6 Determinação numérica de auto-valores

* Autovalores e autovetores:

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x} \quad \begin{cases} \vec{x} \rightarrow \text{autovetores} \\ \lambda \rightarrow \text{autovalores} \end{cases}$$

$$\underbrace{(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}}_{} \longrightarrow \text{se } \vec{x} \neq \vec{0}, \quad \underbrace{\det(A - \lambda I) = 0}_{}$$

2 para cada λ, acha $\vec{x}$.

1 resolve e acha λ's (polinômio característico)

ex) $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ $\quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 3 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(8-\lambda)(7-\lambda) - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda - 8\lambda + 56 - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 10 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 10$: $\begin{bmatrix} 8-10 & 3 \\ 2 & 7-10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$-2x_1 + 3x_2 = 0$, $\quad x_1 = \alpha$, $\quad x_2 = \frac{2}{3}\alpha$, $\quad \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 5$: $\begin{bmatrix} 8-5 & 3 \\ 2 & 7-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$3x_1 + 3x_2 = 0$, $\quad x_1 = \beta$, $\quad x_2 = -\beta$ $\quad \vec{x} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

obs: • traço$(A) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(A)$, $A_{m\times m}$

• $A_{m\times m}$ possui m autovalores (complexos, repetidos)

• $\det(A) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i(A) \longrightarrow A$ singular $\Leftrightarrow \lambda_1 = 0$

• se $\lambda_i = \lambda_j$, $\vec{x}_i$ e $\vec{x}_j$ são L.I.

⊛ • se A é diagonal ou triangular (sup. ou inf.), os autovalores são os elementos da diagonal.

* Base de um espaço vetorial:

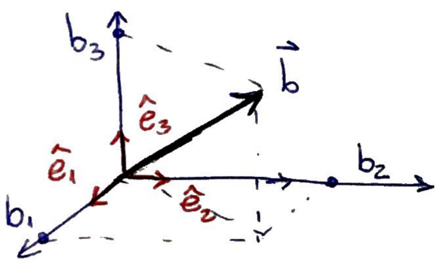
interp. 1) $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_m \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}^{\vec{x}} = \vec{b}$$

$$\vec{b} = \vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \dots + \vec{a}_m x_m$$

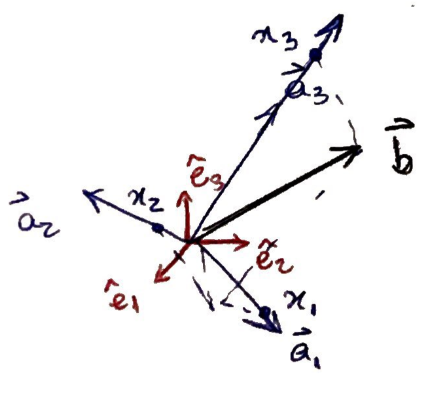
$$\vec{b} = I\vec{b} = \hat{e}_1 b_1 + \hat{e}_2 b_2 + \dots + \hat{e}_m b_m$$

$$\underbrace{\begin{array}{cccc} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & & \hat{e}_m \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{I} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\vec{b}} = \vec{b}$$



$\vec{b}$ → coeficientes da base canônica

$\vec{x}$ → coeficientes da base A



similarmente: $\vec{x} = P\,[\vec{x}]_P$

- $P_{n \times n}$ não-singular: matriz mudança de base
- $[\vec{x}]_P \rightarrow$ vetor $\vec{x}$ na base P.
- vetores colunas de $P \rightarrow \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n \rightarrow$ base.

$$[\vec{x}]_P = P^{-1}\vec{x}$$

---

interp. 2) $A\vec{x} = \vec{b}$

A é matriz que representa uma transformação linear

- rotação: 
- reflexão: 
- cisalhamento: 
- estiramento / contração 

$\rightarrow$ transf. lineares preservam a origem, o paralelismo e a colinearidade. (retas permanecem)

$\rightarrow$ os vetores que sofrem apenas reflexão e/ou estiramento/contração (permanecem na mesma "linha" após a transformação) são os autovetores de A. (reflexão: autovalor -1, estiramento/contração: autovalor é a taxa).

