Aula 15: Compactos

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1^o **Semestre de 2023 - Curso de Topologia**

Definição 1

Seja (X, τ) *um espaço topológico. Dizemos que* $\mathcal{A}$ *é uma cobertura (ou recobrimento) de* X *se* $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$*. Neste caso, chamamos* $\mathcal{A}$ *de* **cobertura aberta** *se os elementos de* $\mathcal{A}$ *são abertos.*

Definição 2

Dizemos que o espaço topológico (X, τ) *é um* **espaço compacto** *se para toda cobertura aberta* $\mathcal{A}$ *de* X *existe uma subcobertura* $\mathcal{A}'$ *(i.e.,* $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ *e* $\bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A = X$ *) finita.*

Exemplo 3

Qualquer espaço finito é compacto.

Vamos apresentar agora um conceito que vai nos ajudar a mostrar que certos espaços são compactos.

Definição 4

Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma sub-base para (X, τ) se $\{B_1 \cap \cdots \cap B_n : B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}\}$ é uma base para X.

Relação de ordem

Seja X um conjunto não-vazio. Uma relação de ordem parcial em X é uma relação $\leq$ com as seguintes propriedades:

(Reflexiva) $x \leq x$ para todo $x \in X$

(Transitiva) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$

(Antissimétrica) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$

Se além disso

(Total) $x \leq y$ ou $y \leq x$ para quaisquer $x, y \in X$

então $\leq$ é dita uma relação de ordem total e X é dito totalmente ordenado.

Definição 5

- *Se X é parcialmente ordenado por $\leq$, um elemento $x \in X$ é dito maximal (minimal) se, e só se, $x \leq y$ ($y \leq x$) implica $x = y$.*
- *Se $A \subset X$, então um elemento $x \in X$ é dito limitante superior (inferior) para A se, e só se, $a \leq x$ ($x \leq a$) para todo $a \in A$.*

Lema de Zorn

Se X é um conjunto parcialmente ordenado e todo subconjunto totalmente ordenado de X tem um limitante superior, então X tem um elemento maximal.

O próximo resultado é útil para mostrar que certos espaços são compactos e será bastante útil na prova do Teorema de Tychonoff (produtos de compacto é compacto).

Proposição 6 (Lema da sub-base de Alexander)

Sejam (X, τ) espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma sub-base para X. Se toda cobertura para X feita por elementos de $\mathcal{B}$ admite subcobertura finita, então X é compacto.

Demonstração. Suponha que X não seja compacto.

Considere $\mathcal{C}$ a família de todas as coberturas abertas para X que não possuam subcobertura finita e, sobre $\mathcal{C}$, a relação de ordem dada pela inclusão

$$C_1 \leq C_2 \quad \text{se "} A \in C_1 \text{ implica } A \in C_2 \text{"}.$$

Note que, se $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ é um subconjunto totalmente ordenado, então $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \in \mathcal{C}$ (ver exercício) é um limitante superior para $\mathcal{S}$.

Desta forma, pelo Lema de Zorn, podemos tomar $C \in \mathcal{C}$ elemento maximal.

Por hipótese, temos que $C \cap \mathcal{B}$ não é uma cobertura (pois C não admite subcobertura finita).

Então existe $x \in X$ tal que $x \notin B$ para todo $B \in C \cap \mathcal{B}$.

Mas, como C é cobertura, existe $A \in C$ tal que $x \in A$.

Como $\mathcal{B}$ é sub-base, existem $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ tais que

$$x \in B_1 \cap \cdots \cap B_n \subset A.$$

Como x não é coberto por $C \cap \mathcal{B}$, temos que cada $B_i \notin C \cap \mathcal{B}$. Ou seja, cada $B_i \notin C$.

Pela maximalidade de C, temos que, para cada $i = 1, \ldots, n$, $C \cup \{B_i\}$ admite subcobertura finita, digamos $\{B_i\} \cup C_i$, onde $C_i \subset C$ é finito.

Vamos mostrar que $\{A\} \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$ é uma cobertura para X (o que é uma contradição, já que tal família seria uma subcobertura finita de C).

De fato, seja $y \in X$. Se $y \in A$, nada temos que mostrar. Mas, se $y \notin A$, então existe j tal que $y \notin B_j$ (pois $\bigcap_{i=1}^n B_i \subset A$). Como $\{B_j\} \cup C_j$ é cobertura, algum aberto de C_j contém y.

Com o Lema da sub-base, podemos provar de maneira fácil o seguinte resultado.

