SEL0348
Cálculo de Curto Circuito

Prof. Tit. Denis Vinicius Coury

LSEE

4 - Componentes Simétricos

4.1 - Análise por Componentes Simétricos

4.2 - Operadores

4.3 - Comp. Simétricos de Fasores Assimétricos

4.4 - Potência em termos de Componentes Simétricos

4.5 - Componentes Simétricos das Impedâncias

4.6 - Impedância de Sequência dos Componentes do Sistema

4.1 – Análise por Componentes Simétricos

- 1918 Dr. Fortescue apresentou um trabalho intitulado:*"Método de Componentes Simétricos aplicado a solução de circuitos polifásicos"*,

- desde então largamente usado em sistemas desiquilibrados, CC entre uma e duas fases.

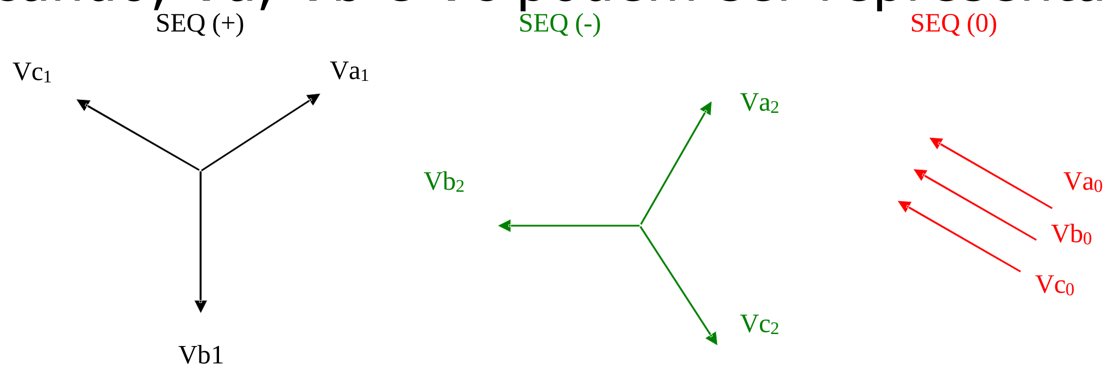
- De acordo com o teorema um sistema trifásico desequilibrado pode ser substituído por três sistemas equilibrados de fasores:

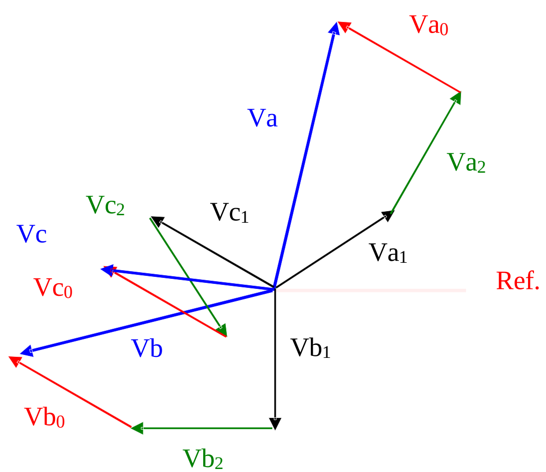
4.1 – Análise por Componentes Simétricos

1. **Componentes de sequência positiva (+)**: 3 fasores iguais em módulo, defasados de 120º, tendo a mesma seq. de fase original (abc);
2. **Componentes de sequência negativa (-)**: 3 fasores iguais em módulo, defasados de 120º, seq. de fase oposta a original (acb);
3. **Componentes de sequência zero (0)**: 3 fasores iguais em módulo com defasagem de 0º entre si.

4.1 – Análise por Componentes Simétricos

Exemplificando, Va, Vb e Vc podem ser representados por:





Podemos escrever que:

$$\mathbf{V_a = V_{a1} + V_{a2} + V_{a0}} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{V_b = V_{b1} + V_{b2} + V_{b0}} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{V_c = V_{c1} + V_{c2} + V_{c0}} \quad (4.3)$$

4.2 – Operadores

- Operador j

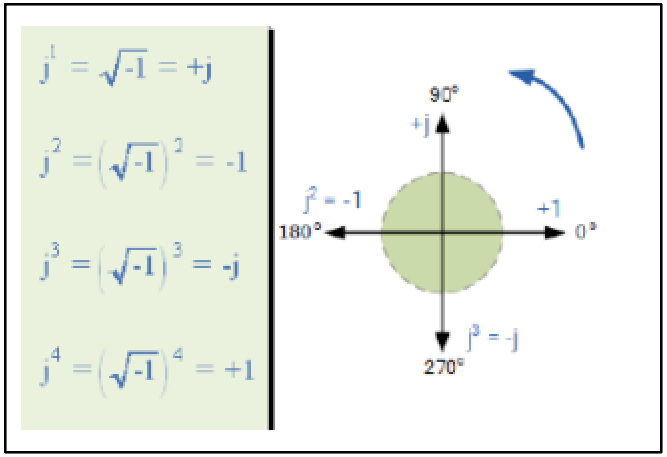
$$j = 1\angle 90^{o} = 1\angle -270^{o} = 0 + j1$$

$$j^{2} = 1\angle 180^{o} = 1\angle -180^{o} = -1 + j0 = -1$$

$$j^{3} = 1\angle 270^{o} = 1\angle -90^{o} = 0 - j1 = -j$$

$$j^{4} = 1\angle 360^{o} = 1\angle 0^{o} = 1 + j0 = 1$$

$$j^{5} = 1\angle 450^{o} = 1\angle 90^{o} = 0 + j1 = j$$



$$j + j^{2} = \sqrt{2}\angle 135^{o} = \sqrt{2}\angle -235^{o} = -1 + j1$$

$$j + j^{3} = 0 - 0 + j0 = 0$$

$$j - j^{2} = \sqrt{2}\angle 45^{o} = \sqrt{2}\angle -315^{o} = 1 + j1$$

$$j - j^{3} = 2\angle 90^{o} = 2\angle 270^{o} = 0 + j2$$

4.2 – Operadores

- **Operador a = $1\angle 120^o$ = $1e^{j2\pi/3}$ = -0,5 + j0,866**

$$a = 1\angle 120^o = -0{,}5 + j0{,}866$$

$$a^2 = 1\angle 240^o = -0{,}5 - j0{,}866$$

$$a^3 = 1\angle 360^o = 1 + j0$$

$$a^4 = 1\angle 120^o = a$$

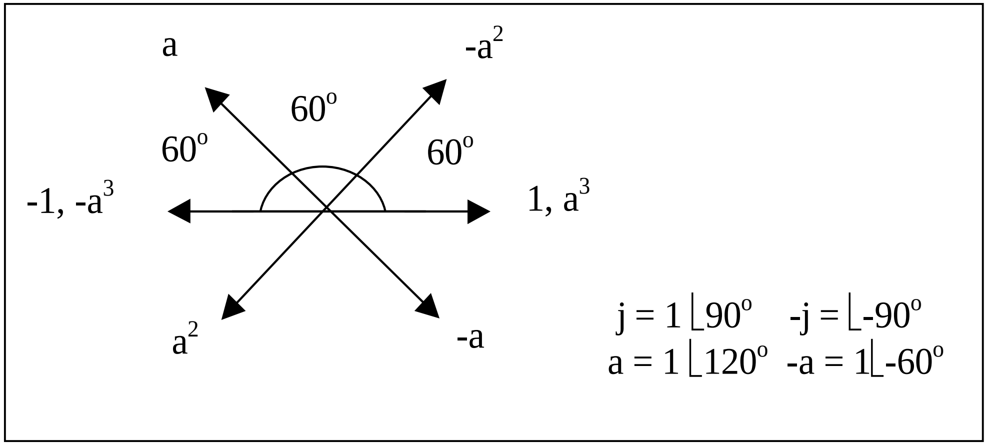
$$1 - a = \sqrt{3}\angle -30^o = 1{,}5 - j0{,}866$$