mesma transf. em outra base

$$\begin{cases} B[\vec{x}]_P = [\vec{b}]_P \qquad B\underbrace{P^{-1}\vec{x}}_{[x]_P} = \underbrace{P^{-1}\vec{b}}_{[\vec{b}]_P} \\ \underbrace{PBP^{-1}}_{A \text{ na base } P}\vec{x} = \vec{b} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
\vec{x} & & \vec{b} \arrow[ll, "A"'] \arrow[d, "P"] \\
[\vec{x}]_p \arrow[u, "P^{-1}"] & & [\vec{b}]_b \arrow[ll, "B"]
\end{tikzcd}$$

$$A = PBP^{-1}$$

- Se $A = PBP^{-1}$, dizemos que B é semelhante à A.
- B e A representam a mesma transformação em bases diferentes.
- A e B possuem os mesmos auto<u>valores</u>

$$\det(A - \lambda I) = \det(PBP^{-1} - \lambda I) = \det(PBP^{-1} - \lambda I PP^{-1})$$

$$= \det(PBP^{-1} - P\lambda I P^{-1}) = \det(P(B - \lambda I)P^{-1}) =$$

$$= \det(P)\det(B - \lambda I)\det(P^{-1}) = \cancel{\det(P)}\det(B - \lambda I)\frac{1}{\cancel{\det(P)}} =$$

$$= \det(B - \lambda I) \rightarrow \text{mesma eq. característica.}$$

- A e B possuem o mesmo determinante:

$$\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P)\det(B)\det(P^{-1})$$

$$= \cancel{\det(P)}\det(B)\frac{1}{\cancel{\det(P)}} = \det(B)$$

- autovalor e determinante são propriedades da transf. linear independente da base utilizada.
- autovetores: $P^{-1}A\vec{x} = P^{-1}\lambda\vec{x}$ $\quad P^{-1}APP^{-1}\vec{x} = \lambda P^{-1}\vec{x}$

$$(P^{-1}AP)P^{-1}\vec{x} = \lambda(P^{-1}\vec{x}) \qquad B(P^{-1}\vec{x}) = \lambda(P^{-1}\vec{x})$$

$$B[\vec{x}]_P = \lambda[\vec{x}]_P.$$

* Decomposição de Schur:

- Teorema: toda matriz $A_{n\times n}$ é similar a uma matriz triangular superior. Além disso, a matriz mudança de base P pode ser escolhida como uma matriz ortogonal (unitária no caso complexo), cujos vetores coluna formam uma base ortonormal.

- matriz ortogonal: $Q = [\vec{q}_1 \; \vec{q}_2 \dots \vec{q}_n]$

$$\vec{q}_i^{\,T} \vec{q}_j = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{se } Q \in \mathbb{R}^{n\times n}: & Q^T Q = Q Q^T = I, \quad Q^{-1} = Q^T \\ \text{se } Q \in \mathbb{C}^{n\times n}: & Q^H Q = Q Q^H = I \quad Q^{-1} = Q^H \end{cases}$$

↳ hermitiano transposto

↳ matriz unitária

- $A = QTQ^T$ ou $A = QTQ^H$

- a decomposição de Schur não é única.

- se A é matriz <u>normal</u> (simétrica, anti-simétrica, unitária...)

$$A = Q \Lambda Q^T$$

onde Λ é matriz diagonal. Dizemos que A é diagonalizável.

- A é diagonalizável se e somente se A possui n autovetores L.I.

* Cálculo numérico de autovetores: Quarteroni: 6.5
Franco: 7.7

⇒ transformar A em T (triangular ou diagonal), autovalores "aparecerão" na diagonal principal.

⇒ Para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não-singular: decomposição QR.

