Física do spin

F.S. Navarra

navarra@if.usp.br

Richard Terra (monitor)

richard.terra@usp.br

edisciplinas.if.usp.br

(buscar: física do spin)

Plano do curso

13/03 aula 1: Partículas elementares e idéias da física quântica

20/03 aula 2: Átomo de Bohr, quantização do momento angular

27/03 aula 3: Momento de dipolo magnético, Stern - Gerlach

10/04 aula 4: Efeito Zeeman anômalo

17/04 1ª Prova

24/04 aula 5: Equações de autovalores, matrizes de Pauli

08/05 aula 6: Comutadores, medidas SG sequenciais

15/05 aula 7: Medidas e valores médios

22/05 aula 8: Precessão e adição de spins

29/05 aula 9: Adição de spins

05/06 2ª Prova

12/06 aula 10: Princípio da exclusão de Pauli

19/06 aula 11: Interação hiperfina no hidrogênio

26/06 aula 12: Resonância paramagnética do elétron

03/07 aula 13: Resonância magnética nuclear

10/07 3ª Prova

Avaliação

Três provas : P1 P2 P3

Média das duas melhores : $P = (P_i + P_j)/2$

Substitutiva fechada

Aula 5

Equação de autovalores para o spin

$$\begin{cases} \hat{S}_z \, \psi = m_s \, \hbar \, \psi \\ \hat{S}^2 \, \psi = s\,(s+1)\,\hbar^2 \, \psi \end{cases}$$

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$$

Operadores de spin

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Operadores de spin

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Autoestados de S_z

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \hat{S}_z\,|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|\uparrow\rangle \\ \hat{S}_z\,|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}\,|\downarrow\rangle \end{cases}$$

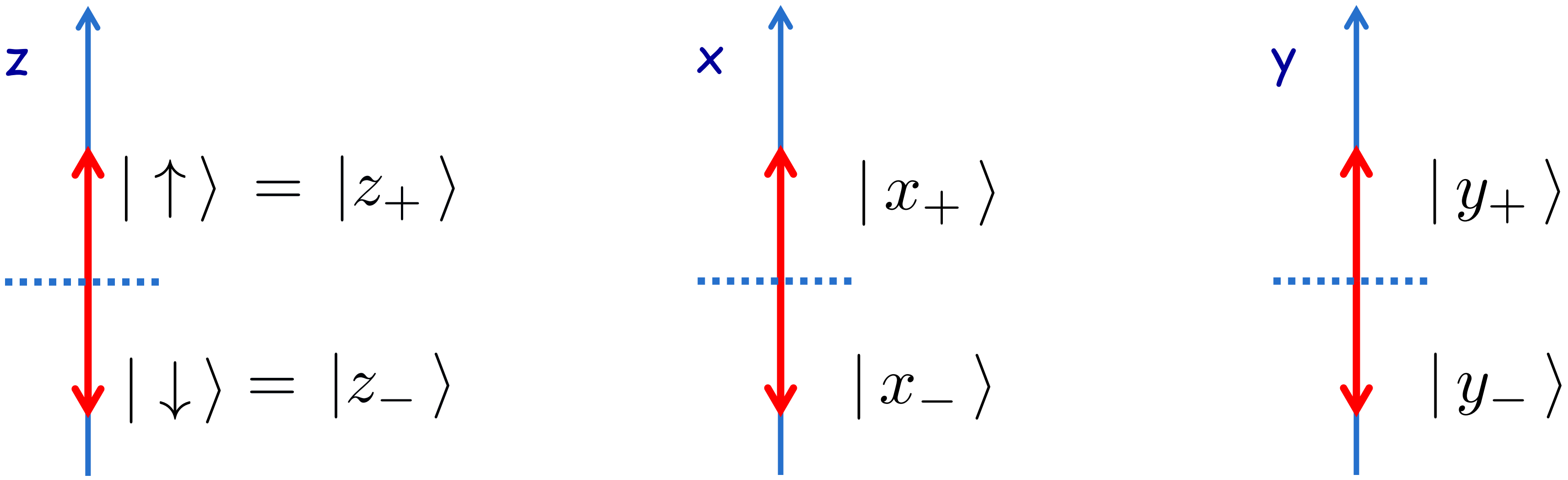
Operador no autoestado "errado" $\quad \hat{S}_x\,|\uparrow\rangle = ?$

$$\hat{S}_x\,|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\,|\downarrow\rangle$$

Não é equação de autovalores !!!

