Teorema da Função Implícita

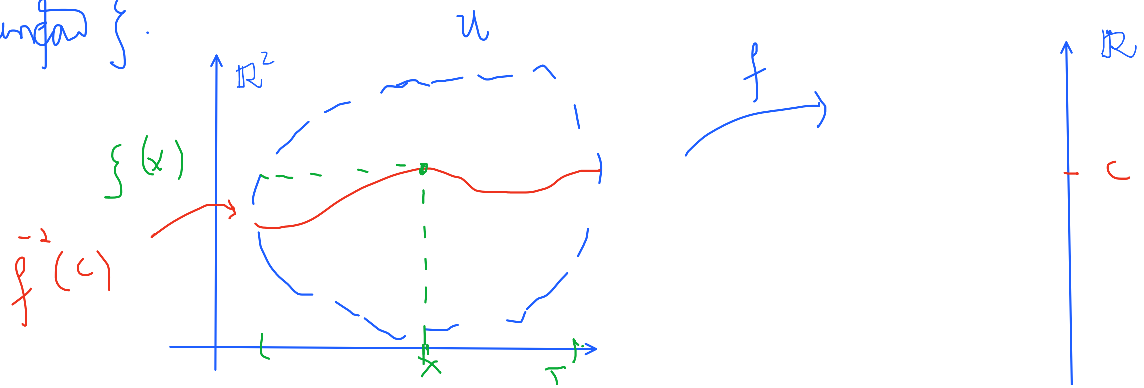
Vamos começar o estudo analisando funções definidas em $\mathbb{R}^2$.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, U aberto em $\mathbb{R}^2$ e $c \in \mathbb{R}$ fixado. Dizemos que a equação

$$f(x, y) = c$$

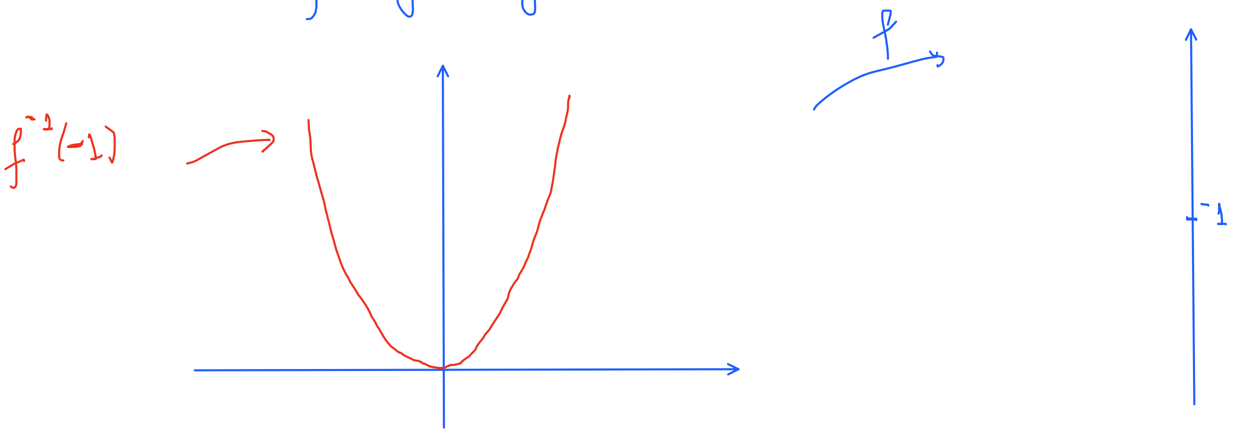
define y implicitamente como função de x quando existe uma função $\xi : I \to \mathbb{R}$ definida no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = c \iff y = \xi(x),$$ ou seja, $f^{-1}(c)$ é o gráfico da função ξ.



Exemplo: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = y - x^2 - 1$$



$$f^{-1}(-1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = -1\}$$

$$y - x^2 - 1 = -1$$
$$y - x^2 = 0$$
$$y = x^2$$

Obviamente, a equação $f(x,y) = -1$ define y implicitamente como função de x de tal forma que $f^{-1}(-1)$ é o gráfico dessa função.