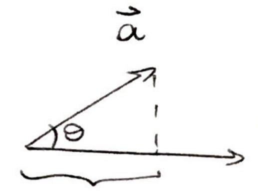
⇒ Decomposição QR: Quarteroni: 5.7

$$A = QR \begin{cases} Q \to \text{ortogonal (vetores coluna ortonormais)} \\ R \to \text{triangular superior.} \end{cases}$$

- método de Gram-Schmidt:

$$A = \left[\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n\right] \qquad Q = \underbrace{\left[\vec{q}_1 \ \vec{q}_2 \ \dots \ \vec{q}_n\right]}_{\text{ortonormais}}$$

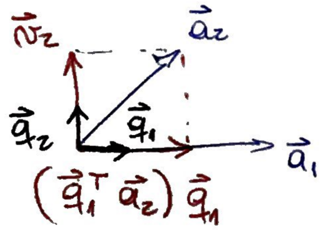
mesmo espaço vetorial



$\|\vec{a}\| \cos\theta = \dfrac{\vec{a}^T \vec{b}}{\|\vec{b}\|}$

$\vec{a}^T \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos\theta$

① $\vec{q}_1 = \dfrac{\vec{a}_1}{\underbrace{\|\vec{a}_1\|}_{r_{11}}}$



② $\vec{v}_2 = \vec{a}_2 - \underbrace{(\vec{q}_1^T \vec{a}_2)}_{r_{12}} \vec{q}_1$

$\vec{q}_2 = \dfrac{\vec{v}_2}{\underbrace{\|\vec{v}_2\|}_{r_{22}}}$

$\|\vec{a}_1\| = (\vec{q}_1^T \vec{a}_1)$

$\|\vec{v}_2\| = (\vec{q}_2^T \vec{a}_2)$

$\vdots$

$\|\vec{v}_n\| = (\vec{q}_n^T \vec{a}_n)$

③ $\vec{v}_3 = \vec{a}_3 - \underbrace{(\vec{q}_1^T \vec{a}_3)}_{r_{13}} \vec{q}_1 - \underbrace{(\vec{q}_2^T \vec{a}_3)}_{r_{23}} \vec{q}_2$

$\vec{q}_3 = \dfrac{\vec{v}_3}{\underbrace{\|\vec{v}_3\|}_{r_{33}}}$

$\vdots$

ⓝ $\vec{v}_n = \vec{a}_n - \underbrace{(\vec{q}_1^T \vec{a}_n)}_{r_{1n}} \vec{q}_1 - \underbrace{(\vec{q}_2^T \vec{a}_n)}_{r_{2n}} \vec{q}_2 - \dots - \underbrace{(\vec{q}_{n-1}^T \vec{a}_n)}_{r_{n-1,n}} \vec{q}_{n-1}$

$\vec{q}_n = \dfrac{\vec{v}_n}{\underbrace{\|\vec{v}_n\|}_{r_{nn}}}$

→ a cada passo, a projeção do vetor $\vec{a}_k$ nos vetores ortonormais já definidos $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \cdots, \vec{q}_{k-1}\}$ é removida de $\vec{a}_k$, restando um vetor ortogonal $\vec{v}_k$.

→ se $\vec{v}_n = 0$, $\vec{a}_n$ não é L.I., não há parte ortogonal em $\vec{a}_n$, utiliza outro método.

componentes de $\vec{a}_k$ na base Q

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = (\vec{q}_1^{\,T} \vec{a}_1)\,\vec{q}_1 \\ \vec{a}_2 = (\vec{q}_1^{\,T} \vec{a}_2)\,\vec{q}_1 + (\vec{q}_2^{\,T} \vec{a}_2)\,\vec{q}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n = \sum_{j=1}^{n} (\vec{q}_j^{\,T} \vec{a}_n)\,\vec{q}_j \end{cases}$$

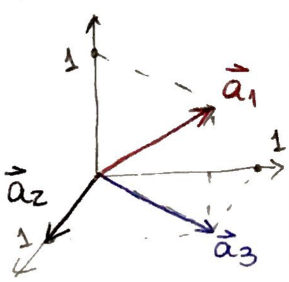
$$A = QR$$

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \cdots & \vec{q}_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} (\vec{q}_1^{\,T}\vec{a}_1) & (\vec{q}_1^{\,T}\vec{a}_2) & \cdots & (\vec{q}_1^{\,T}\vec{a}_n) \\ 0 & (\vec{q}_2^{\,T}\vec{a}_2) & \cdots & (\vec{q}_2^{\,T}\vec{a}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & (\vec{q}_n^{\,T}\vec{a}_n) \end{bmatrix}}_{R}$$