Autoestados dos operadores S_x e S_y

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$



Aula 6

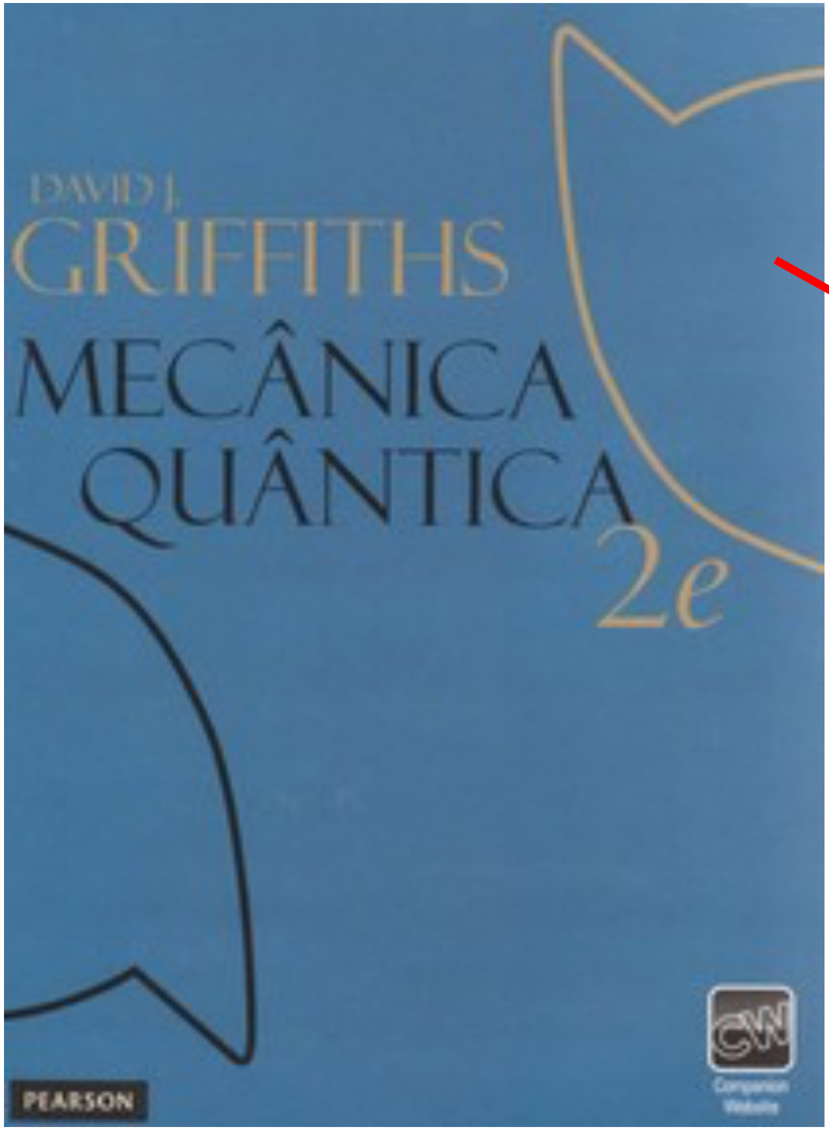
Autoestados, espaços, álgebra linear

Autovalores e autoestados de S_x

Medidas SG sequenciais

Autoestados de spin

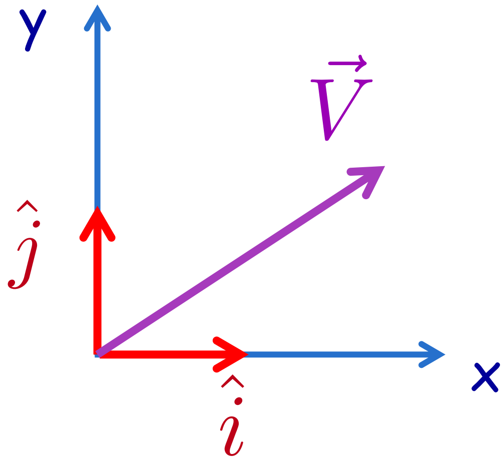
Para estudar o formalismo de spin vamos usar :



gato

Capítulo 4
pag. 128

Espaço vetorial de duas dimensões



versores $\begin{cases} \hat{i} = |\,\hat{i}\,\rangle \\ \hat{j} = |\,\hat{j}\,\rangle \end{cases}$