Nem sempre uma equação do tipo $\boxed{f(x,y) = c}$ define y (ou x) implicitamente como função de x (ou de y), por exemplo

$$f(x,y) = \boxed{x^2 + y^2 + 1 = 0}.$$

ou ainda

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$$
$$f^{-1}(0) = \phi$$

$$f(x,y) = \boxed{x^2 + y^2 + 1 = 1}, \quad f^{-1}(1) = \{(0,0)\}$$

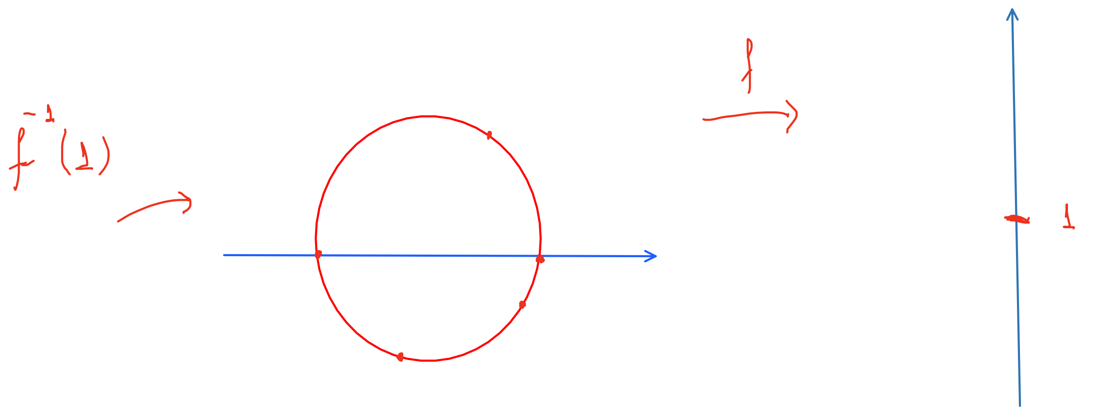
É mais comum que a equação $f(x,y) = c$ defina apenas localmente, y como função de x ou x como função de y.

Por exemplo:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad c = 1.$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Estamos, portanto, falando da equação $x^2 + y^2 = 1$.



$f^{-1}(c)$ não pode ser visto como gráfico de função $y = \xi(x)$ ou $x = \eta(y)$.

Entretanto, se considerarmos os seguintes abertos de $\mathbb{R}^2$:

$U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \rightsquigarrow y = \sqrt{1-x^2}, \ (x,y) \in U_1$

$U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} \rightsquigarrow y = -\sqrt{1-x^2}, \ (x,y) \in U_2$

$U_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \longrightarrow x = \sqrt{1-y^2}, \ (x,y) \in U_3$

$U_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\} \rightsquigarrow x = -\sqrt{1-y^2}, \ (x,y) \in U_4$

Como $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = f^{-1}(1)$ está contido na reunião desses abertos $S^1 \subset U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$, cada ponto $(x_0, y_0) \in S^1$ $f(x_0,y_0) = 1$ está contido em algum aberto U_i e $f^{-1}(1) \cap U_i$ é o gráfico de uma função $(y = \xi(x)$ ou $x = \eta(y))$.

Desta forma, dizemos que a equação $x^2 + y^2 = 1$ define localmente y como função de x ou x como função de y.