$\vec{a}_j = Q\,\vec{r}_j$

↳ coef. da comb. linear dos vetores coluna de Q.

ex) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



$\vec{q}_1 = \dfrac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ $\quad r_{11} = \|\vec{a}_1\| = \sqrt{3}$

algoritmo:

$\vec{q}_1 = \dfrac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}$

for $j = 2:n$
  $\vec{v}_j = \vec{a}_j$
  for $i = 1 : j-1$
    $\vec{v}_j = \vec{v}_j - (\vec{q}_i^{\,T}\vec{a}_j)\vec{q}_i$
    $r_{ij} = (\vec{q}_i^{\,T}\vec{a}_j)$
  end
  $\vec{q}_j = \vec{v}_j / \|\vec{v}_j\|$
  $r_{jj} = \|\vec{v}_j\|$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{r_{12} = 1/\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/3\\-1/3\\-1/3\end{bmatrix}$$

$$\vec{q}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}/3}\begin{bmatrix}2/3\\-1/3\\-1/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{bmatrix} \qquad r_{22} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}_{r_{13} = 2/\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix}2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}_{r_{23} = 1/\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2/3\\2/3\\2/3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1/3\\-1/6\\-1/6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1/2\\-1/2\end{bmatrix}$$

$$\vec{q}_3 = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}/2}\begin{bmatrix}0\\1/2\\-1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix} \qquad r_{33} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Q = \begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0\\1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3}\\0 & \sqrt{6}/3 & 1/\sqrt{6}\\0 & 0 & \sqrt{2}/2\end{bmatrix}$$

$A = QR$ ✓ (cheque no MATLAB)

- no MATLAB / OCTAVE: `[Q,R] = qr(A)`

- método de Gram-Schmidt modificado: (mais estável numericamente): a cada iteração k, remove as projeções de todos os $\vec{a}_i$'s de uma dada direção $\vec{q}_k$, criando vetores temporários $\vec{v}_i^{(k)}$.

$V = A$

for $j = 1 : n$

$\vec{q}_j = \frac{\vec{v}_j}{\|\vec{v}_j\|}$ (define $\vec{q}_j$)

for $k = j+1 : n$

$\vec{v}_k = \vec{v}_k - (\vec{q}_j^{\,T} \vec{v}_k)\vec{q}_j$ (remove projeções em $\vec{q}_j$)

end

end.

— // —

⟹ Cálculo de autovalores: para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não-singular com autovalores reais

* Método QR (de Francis)

* Quarteroni: 6.5

* Franco: 7.7

$A^{(0)} = A$

while (erro > tol)

$[Q^{(k)}, R^{(k)}] = qr(A^{(k)})$

$A^{(k+1)} = R^{(k)} Q^{(k)}$

$erro = \max_{i>j} |a_{ij}^{(k+1)}|$ ⟶ calcula enquanto os valores abaixo da diag. principal são maiores que a tolerância.

end

elementos abaixo da diag. principal.

$$A^{(k+1)} = RQ = Q^{-1}\underbrace{QR}_{A^{(k)}}Q = Q^{-1}A^{(k)}Q$$

logo $A^{(k+1)}$ é similar a $A^{(k)}$ (mesmos autovalores).

Como Q é matriz ortogonal:

$$\underbrace{A^{(k+1)}}_{\text{matriz triangular (Dec. Schur)}} = Q^T A^{(k)} Q.$$

obs: • se $|\lambda_i| = |\lambda_j|$, o método não converge.

• a taxa de convergência decai com a proximidade de $|\lambda_i|$ e $|\lambda_j|$.

• para A singular ou $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$: modificações no método QR.

---

* Método da potência: $\begin{cases} \text{Quarteroni: } 6.2 \\ \text{Franco: } 7.4 \end{cases}$

• se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com n autovetores L.I. (diagonalizável).