$$1 + a^2 = 1\angle -60^o = 0{,}5 - j0{,}866 = -a$$

$$a + a^2 = 1\angle 180^o = -1 - j0$$

$$a - a^2 = \sqrt{3}\angle 90^o = 0 + j1{,}732$$

$$1 + a + a^2 = 0$$



LSEE

4.3 – Comp. Simétricos de Fasores Assimétricos

$$V_a = V_{a1} + V_{a2} + V_{a0} \qquad (4.1)$$

$$V_b = V_{b1} + V_{b2} + V_{b0} \qquad (4.2)$$

$$V_c = V_{c1} + V_{c2} + V_{c0} \qquad (4.3)$$

Usando a e as figuras:

$$V_{b1} = a^2.V_{a1} \qquad V_{c1} = a.V_{a1} \qquad a = 1\angle 120^o$$

$$V_{b2} = a.V_{a2} \qquad V_{c2} = a^2.V_{a2} \qquad a^2 = 1\angle 240^o$$

$$V_{b0} = V_{a0} \qquad V_{c0} = V_{a0}$$

LSEE

4.3 – Comp. Simétricos de Fasores Assimétricos

Substituindo:

$$V_a = V_{a1} + V_{a2} + V_{a0} \qquad (4.5)$$

$$V_b = a^2V_{a1} + aV_{a2} + V_{a0} \qquad (4.6)$$

$$V_c = aV_{a1} + a^2V_{a2} + V_{a0} \qquad (4.7)$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} \qquad (4.8)$$

4.3 – Comp. Simétricos de Fasores Assimétricos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \qquad (4.9)$$

$$A^{-1} = 1/3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \qquad (4.10)$$

Pré-multiplicando (4.8) por A^{-1}:

$$A^{-1}\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = A^{-1}.A\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix}$$

4.3 – Comp. Simétricos de Fasores Assimétricos

$$\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} = 1/3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \qquad (4.11)$$

Desenvolvendo:

$$V_{a0} = 1/3(V_a + V_b + V_c) \qquad (4.12)$$

$$V_{a1} = 1/3(V_a + aV_b + a^2Vc) \qquad (4.13)$$

$$V_{a2} = 1/3(V_a + a^2V_b + aV_c) \qquad (4.14)$$

Os demais valores de V_{b0}, V_{c0}, V_{b1}, V_{c1}, V_{b2} e V_{c2} são obtidos pelas equações anteriores.

4.3 – Comp. Simétricos de Fasores Assimétricos

Observações importantes:

1. Para circuitos trifásicos equilibrados não há componente de sequência zero.

2. As equações (4.12) ... (4.14) podem ser resolvidas gráfica ou analiticamente. Quando representam correntes:

$$I_{a0} = 1/3(I_a + I_b + I_c) \qquad (4.15)$$

$$I_{a1} = 1/3(I_a + aI_b + a^2I_c) \qquad (4.16)$$

$$I_{a2} = 1/3(I_a + a^2I_b + aI_c) \qquad (4.17)$$

3. Num sistema trifásico com condutor neutro:

$$I_n = I_a + I_b + I_c \Rightarrow I_{a0} = 1/3I_n \Rightarrow \mathbf{I_n = 3I_{a0}} \quad (4.18)$$

*** Quando não há retorno ⇨ $I_n = 0$ ⇨ correntes de sequência *0* são nulas (carga ligada em △ não tem corrente de sequência nula).**

LSEE

4.4 – Potência em Termos de Componentes Simétricos

$$\mathbf{N = P + jQ = V_aI_a^* + V_bI_b^* + V_cI_c^*} \quad \mathbf{(4.19)}$$

(potência em termos de tensão e corrente de fase)

Matricialmente:

$$N = [\,V_a\ V_b\ V_c\,] \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}^* \quad (4.20)$$

$$N = V_L^t . I_L^* \qquad V_L = A \begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} \qquad I_L = A \begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix}$$

LSEE

4.4 – Potência em termos de Componentes Simétricos

Assim:

$$N = \left\{ A \begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} \right\}^T \left\{ A \begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix} \right\}^* \qquad \textbf{(4.21)}$$

Da álgebra matricial:

$$[A.V]^t = V^t.A^t$$

$$[A.I]^* = A^*.I^*$$

a e a² ➔ conjugados

4.4 – Potência em termos de Componentes Simétricos

Assim:

$$N = \overset{[V]^T}{[\, V_{a0} \quad V_{a1} \quad V_{a2} \,]} \; \underbrace{\overset{A^t = A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}} \overset{A^*}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}}}_{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3} \begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix}^* \qquad (4.22)$$

$$N = 3\, [\, V_{a0} \quad V_{a1} \quad V_{a2} \,] \begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix}^*$$

4.4 – Potência em termos de Componentes Simétricos

$$V_a I_a^* + V_b I_b^* + V_c I_c^* = 3V_{a0} I_{a0}^* + 3V_{a1} I_{a1}^* + 3V_{a2} I_{a2}^*$$

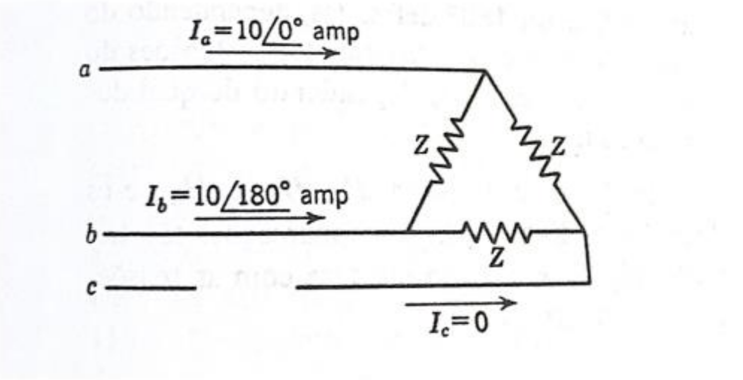
$$\begin{bmatrix} V_a & V_b & V_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}^* = 3 \begin{bmatrix} V_{a0} & V_{a1} & V_{a2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ao} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix}^*$$

Exemplos

Exemplo 1:

Um condutor de uma linha trifásica está aberto. A corrente que flui para uma carga ligada em Δ pela linha a é de 10A. Tomando a corrente na linha a como referência e a linha c aberta, determine os componentes simétricos das correntes de linha.

$$\dot{I}_a = 10\underline{/0^\circ}(A);\ \dot{I}_b = 10\underline{/180^\circ}(A)\ e\ \dot{I}_c 0$$



Exemplo 2:

Dados: $V_a = 10\underline{/30^o}$, $V_b = 30\underline{/-60^o}$ e $V_c = 15\underline{/145^o}$ determinar as componentes simétricas correspondentes.