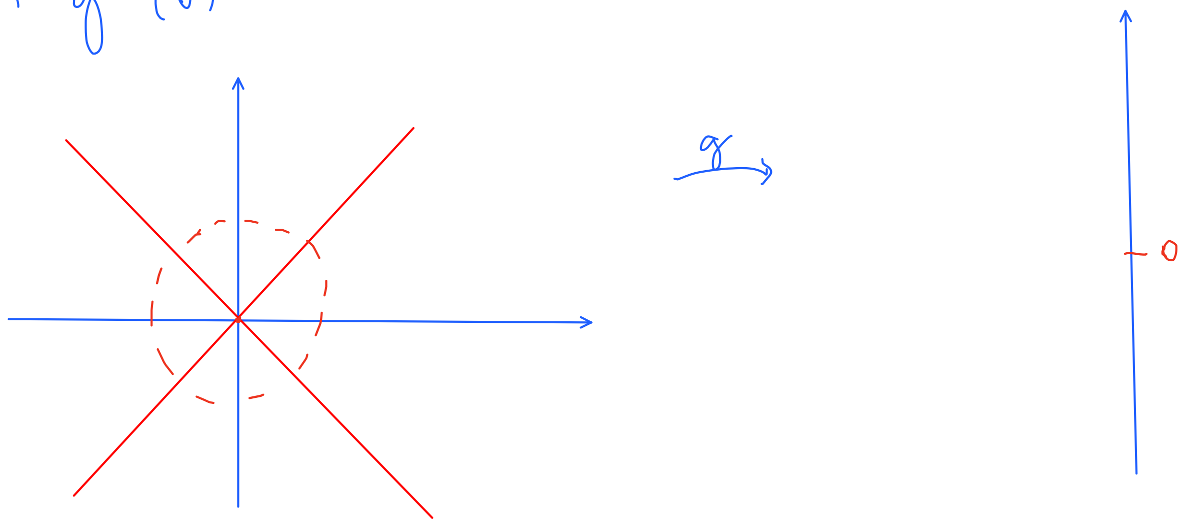
Observe que, para a equação

$$\boxed{x^2 - y^2 = 0},$$

Podemos considerar $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $c = 0$

$$g(x,y) = x^2 - y^2$$

Observe que $(0,0) \in g^{-1}(0)$ mas não podemos definir nem y como função de x, nem x como função de y considerando uma vizinhança de $(0,0)$, pois as retas $y = x$ e $y = -x$ estão em $g^{-1}(0)$.



Dessa forma, nenhum aberto V contendo a origem satisfaz $g^{-1}(0) \cap V$ é gráfico de uma função $y = \xi(x)$ ou $x = \eta(y)$.

O teorema da Função Implícita para funções reais de duas variáveis reais é enunciado da seguinte maneira:

Teorema da função implícita: Sejam $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k $(k \geq 1)$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, e $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = c$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Então existe um retângulo aberto $I \times J$, de centro (x_0, y_0), tal que $f^{-1}(c) \cap (I \times J)$ é o gráfico de uma função $\xi : I \to J$ de classe C^k e tem-se

$$\xi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}$$

$f^{-1}(c) \cap (I \times J)$ é o gráfico de uma função $\xi : I \to J$

significa que para cada $x \in I$, existe um único $y \in J$ tal que $f(x,y) = c$, ou seja, $f(x, \xi(x)) = c$ e desta forma

ξ é definida implicitamente no aberto $I \times J$ pela equação $f(x, y) = c$.

Faremos a demonstração para o caso geral, onde $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.
Para isso, fazemos, inicialmente, a seguinte observação:

um ponto $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ será escrito da seguinte forma

$$z = (x, y)$$

com $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$.

Teorema: Dada a função $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, de classe C^k $(k \geq 1)$ no aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, seja $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ tal que $f(x_0, y_0) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Existem uma bola $B = B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ e um intervalo $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ com as seguintes propriedades:

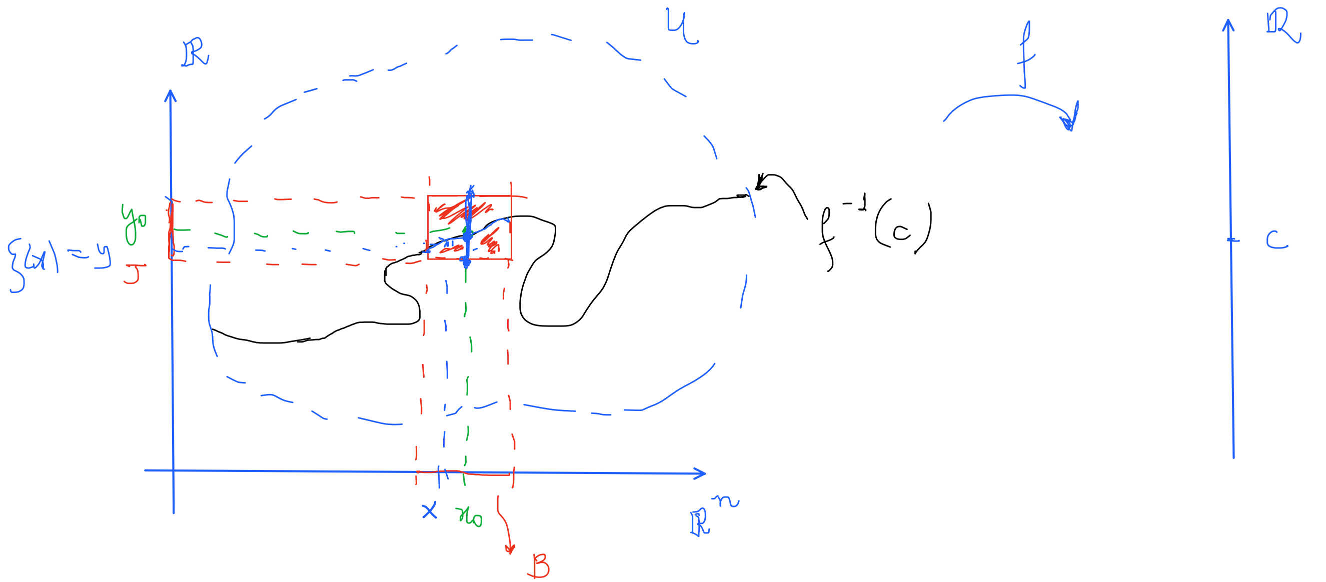
1) $B \times \overline{J} \subset \mathcal{U}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in B \times \overline{J}$;