Proposição 7

O intervalo $[0,1]$ *com a topologia usual é compacto.*

Demonstração. Note que $\mathcal{B} = \{[0,b) : b \in (0,1]\} \cup \{(a,1] : a \in [0,1)\}$ é uma sub-base para $[0,1]$. Seja $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ uma cobertura para $[0,1]$. Seja

$$\beta = \sup\{b \in [0,1] : [0,b) \in \mathcal{C}\}.$$

Note que o próprio β não é coberto por algum conjunto da forma $[0,b) \in \mathcal{C}$.

Assim, existe a tal que $(a,1] \in \mathcal{C}$ e $\beta \in (a,1]$.

Seja b tal que $a < b < \beta$ e tal que $[0,b) \in \mathcal{C}$ (existe por β ser supremo).

Note que $[0,b) \cup (a,1] = [0,1]$.

Ao contrário do intervalo $[0, 1]$ ser compacto, a reta toda não é.

Exemplo 8

Com a topologia usual, $\mathbb{R}$ *não é compacto.*

Para ver isso basta tomar a cobertura $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$*.*

Compactos - Definição e propriedades básicas

Como verificar a compacidade pela definição muitas vezes é trabalhoso, o seguinte resultado é bem prático.

Proposição 9

Seja (X, τ) espaço compacto e seja $F \subset X$ fechado. Então F é compacto.

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta para F e, para cada $A \in \mathcal{A}$, seja A^* aberto em X tal que $A^* \cap F = A$. Seja $\mathcal{A}^* = \{A^* : A \in \mathcal{A}\}$. Note que $\mathcal{A}^* \cup \{X \backslash F\}$ é uma cobertura aberta para X. Como X é compacto, tal cobertura admite subcobertura finita $\mathcal{B}$. Note, então que

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \{B \cap F : B \in \mathcal{B} \backslash \{X \backslash F\}\} \subset \mathcal{A}$$

é uma subcobertura finita de F.

Vamos provar que se um espaço é de Hausdorff, então ele separa pontos de compactos (isto será melhorado - separar compactos).

Proposição 10

Seja (X, τ) um espaço de Hausdorff. Sejam $x \in X$ e $K \subset X$ compacto tal que $x \notin K$. Então existem A e B abertos tais que $x \in A$, $K \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Demonstração. Para cada $y \in K$, sejam A_y e B_y abertos tais que $x \in A_y$, $y \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$. Como K é compacto, existem $y_1, \ldots, y_n \in K$ tais que $\bigcup_{i=1}^{n} B_{y_i} \supset K$. Agora, sejam

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_{y_i} \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{i=1}^{n} B_{y_i}.$$

Note que ambos são abertos, $x \in A$ e $F \subset B$.

Vamos mostrar que $A \cap B = \emptyset$.

Suponha, por contradição, que $z \in A \cap B$. Seja i tal que $z \in B_{y_i}$. Note que, assim, $z \in A_{y_i}$, que é contradição com o fato que $A_{y_i} \cap B_{y_i} = \emptyset$.

Em espaços de Hausdorff, os compactos são fechados.

Proposição 11

Sejam (X, τ) espaço de Hausdorff e $F \subset X$ compacto. Então F é fechado.

Demonstração. Pelo resultado anterior, temos em particular que se $x \notin F$, existe A aberto tal que $x \in A \subset X \setminus F$.

Corolário 12

Sejam (X, τ) um espaço compacto de Hausdorff e $F \subset X$ um conjunto. Então, F é fechado se, e somente se, F é compacto.

Em espaços de Hausdorff compactos disjuntos podem ser separados por abertos.

Proposição 13

Seja (X, τ) espaço Hausdorff. Sejam $F, G \subset X$ compactos disjuntos. Então existem A, B abertos disjuntos tais que $F \subset A$ e $G \subset B$

Demonstração. Sejam $F, G \subset X$ compactos disjuntos. Pela Proposição 10, para cada $y \in G$, existem A_y, B_y abertos tais que $A_y \supset F$, $y \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$. Como G é compacto, existem $y_1, y_2, \ldots, y_n \in G$ tais que $\bigcup_{i=1}^{n} B_{y_i} \supset G$. Sejam

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_{y_i} \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{i=1}^{n} B_{y_i}.$$

Note que A e B são abertos, $F \subset A$, $G \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Com isso, temos que em espaços compactos, basta a propriedade de Hausdorff para termos a normalidade.

Lembrar: Normal $= T_1 + T_4$ e $T_2 \Rightarrow T_1$

Proposição 14

Todo espaço compacto de Hausdorff é normal.