LSEE

Exercício

Questão 1

Por um sistema trifásico está circulando as seguintes correntes:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\sphericalangle 0° \\ 10\sphericalangle 180° \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determine os componentes simétricos (**positiva**, **negativa** e **zero**) das correntes de linha.

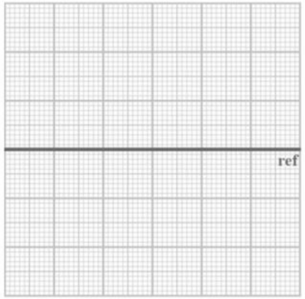
Questão 2

Dadas as tensões em componentes simétricas (**positiva**, **negativa** e **zero**) da tensão da fase A.

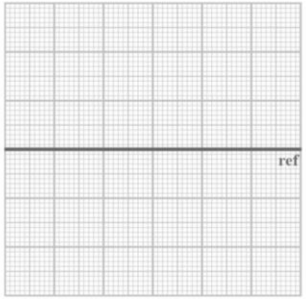
$$\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\sphericalangle 30° \\ 220\sphericalangle 0° \\ 100\sphericalangle -60° \end{bmatrix}$$

Determine as tensões V_a, V_b e V_c e desenhe a representação fasorial (sequência positiva negativa e zero).

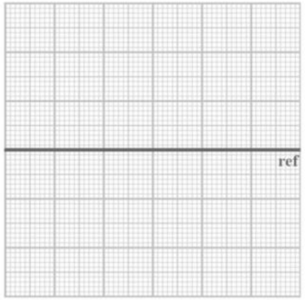
Sequência Positiva



Sequência Negativa

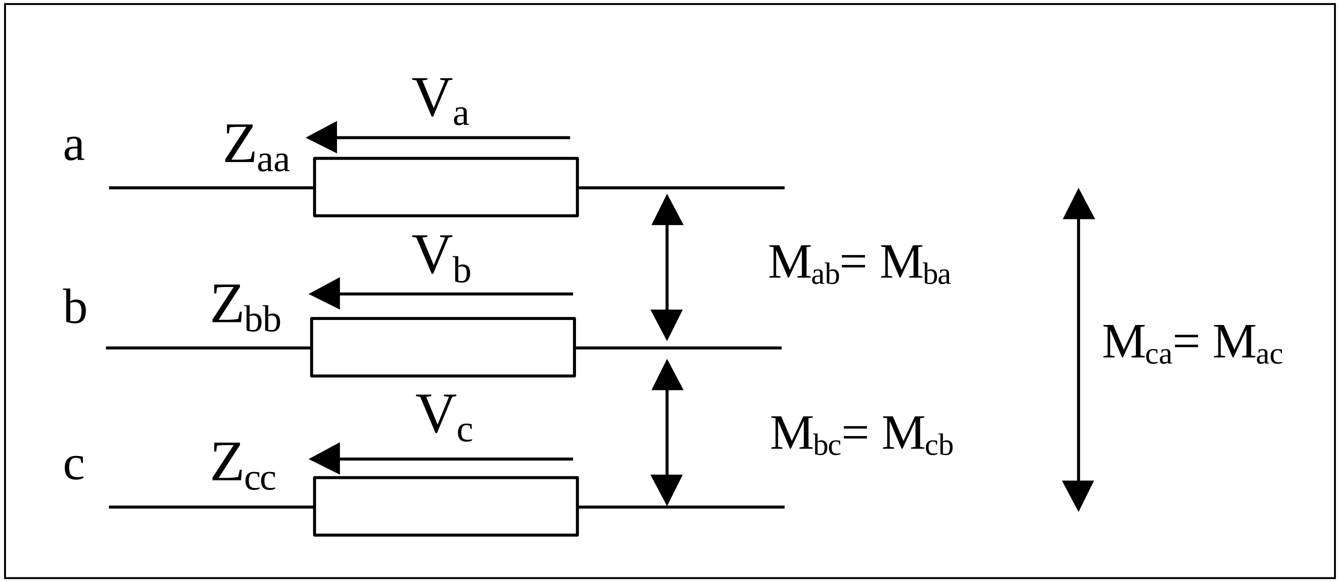


Sequência Zero



4.5 - Componentes Simétricos das Impedâncias

4.5.1-Caso Geral



4.5 - Componentes Simétricos das Impedâncias

MATRICIALMENTE

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & M_{ab} & M_{ac} \\ M_{ab} & Z_{bb} & M_{bc} \\ M_{ca} & M_{cb} & Z_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \Rightarrow V_a = Z_{aa}I_a + M_{ab}I_b + M_{ac}I_c$$

$$[\,V_p\,] = [\,Z_{pp}\,]\,[\,I_p]$$

$$[\,V_c\,] = \underbrace{[\,Z_{cc}\,]}_{?}\,[\,I_c\,]$$

$$\underbrace{\left[A^{-1}\right]\left[V_p\right]}_{V_C} = \left[Z_{cc}\right]\underbrace{\left[A^{-1}\right]\left[I_p\right]}_{I_C} \underset{(.A)}{\Rightarrow} \left[V_p\right] = [A]\left[Z_{cc}\right]\left[A^{-1}\right]\left[I_p\right]$$

$$Z_{pp} = [A]\left[Z_{cc}\right]\left[A^{-1}\right] \Rightarrow Z_{cc} = \left[A^{-1}\right]\left[Z_{pp}\right][A]$$

4.5 - Componentes Simétricos das Impedâncias

Desenvolvendo:

$$[Z_{cc}] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_{aa} & M_{ab} & M_{ac} \\ M_{ba} & Z_{bb} & M_{bc} \\ M_{ca} & M_{cb} & Z_{cc} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$$

4.5 - Componentes Simétricos das Impedâncias

4.5.2-Circuito Equilibrado

Para as três fases equilibradas:

$\mathbf{Z_{aa} = Z_{bb} = Z_{cc} = Z}$ $\mathbf{M_{ab} = M_{ba} = M_{cb} = M_{bc} = M_{ac} = M}$

Então:

$$[Z_{cc}] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z & M & M \\ M & Z & M \\ M & M & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$$

4.5 - Componentes Simétricos das Impedâncias

Resolvendo:

$$[\,Z_{cc}\,] = \begin{bmatrix} (Z+2M) & 0 & 0 \\ 0 & (Z-M) & 0 \\ 0 & 0 & (Z-M) \end{bmatrix}$$

a matriz se DIAGONALIZOU!!!