Normalizados : $\hat{i}\,.\,\hat{i} = \langle\,\hat{i}\,|\,\hat{i}\,\rangle = 1 \qquad \hat{j}\,.\,\hat{j} = \langle\,\hat{j}\,|\,\hat{j}\,\rangle = 1$

Ortogonais : $\hat{i}\,.\,\hat{j} = \langle\,\hat{i}\,|\,\hat{j}\,\rangle = 0 \qquad \hat{j}\,.\,\hat{i} = \langle\,\hat{j}\,|\,\hat{i}\,\rangle = 0$

Formam uma base !

Vetor genérico: $\vec{V} = V_x\,\hat{i} + V_y\,\hat{j} = V_x\,|\,\hat{i}\,\rangle + V_y\,|\,\hat{j}\,\rangle$

Autoestados de S^2 e S_z

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autoestado adjunto = transposto do complexo conjugado

$$(|\uparrow\rangle^*)^T = |\uparrow\rangle^\dagger = \langle\uparrow|$$

$$\langle\uparrow| = (1 \quad 0) \qquad \langle\downarrow| = (0 \quad 1)$$

Produto escalar

$$\left.\begin{array}{l}\langle\uparrow|\downarrow\rangle = (1 \quad 0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0\\[2em] \langle\downarrow|\uparrow\rangle = (0 \quad 1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0\end{array}\right\}\ \text{ortogonais}$$

e

$$\left.\begin{array}{l}\langle\uparrow|\uparrow\rangle = (1 \quad 0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\\[2em] \langle\downarrow|\downarrow\rangle = (0 \quad 1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1\end{array}\right\}\ \text{normalizados}$$

ortonormais !

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg\}$$ Formam uma base !

Vetor genérico: $$|s\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$$

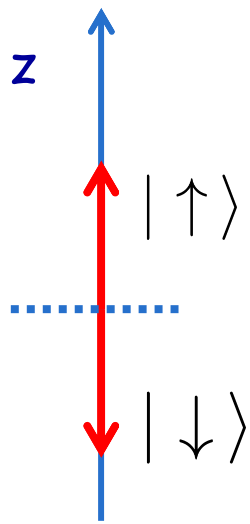
$$\langle s| = a^* \langle\uparrow| + b^* \langle\downarrow|$$

Normalizado: $$\langle s|s\rangle = 1$$

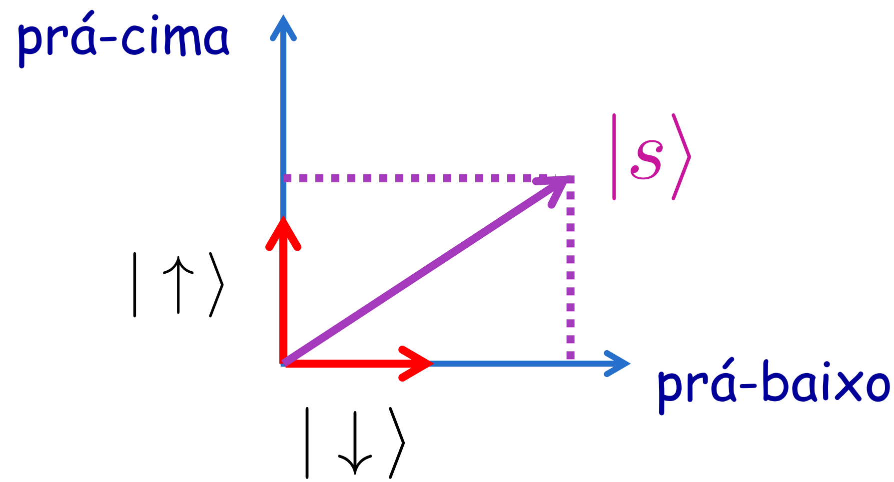
$$[a^* \langle\uparrow| + b^* \langle\downarrow|] \cdot [a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle] =$$