2) Para cada $x \in B$ existe um único $y = \xi(x) \in J$ tal que

$$f(x, \xi(x)) = c.$$

A função $\xi: B \to J$, assim definida, é de classe C^k e suas derivadas parciais em cada ponto $x \in B$ são dadas por

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}.$$



Demonstração: Como $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, então $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) < 0$.

Vamos supor que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. O caso em que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) < 0$ é análogo.

Como f é pelo menos de classe C^1, $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $\mathcal{U}$.

Podemos encontrar $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ tal que se

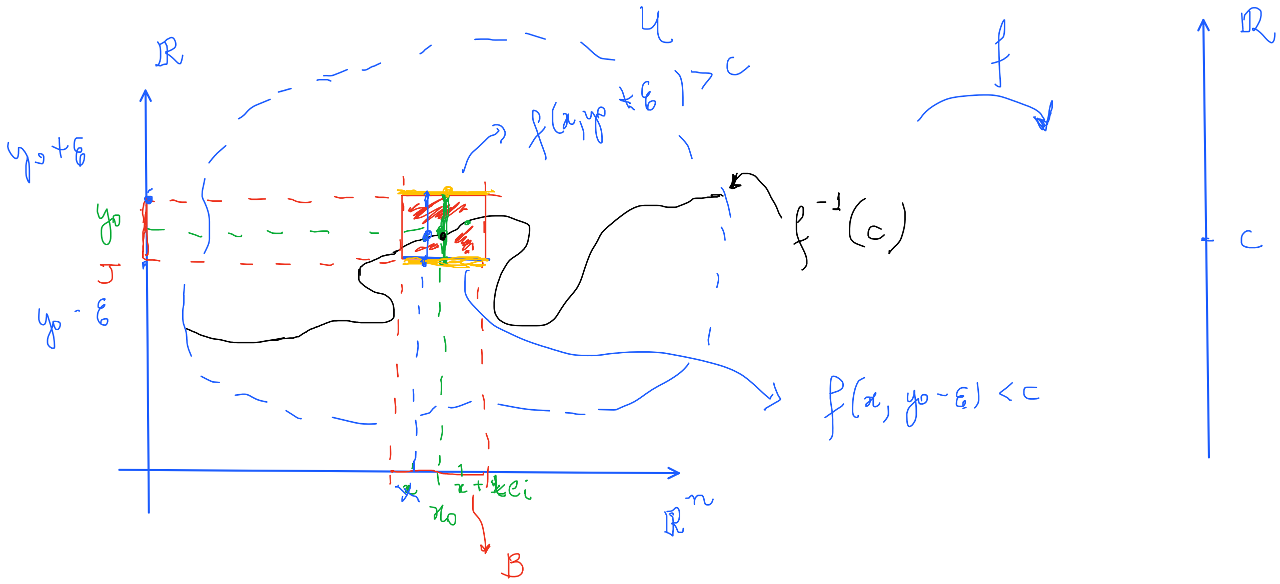
$x \in B(x_0, \delta) = B$ e $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) = J$ (norma do max)

de tal modo que $B \times \bar{J} \subset \mathcal{U}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$ para $(x,y) \in B \times \bar{J}$.

Lembrando do significado de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$, observamos que para todo $x \in B$, $y \mapsto f(x, y)$ é crescente em $\bar{J}$ e como $f(x_0, y_0) = c$, temos que $f(x_0, y_0 - \varepsilon) < c$ e $f(x_0, y_0 + \varepsilon) > c$.