"as quantidades de sequência não estão acopladas mutuamente"

LSEE

4.5 - Componentes Simétricos das Impedâncias

$$[Z_{cc}] = \begin{bmatrix} Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} Z_0 = Z + 2M \\ Z_1 = Z - M \\ Z_2 = Z - M \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V_0 = Z_0 I_0}$$
$$\mathbf{V_1 = Z_1 I_1}$$
$$\mathbf{V_2 = Z_2 I_2}$$

LSEE

4.5 - Componentes Simétricos das Impedâncias

Significado Físico:

- **Sistemas equilibrados** ➔ circuitos independentes de acoplamento;

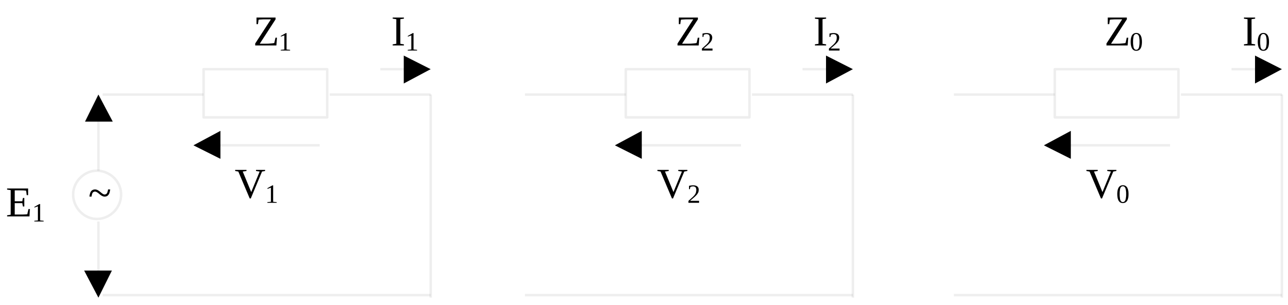
- Z_0 = impedância de sequência 0 (zero);
  Z_1 = impedância de sequência (+);
  Z_2 = impedância de sequência (-); e

- *fem.* dos geradores é só de seq. (+).

LSEE

4.5 - Componentes Simétricos das Impedâncias

Circuitos equivalentes:



(+) **(-)** **(0)**

⇨ ***Caso a rede seja desequilibrada ➔ haverá acoplamento entre os circuitos.***

LSEE

4.6 - Impedância de Sequência dos Componentes do Sistema

<u>Linhas Aéreas e Cabos</u>:

$Z_0 = Z + 2M \qquad Z_0 > Z_1 = Z_2$

$Z_1 = Z - M$

$Z_2 = Z - M$

<u>Transformadores</u>:

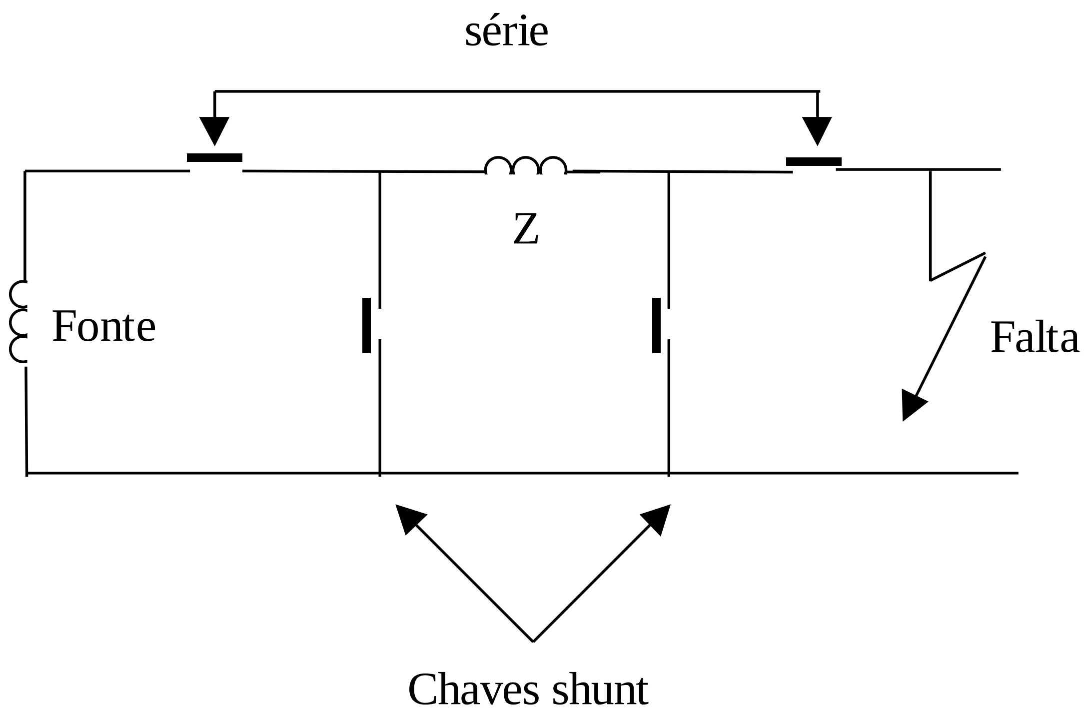
$Z_1 = Z_2 \Rightarrow$ deslocamento angular oposto, e

$Z_0 \Rightarrow$ depende da conexão dos enrolamentos e forma do núcleo.