• se somente o maior autovalor é necessário

$$\underline{\underline{|\lambda_1| >}} |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Quociente de Rayleigh: $\mu(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}^T (A\vec{x})}{\|\vec{x}\|^2}$

se $\vec{x}$ é autovetor:

• $\mu(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}^T(\lambda\vec{x})}{\|\vec{x}\|^2} = \dfrac{\lambda\, \vec{x}^T\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} = \lambda \dfrac{\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^2} = \lambda$.

• $\vec{y} = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ também é autovetor

$$A\vec{y} = \lambda \vec{y} \qquad \vec{y}^T (A\vec{y}) = \lambda\, \vec{y}^T \vec{y}$$

$$\lambda = \vec{y}^T (A\vec{y})$$

• se A é não-singular, $\lambda_i \neq 0$ e $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ $\quad AA^{-1}\vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x}$

$A^{-1}\vec{x} = 1/\lambda\, \vec{x}$

algoritmo: $\vec{x}^{(0)}$ = chute inicial

iterações em K:

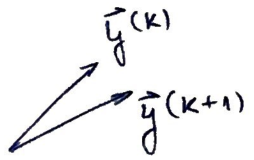
$$\begin{cases} \vec{y}^{(K)} = \dfrac{\vec{x}^{(K)}}{\|\vec{x}^{(K)}\|} & \text{(normaliza o vetor)} \\[2ex] \lambda^{(K)} = \vec{y}^{(K)T}(A\vec{y}^{(K)}) & \text{(autovalor correspondente)} \\[2ex] \vec{x}^{(K+1)} = A\vec{y}^{(K)} & \text{(novo vetor é a transf. linear do vetor anterior).} \end{cases}$$

para $K \to \infty$:

$$\begin{cases} \lambda^{(K)} \to \text{maior autovalor em módulo} \\ \vec{y}^{(K)} \to \text{autovetor correspondente} \end{cases}$$

- ao multiplicar um vetor $\vec{x}$ normalizado por A à esquerda (transformar $\vec{x}$), nos aproximamos do autovetor de maior autovalor em módulo $\to$ potências de A.

- critério de parada: • $|\lambda^{(K+1)} - \lambda^{(K)}| < \varepsilon$



• $\left| \left| \vec{y}^{(K+1)T}\, \vec{y}^{(K)} \right| - 1 \right| < \varepsilon$

* Método da potência inversa:

- se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com n autovetores L.I. e não-singular
- se somente o menor autovalor é necessário.

$$\lambda_i(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_i(A)} \to$$ menor autovalor de A é o inverso no maior autovalor de A^{-1}.

algoritmo: $\vec{x}^{(0)}$ = chute inicial $B = inv(A)$

$$\vec{y}^{(k)} = \frac{\vec{x}^{(k)}}{\|\vec{x}^{(k)}\|}$$

$$\lambda^{(k)} = \vec{y}^{(k)T} (\underbrace{A^{-1}}_{B}\vec{y}^{(k)})$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = \underbrace{A^{-1}}_{B} \vec{y}^{(k)} \longrightarrow \underbrace{A\vec{x}^{(k+1)} = \vec{y}^{(k)}}$$

solução de um sistema de eq. linear. K vezes $\Rightarrow$ decomposição LU.

para $K \to \infty$ $\begin{cases} 1/\lambda^{(k)} \to \text{menor autovalor em módulo} \\ \vec{y}^{(k)} \to \text{autovetor correspondente.} \end{cases}$

* Método da potência com shift (deslocamento):

autovalores $\begin{cases} A : \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \\ (A + \alpha I) : \{\lambda_1 + \alpha, \lambda_2 + \alpha, \ldots, \lambda_n + \alpha\} \end{cases}$

se $B = (A - \alpha I)^{-1}$ $\quad \gamma_j = \dfrac{1}{\lambda_j - \alpha}$ são autovalores de B.

logo, se α está próximo de λ_j, γ_j está próximo do maior autovalor de B.