Agora, olhando para a variável x e lembrando que f é contínua, diminuindo δ, se necessário, é possível supor que

$f(x, y_0 - \varepsilon) < c$ e $f(x, y_0 + \varepsilon) > c$, $\forall x \in B$.



Usando o Teorema do Valor Intermediário, para cada $x \in B$, $\exists!\ y \in \bar{J}$ tal que $f(x,y) = c$. Vamos chamar este y de $\xi(x)$.

Temos, então, definida uma transformação

$$\xi : B \to J$$
$$x \mapsto \xi(x) = y$$

com $f(x, \xi(x)) = c$.

Vamos assumir que ξ é contínua. Provaremos isso depois.

Vamos mostrar que ξ tem derivadas parciais em todo $x \in B$.
Temos que calcular $(x+te_i \in B)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\xi(x+te_i)-\xi(x)}{t}$$

Observamos que

$$f(x+te_i, \xi(x+te_i)) = f(x, \xi(x)) = c$$

Como $\xi(x+te_i) = \xi(x) + K(t) = \xi(x) + K$, temos que

$$0 = f(x+te_i, \xi(x)+K) - f(x,\xi(x)) \overset{\text{pelo TVM},\ \exists\, \theta \in (0,1)/}{=}$$

$f(a+v)-f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta v)\alpha_i$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta te_i, \xi(x)+\theta K).t + \frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta te_i, \xi(x)+\theta K).K$$

Observe que $K = K(t) = \xi(x+te_i) - \xi(x)$, então

$$\frac{\xi(x+te_i)-\xi(x)}{t} = \frac{K}{t} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta te_i, \xi(x)+\theta K)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta te_i, \xi(x)+\theta K)}$$

Como ξ é contínua, $\lim_{t\to 0} K(t) = 0$ e a continuidade das derivadas parciais nos fornecem que

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\xi(x+te_i) - \xi(x)}{t} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Por esta igualdade, se $f \in C^k$, $\xi \in C^k$.

Mostrando a continuidade de ξ

Observe que $f^{-1}(c) \cap (B \times \bar{J}) = f^{-1}(c) \cap (B \times \bar{J})$ é o gráfico de $\xi : B \to J$. (ou $\xi : B \to \bar{J}$)

Sejam $x_0 \in B$ e $y_0 = \xi(x_0)$, i.e., $c = f(x_0, \xi(x_0)) = f(x_0, y_0)$ e y_0 é único / $f(x_0, y_0) = c$

Seja $x_n \to x_0$ uma seq de elementos em B. Queremos mostrar que $\xi(x_n) = \xi(x_0) = y_0$.

Como $(\xi(x_n))$ é uma sequência em $J \subset \overline{J}$, então ela é limitada.

Vamos mostrar que toda subsequência $(\xi(x_n))_{n \in N'}$ convergente em $\mathbb{R}$, $\lim_{n \in N_j} \xi(x_n) = y$, devemos concluir que $y = y_0$.

Primeiramente, $y \in \overline{J}$. Pela continuidade da f,

$$\lim_{n \in N_1} f(x_n, \xi(x_n)) = (x_0, y),$$

mas por outro lado, $(x_n, \xi(x_n)) \in f^{-1}(c)$, logo, $f(x_n, \xi(x_n)) = c$, com $n \in N_1$.

$$\therefore f(x_0, y) = c.$$

Pela unicidade de y_0, $y = y_0 = \xi(x_0)$

OBS: Uma sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ é convergente se, e somente se, possui um único valor de aderência.

O mesmo raciocínio poderia ser feito com qualquer outra coordenada. Aqui, escrevemos a última coordenada como função das n primeiras.

Se para algum inteiro $i \in [1, \dots, n+1]$ tivermos

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(z_0) \neq 0$ onde $z_0 \in U$ e $f(z_0) = c$,

existirá um aberto $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com $z_0 \in V$, tal que, para $z \in V$, a equação $f(z) = c$ definirá $x_i = \xi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$ como função dos outros n coordenadas e $f^{-1}(c) \cap V$ será o gráfico dessa função ξ, com $\xi \in C^k$.

De um modo geral, se $\text{grad}\, f(z_0) \neq 0$ e $f(z_0) = c$, então existe V aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $z_0 \in V$ tal que $f^{-1}(c) \cap V$ é o gráfico de uma função real de n variáveis, de classe C^k.