LSEE

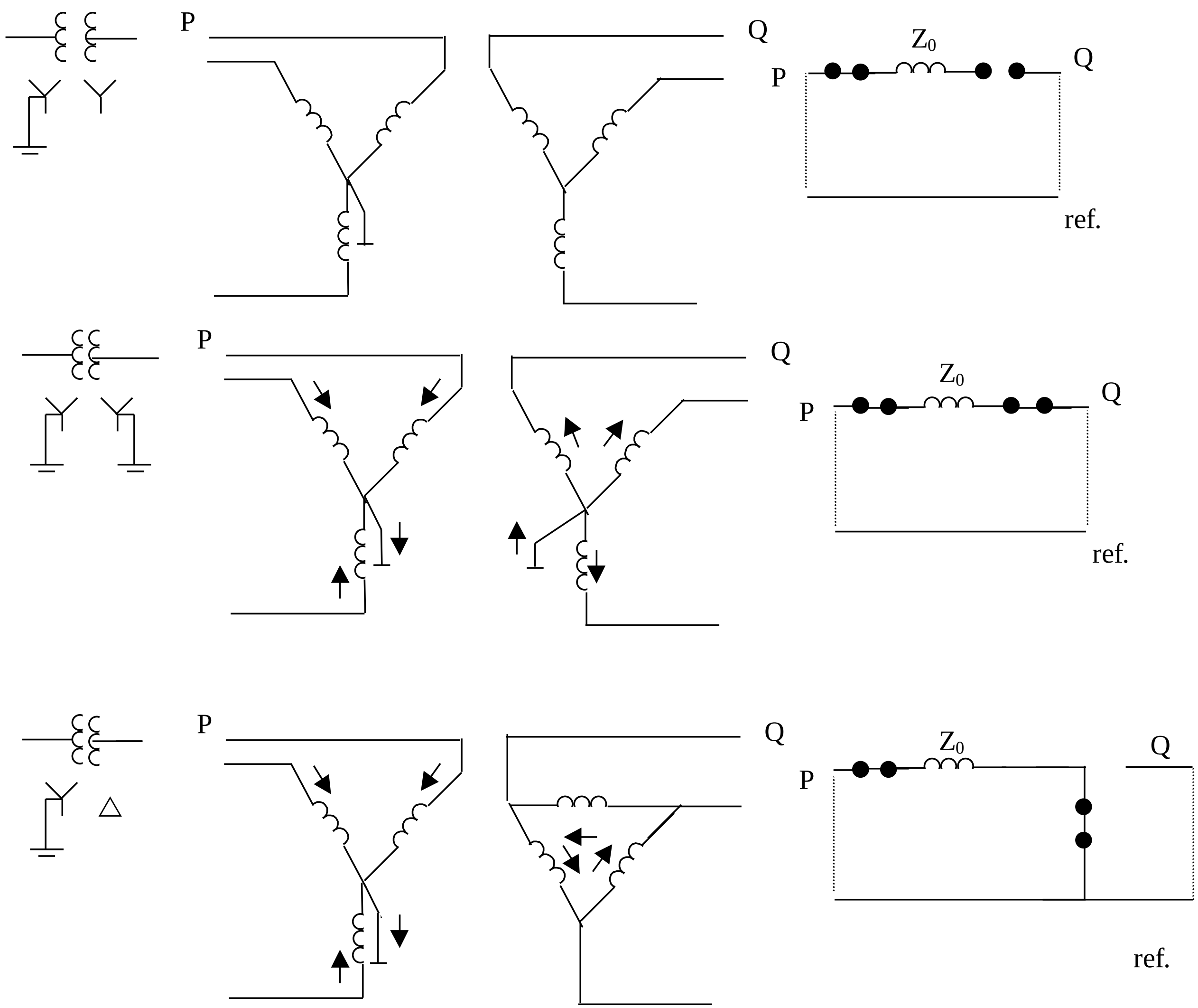
4.6 - Impedância de Sequência dos Componentes do Sistema

Diagrama equivalente de seq. 0 para trafos com 2 enrolamentos:

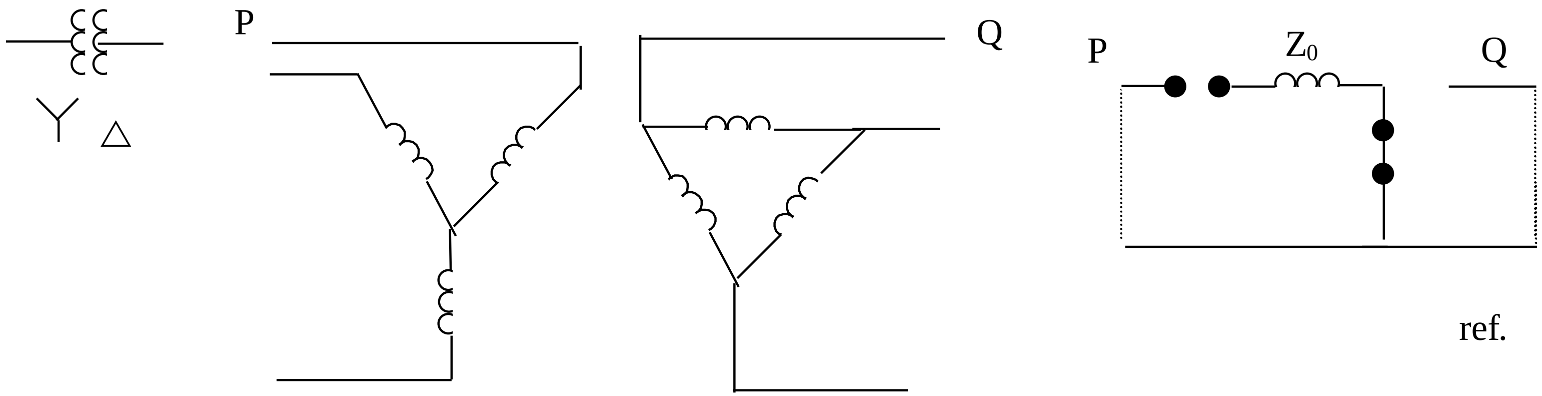


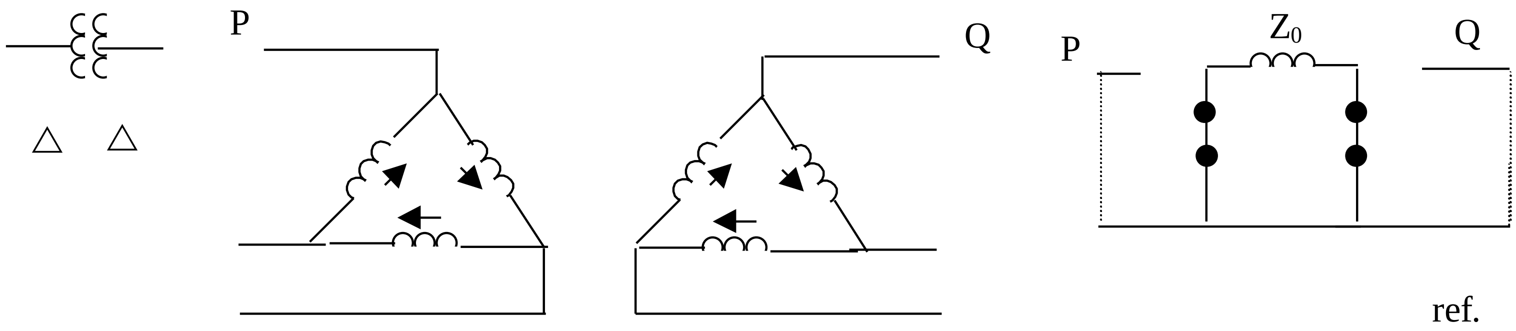
➔ fechar chave série para **ESTRELA ATERRADO** e
➔ fechar shunt para **DELTA**