Demonstração. Basta notar que fechados são compactos e aplicar a Proposição 13.

Outro resultado importante sobre a compacidade é que ela é preservada pela continuidade.

Proposição 15

Sejam $(X, \tau), (Y, \sigma)$ *espaços topológicos onde* X *é compacto e* $f : X \to Y$ *uma função contínua e sobrejetora. Então* Y *é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta para Y. Note que $\mathcal{B} = \left\{f^{-1}(A) : \ A \in \mathcal{A}\right\}$ é uma cobertura aberta para X. Então, existe $\mathcal{B}'$ subcobertura finita. Assim, se para cada $B \in \mathcal{B}'$ tomamos $A_B \in \mathcal{A}$ tal que $B = f^{-1}(A_B)$, temos que $\{A_B \in \mathcal{A} : B \in \mathcal{B}'\}$ é uma subcobertura finita para Y. De fato:

$$Y = f(X) = f\Big(\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B\Big) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} f(B) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} A_B \,.$$

Corolário 16

Sejam (X, τ) *e* (Y, σ) *espaços topológicos, sendo* Y *espaço de Hausdorff, e seja* $f : X \to Y$ *uma função contínua. Se* $F \subset X$ *é compacto, então* $f(F)$ *é compacto e, portanto, fechado.*

Demonstração. A compacidade segue da Proposição anterior (não precisa da hipótese Y ser Hausdorff) e o fato de ser fechado da Proposição 11.

Corolário 17

Sejam (X, τ) *e* (Y, σ) *espaços de Hausdorff, sendo* X *compacto, e seja* $f : X \to Y$ *uma função contínua e bijetora. Então,* f *é um homeomorfismo.*

Demonstração. Basta usar o resultado que se imagem inversa de fechado é fechado, então a função é contínua.

Compactos - versão local

Definição 18

Dizemos que o espaço topológico (X, τ) *é* *localmente compacto* *se todo* $x \in X$ *admite um sistema fundamental de vizinhanças compactas.*

Para espaços de Hausdorff, a propriedade global implica na local.

Lembrar: Regular $= T_1 + T_3$

Proposição 19

Se (X, τ) *é um espaço compacto de Hausdorff, então* X *é localmente compacto.*

Demonstração. Note que X é regular (pois é normal pela Proposição 14). Portanto, todo $x \in X$ admite um sistema fundamental de vizinhanças fechadas (equivalência de T_3, Corolário 18 da Aula 4), logo, compactas (Proposição 9 de hoje).

Já a propriedade local não implica na global.

Exemplo 20

Com a topologia usual, $\mathbb{R}$ é localmente compacto, pois cada $[a, b]$ é compacto.

Vimos que, para espaços de Hausdorff, a compacidade implica na normalidade. Para espaços localmente compactos, conseguimos garantir a propriedade de ser completamente regular.

Lembrar: Dizemos que (X, τ) é $T_{3\frac{1}{2}}$ se, para todo $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tal que $x \notin F$ existir $f : X \to [0, 1]$ contínua, tal que $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$, para todo $y \in F$. No caso que (X, τ) também é T_1, dizemos que (X, τ) é um espaço completamente regular.

Compactos - versão local

Proposição 21

Seja (X, τ) um espaço localmente compacto de Hausdorff. Então (X, τ) é completamente regular.

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tais que $x \notin F$. Então $x \in X \backslash F$, que é aberto. Logo, existe V vizinhança compacta de x, tal que $V \subset X \backslash F$ (usando compacidade local).

Seja A aberto tal que $x \in A \subset V$. Note que $V \backslash A$ é fechado (em V). Como V é compacto e Hausdorff, V é completamente regular (ele é normal pela Proposição 14, todo normal é completamente regular por Urysohn). Então existe $g : V \to [0, 1]$ contínua tal que $g(x) = 0$ e $g(V \backslash A) = \{1\}$. Defina $f : X \to [0, 1]$ como

$$f(a) = \begin{cases} g(a), & a \in V \\ 1, & a \notin V \end{cases}$$

Note que f é a função desejada (exercício a seguir).