$\alpha \Rightarrow$ deslocamento.

para achar o autovalor mais próximo de α, aplica o método das Potências em $B = (A - \alpha I)^{-1}$. $\lambda = \dfrac{1}{\gamma} + \alpha$

* Convergência do método da potência:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com n autovetores L.I. (diagonalizável) $(\vec{v}_i)$
- podemos usar os autovetores como base e escrever qualquer $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ como:

$$A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$$

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n$$

$$A\vec{x} = \alpha_1 \underbrace{A\vec{v}_1}_{\lambda_1 \vec{v}_1} + \alpha_2 \underbrace{A\vec{v}_2}_{\lambda_2 \vec{v}_2} + \ldots + \alpha_n \underbrace{A\vec{v}_n}_{\lambda_n \vec{v}_n}$$

$$A\vec{x} = \alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n \vec{v}_n$$

similarmente

$$A^k \vec{x} = \alpha_1 \lambda_1^k \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n^k \vec{v}_n$$

$$= \lambda_1^k \left(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \vec{v}_2 + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \vec{v}_n \right.$$

se $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \to 0 \quad , i \neq 1 .$$

$$A^k \vec{x} = \lambda_1 \alpha_1 \vec{v}_1$$

$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1$ é autovetor do maior autovalor λ_1.

* Matrizes simétricas : $S = S^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- todos os n autovalores são números reais
- todos os n autovetores podem ser escolhidos ortogonais (ortonormais)
- Teorema espectral :

$$S = Q \Lambda Q^T , \begin{cases} \Lambda \to \text{diagonal} \\ Q \to \text{ortogonal} \end{cases}$$

- para qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$A A^T = S_1 \qquad A^T A = S_2$$

- caso complexo: matriz Hermitiana:

$$S = \overline{S^T} = S^H$$

(mesma propriedade de autovalores / vetores)

* Matrizes anti-simétricas: $R = -R^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- todos os elementos da diagonal principal são zero
- todos os autovalores são imaginários puros (ou zero)
- autovetores ortogonais (complexos)
- Teorema espectral:

$$R = U \Lambda U^H \begin{cases} \Lambda \to \text{diagonal} \\ U \to \text{unitária} \end{cases}$$

- Caso complexo: matriz anti-Hermitiana:

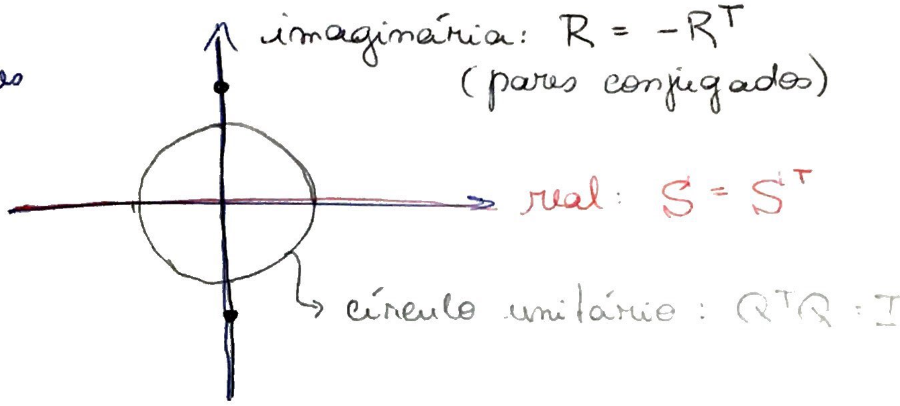
$$R = -\overline{R^T} = -R^H$$

(mesma propriedade de autovalores / vetores)

* Matrizes ortogonais: $Q^TQ = QQ^T = I$, $Q^T = Q^{-1}$

- $|\lambda| = 1$ (rotação)
- autovetores ortogonais (imaginários)
- complexo: unitária: $U^H U = U U^H = I$