4.6 - Impedância de Sequência dos Componentes do Sistema



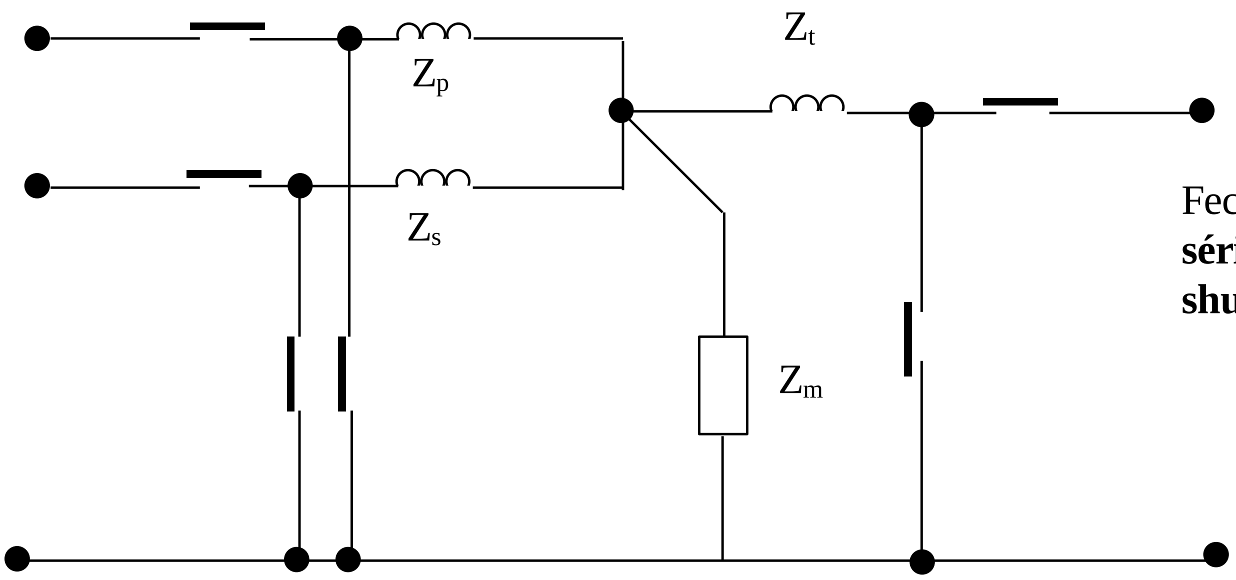
4.6 - Impedância de Sequência dos Componentes do Sistema





4.6 - Impedância de Sequência dos Componentes do Sistema

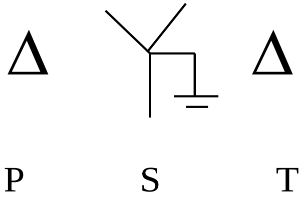
- Transformador de 3 enrolamentos:



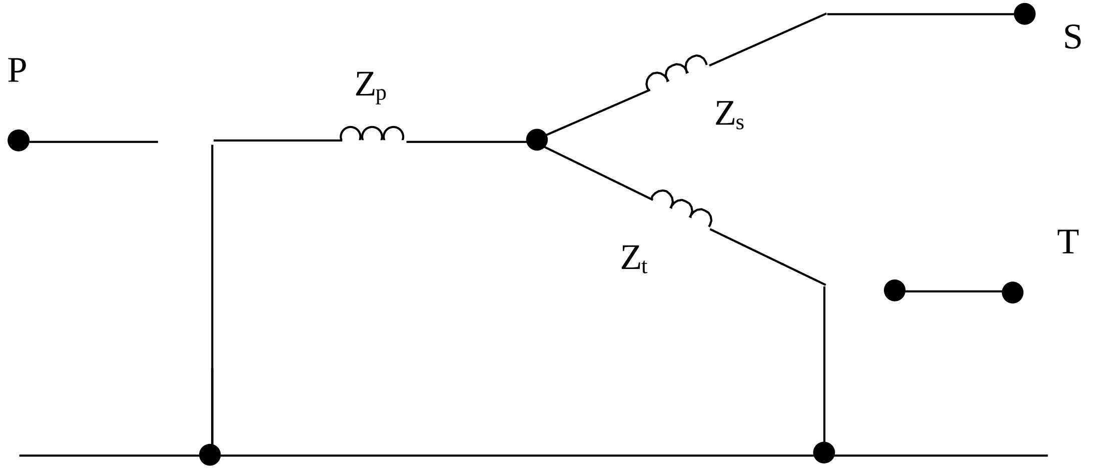
Fechar:
série - estrela aterrado
shunt - delta

4.6 - Impedância de Sequência dos Componentes do Sistema

- Exemplo:



para $Z_m \cong \infty$



4.6 - Impedância de Sequência dos Componentes do Sistema

4.6.3 - Máquinas Rotativas:

$Z_1 \neq Z_2$

a) Impedância de seq. (+)

Toma-se o valor subtransitório ou síncrono (conforme a natureza do problema).

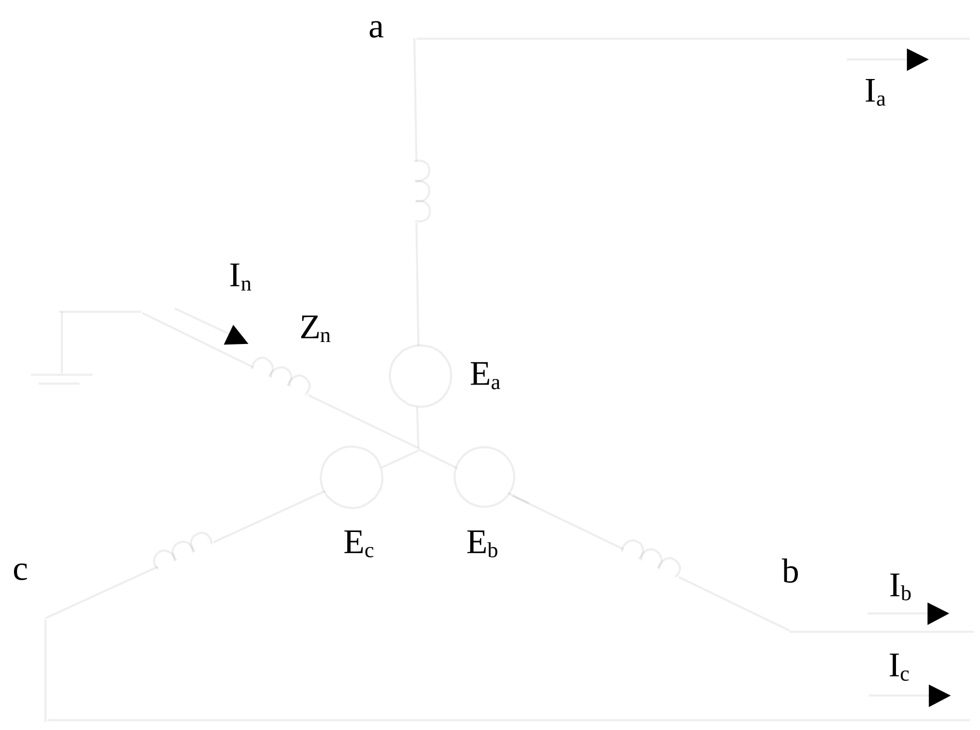
b) Impedância de seq. (-)