$$a^* a + b^* b = |a|^2 + |b|^2 = 1$$

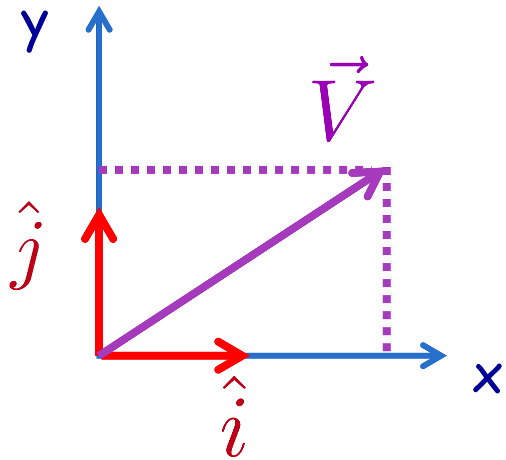
No espaço real:

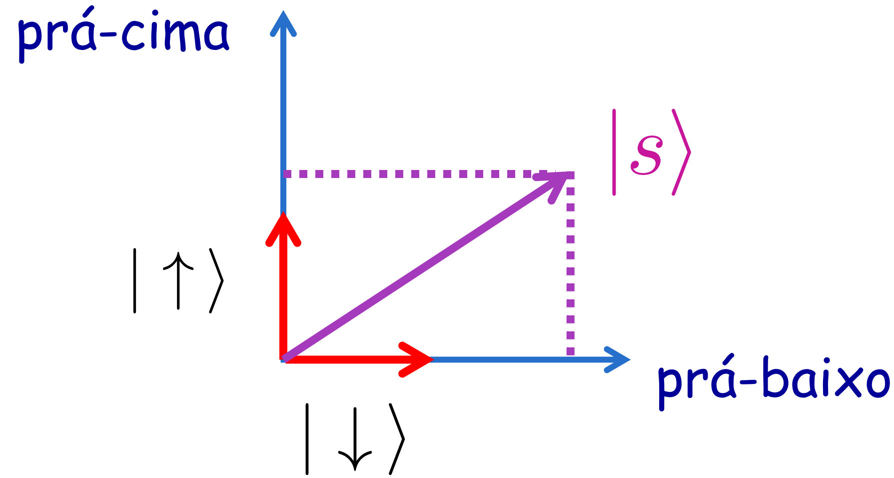


No espaço vetorial abstrato:



$$|s\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$$





$$\vec{V} = V_x\,|\,\hat{i}\,\rangle + V_y\,|\,\hat{j}\,\rangle \qquad\qquad |s\,\rangle = a\,|\uparrow\rangle + b\,|\downarrow\rangle$$

Interpretação geométrica

Interpretação probabilística

$$P(\,|\uparrow\rangle\,) = |a|^2$$

Probabilidade de observar
o "spin prá cima"

$$P(\,|\downarrow\rangle\,) = |b|^2$$

Probabilidade de observar
o "spin prá baixo"

Exemplos

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$$

a b

$|a|^2 = \frac{1}{2}$ 50 % prá cima

$|b|^2 = \frac{1}{2}$ 50 % prá baixo

$$|s\rangle = i\,\frac{\sqrt{3}}{2}|\uparrow\rangle + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle$$

$|a|^2 = \frac{3}{4}$ 75 % prá cima

$|b|^2 = \frac{1}{4}$ 25 % prá baixo

Medimos muitos sistemas idênticos, no mesmo estado |s >

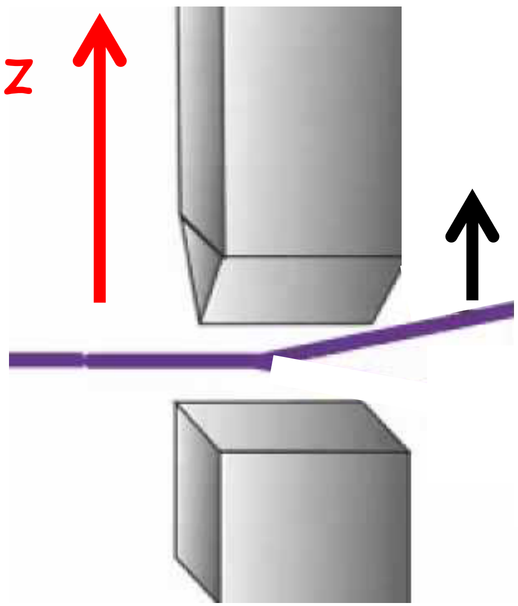
Em 75 % das vezes encontramos o "spin prá cima"