Compactos - Exercícios

1. Mostre que se $\mathcal{S}$ é uma cadeia de coberturas para um espaço, cada uma delas sem subcobertura finita, então $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S$ também é uma cobertura sem subcobertura finita.
2. Mostre, sem usar o Lema da Sub-base, que a seguinte afirmação é equivalente a ser compacto: "toda cobertura formada por abertos básicos admite subcobertura finita".
3. Seja (X,τ) um espaço topológico. Seja $\mathcal{B}$ uma base para (X,τ). Mostre que $\mathcal{B}$ é um recobrimento aberto para (X,τ).
4. Mostre que a reta de Sorgenfrey não é compacta.
5. Caracterize os compactos discretos.
6. Dizemos que uma família de subconjuntos $\mathcal{F}$ satisfaz a propriedade da intersecção finita (p.i.f.) se, para todo $F\subset\mathcal{F}$ finito, temos que $\bigcap_{G\in F} G\neq\emptyset$. Seja (X,τ) espaço topológico. Mostre que "X ser compacto" é equivalente a "toda $\mathcal{F}$ família de fechados de X com p.i.f., é tal que $\bigcap_{G\in\mathcal{F}} G\neq\emptyset$".
7. Mostre que a função f da Proposição 21 é a função desejada.
8. Mostre que compacidade é um invariante topológico (isto é, é preservada via homeomorfismos).

9. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que $[a, b]$ é compacto (na topologia usual).
10. Seja (X, τ) espaço de Hausdorff. Mostre que (X, τ) é localmente compacto se, e somente se, para todo $x \in X$ existe V aberto tal que $x \in V$ e $\bar{V}$ é compacto.
11. Este é um roteiro para mostrar diretamente que [0,1] é compacto (sem usar o Lema da sub-base). Considere $\mathcal{A}$ uma cobertura feita por abertos básicos. Considere
$$C = \left\{ x \in [0, 1] : \exists \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \text{ finito, com } \bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A \supset [0, x] \right\}$$
    (a) Mostre que existe $\alpha = \sup C$.
    (b) Mostre que $\alpha = 1$.
    (c) Encontre a subcobertura finita.
12. Mostre que $[0, 1]$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}$.
13. Seja (X, d) espaço métrico. Mostre que se $F \subset X$ é compacto, então F é fechado e limitado (um conjunto A é dito limitado se existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $A \subset B_r(x)$ para algum $x \in X$).
14. Seja (X, τ) Hausdorff. Mostre que X é localmente compacto se, e somente se, para cada $x \in X$ existe $\mathcal{V}$ sistema fundamental de vizinhanças para x tal que $\bar{V}$ é compacto para cada $V \in \mathcal{V}$.

15. Seja (X, τ) de Hausdorff. Mostre que X é localmente compacto se, para todo $x \in X$ existe K vizinhança compacta de x.
16. Mostre que a reta de Sorgenfrey não é localmente compacta.
17. Seja (X, τ) espaço de Hausdorff. Dizemos que (Y, σ) espaço de Hausdorff é uma compactificação de X se X é um subsespaço denso de Y e (Y, σ) é compacto. Dizemos que uma compactificação (Y, σ) é uma compactificação de Alexandroff se $Y = X \cup \{x\}$ onde $x \notin X$.
    (a) Seja (X, τ) espaço topológico de Hausdorff que admite uma compactificação. Mostre que (X, τ) é completamente regular.
    (b) Considere (X, τ) espaço localmente compacto. Defina $Y = X \cup \{x\}$ onde $x \notin X$. Defina σ topologia sobre Y de forma que $\tau \subset \sigma$ e todo $\{x\} \cup (X \backslash K) \in \sigma$ onde $K \subset X$ é compacto. Mostre que (Y, σ) é uma compactificação de Alexandroff de X.
    (c) Seja (X, τ) espaço de Hausdorff e suponha que exista (Y, σ) compactificação de Alexandroff para X. Mostre que (X, τ) é localmente compacto.
    (d) Conclua que um espaço de Hausdorff é localmente compacto se, e somente se, admite uma compactificação de Alexandroff.

18. Considere $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (não necessariamente contínuas. Considere sobre $\mathcal{F}$ a topologia produto (induzida por $\prod_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R}$). Chama-se de suporte de uma função f o conjunto $\overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$. Mostre que o conjunto das funções contínuas de suporte compacto é denso em $\mathcal{F}$.
19. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos, e $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ localmente Lipschitziana (i.e., para cada $x \in X$, existem $r_x > 0$ e $C_x > 0$ tais que $d_Y(f(a), f(b)) \leq C_x d_X(a, b)$ para quaisquer $a, b \in B(x, r_x)$). Dado $K \subset X$ compacto, mostre que existe $\delta > 0$ tal que $f|_{K_\delta}$ é Lipschitziana. Aqui
$$K_\delta = \{x \in X : d_X(x, K) < \delta\}.$$