É dada pela média das reatâncias subtransitórias x_d'' e x_q'':

$$Z_2 = \frac{x_d'' + x_q''}{2}$$

4.6 - Impedância de Sequência dos Componentes do Sistema

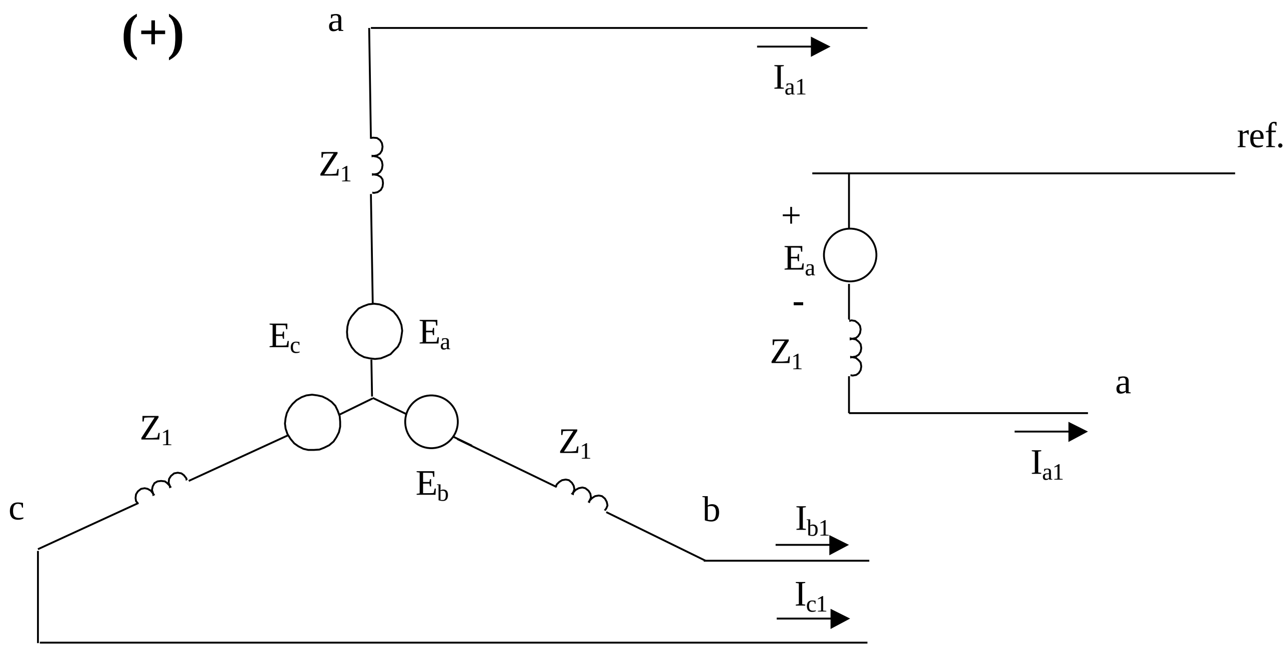
Diagrama do circuito de um gerador em vazio aterrado através de uma impedância:



LSEE

4.6 - Impedância de Sequência dos Componentes do Sistema

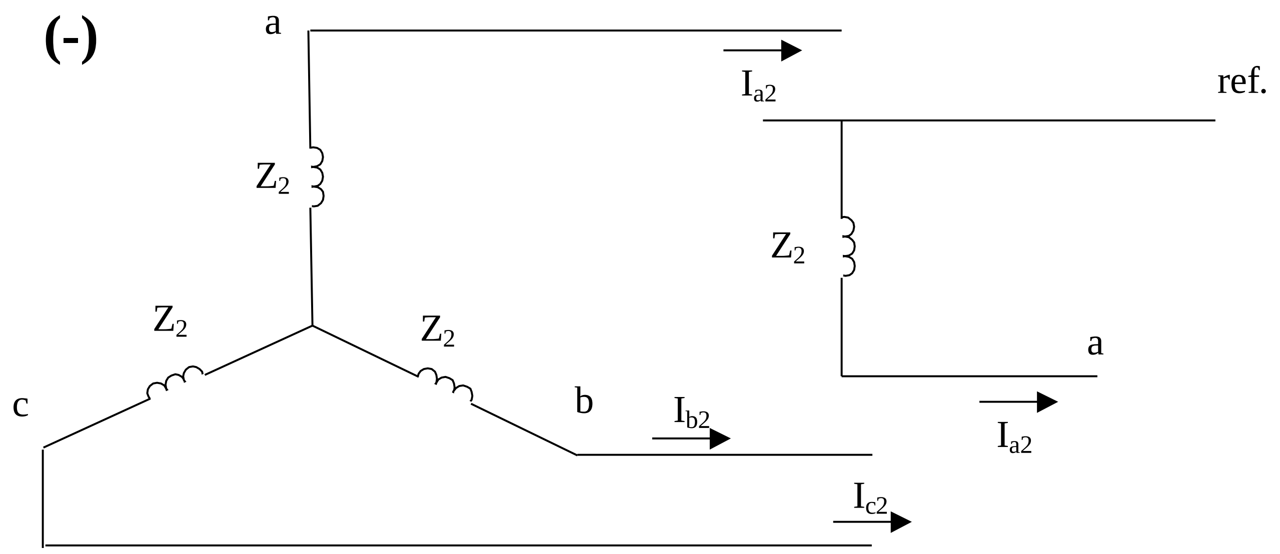
Diagrama de Sequências:



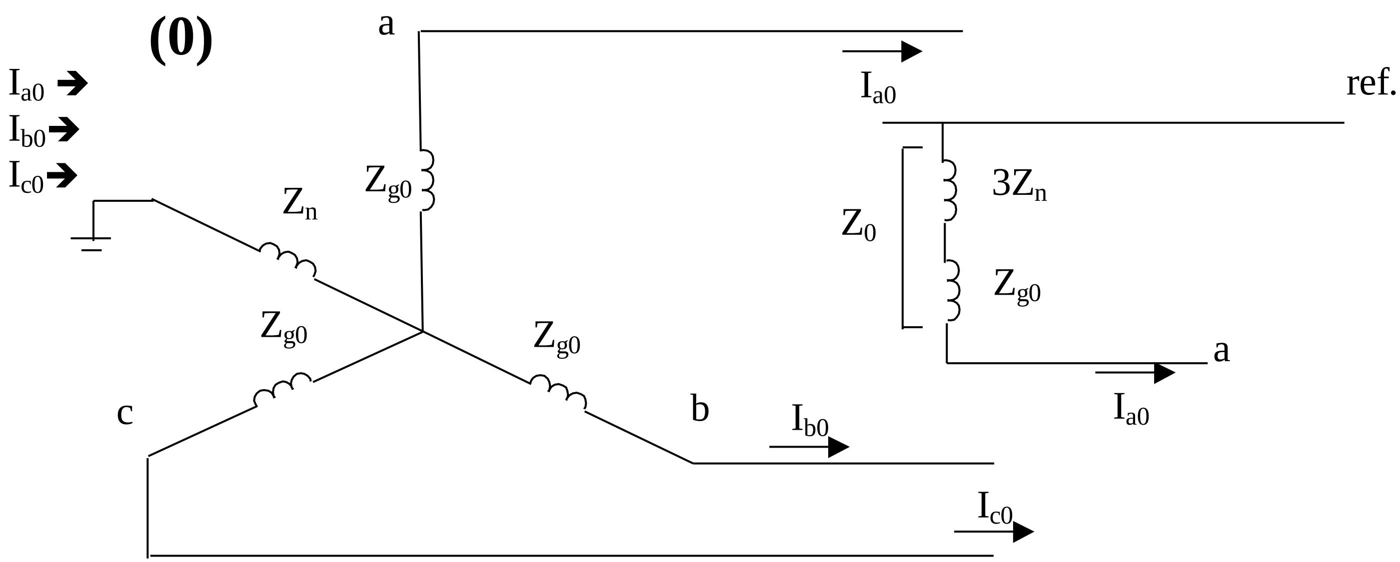
* as tensões geradas são apenas de seq. + visto que o gerador é projetado para fornecer tensões trifásicas.

