}{6}$$

Ou ainda

$$\left(\frac{4z-8}{6}, \frac{4z-2}{3}, z \right)$$

$$= \left(-\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, 0 \right) + z \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1 \right).$$

$$\boxed{\text{III}.3.1.2 \quad a \neq -2}$$

Nesse caso a equação

$(-2a-4)z = -2a-4$ implica

$z=1$. Donde segue

$$y = \frac{-2}{a-1} \quad e \quad x = \frac{1}{a}(z-y)$$

e o sistema é possível e determinado com solução

$$\left(\frac{2a+1}{a(a-1)} , \frac{-2}{a-1} , 1 \right).$$

$$\boxed{\text{IV} \quad a \neq 0 \text{ e } b \neq 0}$$

$$\begin{cases} ax + y + bz = 2 \\ ax + ay + 4z = 4 \\ x + ay + 2z = b \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow aL_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} ax + y + bz = 2 \\ (a-1)y + (4-b)z = 2 \\ (a^2-1)y + (2a-b)z = ab-2 \end{cases}$$

Temos 3 subcasos:

$\boxed{\text{IV.1} \quad a=1}$

$$\begin{cases} x + y + bz = 2 \\ (4-b)z = 2 \\ (2-b)z = b-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4-b)z = 2 \\ (2-b)z = b-2 \end{cases}$$ implica

$$\begin{cases} -bz = 2-4z \\ -bz = b-2-2z \end{cases}$$ o que

por sua vez implica

$2-4z = b-2-2z$, ou

ainda, $z = \frac{4-b}{2}$. Assim,

o sistema é possível e

indeterminado com soluções

$$\left(2-y-\frac{(4-b)b}{2}, y, \frac{4-b}{2}\right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{IV.2} \quad a = -1}$

$$\begin{cases} -x + y + bz = 2 \\ \quad -2y + (4-b)z = 2 \\ \quad\quad (-2-b)z = -b-2 \end{cases}$$

Agora temos 2 subcasos:

IV.2.1 $b=-2$

Daí a equação $(-2-b)z=-b-2$ é do tipo $0=0$. Logo o sistema é possível e indeterminado com soluções do tipo

$(z-3\,,\,3z-1\,,\,z)\,,\ z\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{IV.2.2} \quad b \neq -2}$

Daí a equação $(-2-b)z = -b-2$ implica $z=1$. Logo o sistema é possível e determinado com solução

$$\left(\frac{b-2}{2}, \frac{2-b}{2}, 1 \right).$$

$\boxed{\text{IV.3} \quad a \neq \pm 1}$

$$\begin{cases} ax + y + bz = 2 \\ (a-1)y + (4-b)z = 2 \\ (a^2-1)y + (2a-b)z = ab-2 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - (a+1)L_2$$

$$\begin{cases} ax + y + bz = 2 \\ (a-1)y + (4-b)z = 2 \\ [2a-b-(a+1)(4-b)]z = ab-2-2(a+1) \end{cases}$$

Assim, o sistema consiste em:

$$\begin{cases} ax + y + bz = 2 \\ (a-1)y + (4-b)z = 2 \\ [ab-2a-1]z = ab-2a-1 \end{cases}$$

Temos dois subcasos:

$$\boxed{\text{IV.3.1} \qquad ab-2a-1=0}$$

Nesse caso, a equação

$[ab-2a-1]z = ab-2a-1$ é do tipo $0=0$. Daí o sistema é possível e indeterminado com solução

$$\left(\frac{2-bz-\left(\frac{2-(4-b)z}{a-1}\right)}{a}, \frac{2-(4-b)z}{a-1}, z \right)$$

IV.3.2 $\quad ab - 2a - 1 \neq 0$

Nesse caso, a equação

$[ab-2a-1]z = ab-2a-1$ implica

$z=1$. Em particular o

sistema é possível e

determinado com solução

$$\left(\frac{b-2}{a+1} ; \frac{b-2}{a-1} , 1 \right).$$

Em síntese, temos:

I - $a=0$ e $b=0$:

SPD com solução $(-2, 2, 1)$;

II - $a=0$ e $b\neq 0$:

SPD com solução $(b-2, 2-b, 1)$,

ou $(-2, 2, 1) + b(1, -1, 0)$ $(b \neq 0)$.

III - $a\neq 0$ e $b=0$:

III.1: $a=1$: SI

III.2: $a\neq -1$: SPD com solução

$(-1, 1, 1)$.

III.3: $a\neq \pm 1$:

III.3.1: $a\neq -2$: SPI com

solução $\left(\frac{4z-8}{6}, \frac{4z-2}{3}, z\right)$, ou ainda

$$\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) + z\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1\right), \quad z \in \mathbb{R}$$

III.3.1.2: $a \neq -2$: SPD com

solução

$$\left(\frac{2a+1}{a(a-1)}, \frac{-2}{a-1}, 1\right), \text{ ou}$$

$$(0, 0, 1) + z\left(\frac{2a+1}{2a(a-1)}, -\frac{1}{a-1}, 0\right).$$

IV: $a \neq 0$ e $b \neq 0$:

IV.1: $a = 1$: SPI com solução

$$\left(2 - y - \frac{(4-b)b}{2} ; y, \frac{y-b}{2}\right), \text{ ou}$$

$$(2,0,0) + y\left(-1, 1, \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{(4-b)b}{2}, 0, -\frac{b}{2}\right)$$

$(y \in \mathbb{R})$.

IV.2: $a = -1$:

IV.2.1: $b = -2$: SPI com

solução $(z-3, 3z-1, z)$ ou

$$(-3,-1,0) + z(1,3,1) \quad (z \in \mathbb{R}).$$

IV.2.2: $b \neq -2$: SPD com solução

$$\left(\frac{b-2}{2}, \frac{2-b}{2}, 1\right), \text{ ou ainda}$$

$$(-1,1,1) + b\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right).$$

IV.3 : $a \neq \pm 1$:

IV.3.1: $ab - 2a - 1 = 0$: SPI

com solução

$$\left(\frac{2 - bz - \frac{2-(4-b)z}{a-1}}{a}, \frac{2-(4-b)z}{a-1}, z \right)$$

IV.3.2 : $ab - 2a - 1 \neq 0$: SPD com

solução $\left(\frac{b-2}{a+2}, \frac{b-2}{a-1}, 1 \right)$.