plano complexo: autovalores



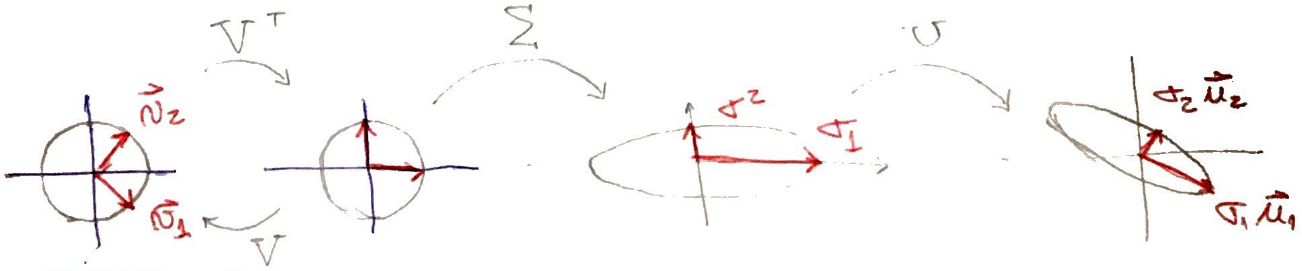
---

* Decomposição SVD: (singular value decomp.)

$$\begin{tikzcd} \vec{x} & \vec{b} \arrow[l, "A"'] \arrow[d, "U"] \\ {[\vec{x}]_V} \arrow[u, "V^T = V^{-1}"] & {[\vec{b}]_U} \arrow[l, "\Sigma"] \end{tikzcd}$$

$$A = U \Sigma V^T \quad \begin{cases} U \text{ e } V \rightarrow \text{ortogonais (rotação)} \\ \Sigma \rightarrow \text{diagonal (contração/estiramento dos eixos principais)} \end{cases}$$

$$\vec{x} \xrightarrow{A} \vec{b}$$



$\vec{v}_1^T \vec{v}_2 = 0$

como calcular:

- $A^TA = (U\Sigma V^T)^T(U\Sigma V^T) = V\Sigma \underbrace{U^TU}_{I}\Sigma V^T = V\Sigma^2V^T$

- $AA^T = (U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T = U\Sigma \underbrace{V^TV}_{I}\Sigma U^T = U\Sigma^2U^T$

simétricas

teorema espectral (Schur)

$\Rightarrow$ método QR em $\underbrace{A^TA}_{S_1}$, $\underbrace{AA^T}_{S_2}$: autovalores são Σ^2 (iguais)

obs.: se S é simétrica: algoritmo:

$A^{(0)} = S$, $V = I$

while (erro > tol):

  $A^{(K)} = Q.R \longrightarrow [Q,R] = qr(A)$

  $A^{(K+1)} = R.Q$

  $V = V.Q$

  erro = ...

end

$A \rightarrow$ diagonal (autovalores)

$V \rightarrow$ autovetores ortogonais (colunas).

em MATLAB:

$$\begin{cases} A^{(0)} = A^TA \rightarrow \Sigma_1^2, V \\ A^{(0)} = AA^T \rightarrow \Sigma_1^2, U \\ [U,S,V] = svd(A) \end{cases}$$

porque é importante: $K = \text{posto}(A)$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_K > 0$$

1+ 2 . m×1   1+ 2 . m×1

$$\underset{m \times n}{A} = U \Sigma V^T = \underbrace{\sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^T + \sigma_2 \vec{u}_2 \vec{v}_2^T + \ldots + \sigma_K \vec{u}_K \vec{v}_K^T}_{K \text{ matrizes de posto } 1 \,!}$$

melhor aproximação de A com posto 1

melhor aproximação de A com posto m $\left\{ \sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^T + \sigma_2 \vec{u}_2 \vec{v}_2^T + \ldots + \sigma_m \vec{u}_m \vec{v}_m^T \right.$

usado p/ reduzir o posto da matriz mantendo a melhor informação possível.

---

ex) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = 45 \ \checkmark \\ \vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$A A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 41 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = 45 \ \checkmark \\ \vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ +3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{45} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & +1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{45} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = U \Sigma V^T \ \checkmark$$

melhor aproximação de A de posto 1:

$$A_1 = \sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^T = \sqrt{45} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{45} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{20} & -1/\sqrt{20} \\ 3/\sqrt{20} & -3/\sqrt{20} \end{bmatrix}$$

exemplo 6.9 → quarteroni

$$\begin{cases} A = \text{escala de cinza de pixels de imagem jpeg.} \\ A_{20} \to \text{compressão, perda de imagem.} \end{cases}$$