4.6 - Impedância de Sequência dos Componentes do Sistema

Diagrama de Sequências:



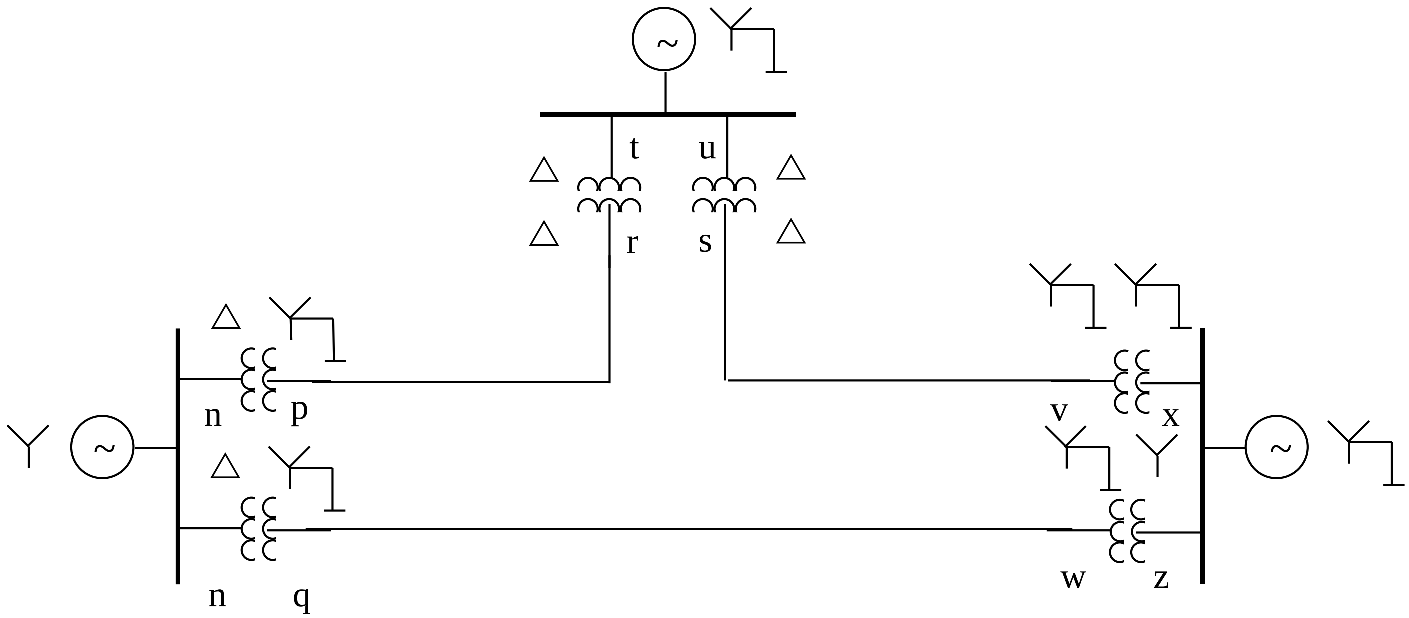
4.6 - Impedância de Sequência dos Componentes do Sistema



4.6 - Impedância de Sequência dos Componentes do Sistema

Exercício 1

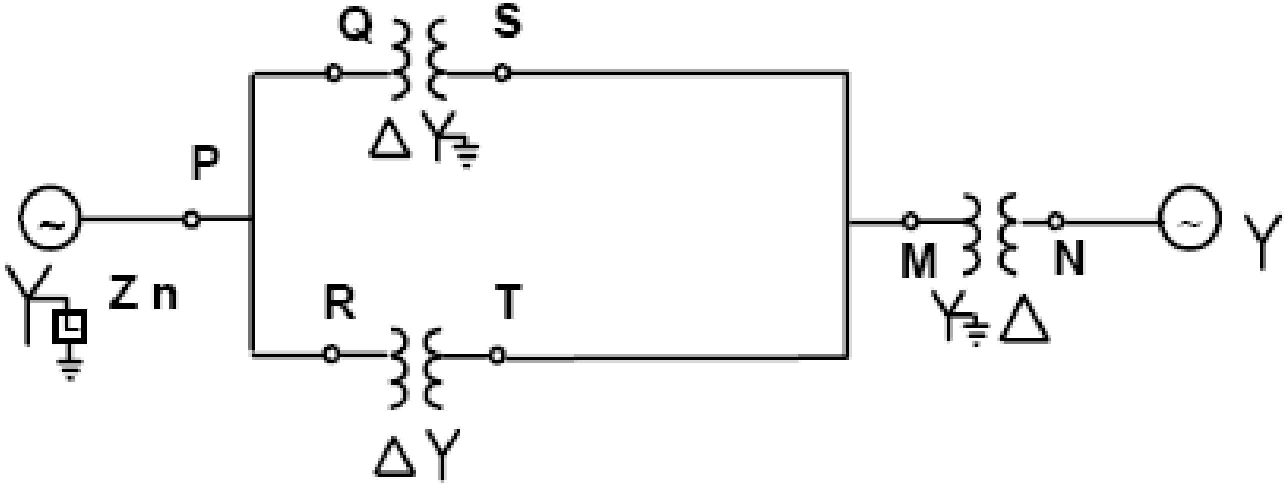
Determine o circuito de seq. +, - e 0 do sistema:



4.6 - Impedância de Sequência dos Componentes do Sistema

Exercício 2

Determine o circuito de seq. +, - e 0 do sistema:



Obrigado pela atenção!

Profº Tit. Denis Vinicius Coury
E-mail: ***coury@sc.usp.br***
Monitor: Leonardo Lessa
E-mail:leonardo.s.lessa@gmail.com
Universidade de São Paulo - USP
Escola de Engenharia de São Carlos - EESC
Depto de Engenharia Elétrica - SEL
Laboratório de Sistemas de Energia Elétrica - LSEE