Observação sobre a medição

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$$

Antes da medida o elétron está num estado de superposição !

Medida de
Stern Gerlach



A próxima medida
vai dar spin prá cima !

Depois da medida o elétron está no estado de "spin prá cima"

A medida fixa o estado !

Acaba com a superposição !

Schroedinger

"Colapso" da função de onda !

Operadores de spin

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Autoestados de S_z

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \hat{S}_z\,|\uparrow\rangle = \dfrac{\hbar}{2}\,|\uparrow\rangle \\ \hat{S}_z\,|\downarrow\rangle = -\dfrac{\hbar}{2}\,|\downarrow\rangle \end{cases}$$

Operador no autoestado "errado" $\quad \hat{S}_x\,|\uparrow\rangle = ?$

$$\hat{S}_x\,|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\,|\downarrow\rangle$$

Não é equação de autovalores !!!

Autoestados e autovalores de S_x

$$\hat{S}_x \,|x\rangle = a\,|x\rangle \qquad \hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |x\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\hbar}{2}\beta = a\,\alpha \\ \dfrac{\hbar}{2}\alpha = a\,\beta \end{cases} \longrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \longrightarrow \alpha = \pm\beta$$

$$\beta = \alpha$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{a = \frac{\hbar}{2}}$$

$$\beta = \alpha$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{a = \frac{\hbar}{2}}$$

$$\beta = -\alpha$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{a = -\frac{\hbar}{2}}$$

Resumo

$$|\, x_+ \rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_x \,|\, x_+ \rangle = \hat{S}_x \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$|\, x_- \rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_x \,|\, x_- \rangle = \hat{S}_x \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = -\,\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

Constante é determinada pela normalização

$$\langle x_+ | x_+ \rangle = 1 \qquad \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

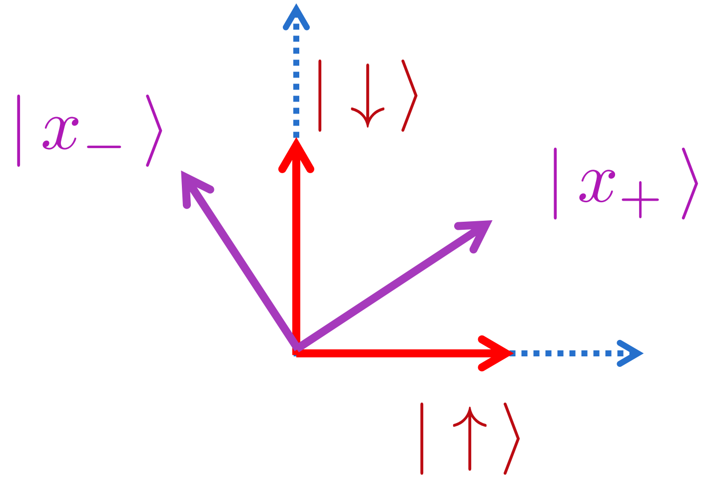
$$\langle x_- | x_- \rangle = 1 \qquad \alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{| x_+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{| x_- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\langle x_+ | x_- \rangle = 0} \qquad \boxed{\langle x_- | x_+ \rangle = 0}$$

Ortogonais e normalizados : formam uma base

$$\text{Duas bases} \begin{cases} |\uparrow\rangle \quad |\downarrow\rangle \\ \\ |x_+\rangle \quad |x_-\rangle \end{cases}$$



$$|\uparrow\rangle = \alpha\,|x_+\rangle + \beta\,|x_-\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(1 \;\; 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \;\; 0)\,\alpha\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1 \;\; 0)\,\beta\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \beta \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$0 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

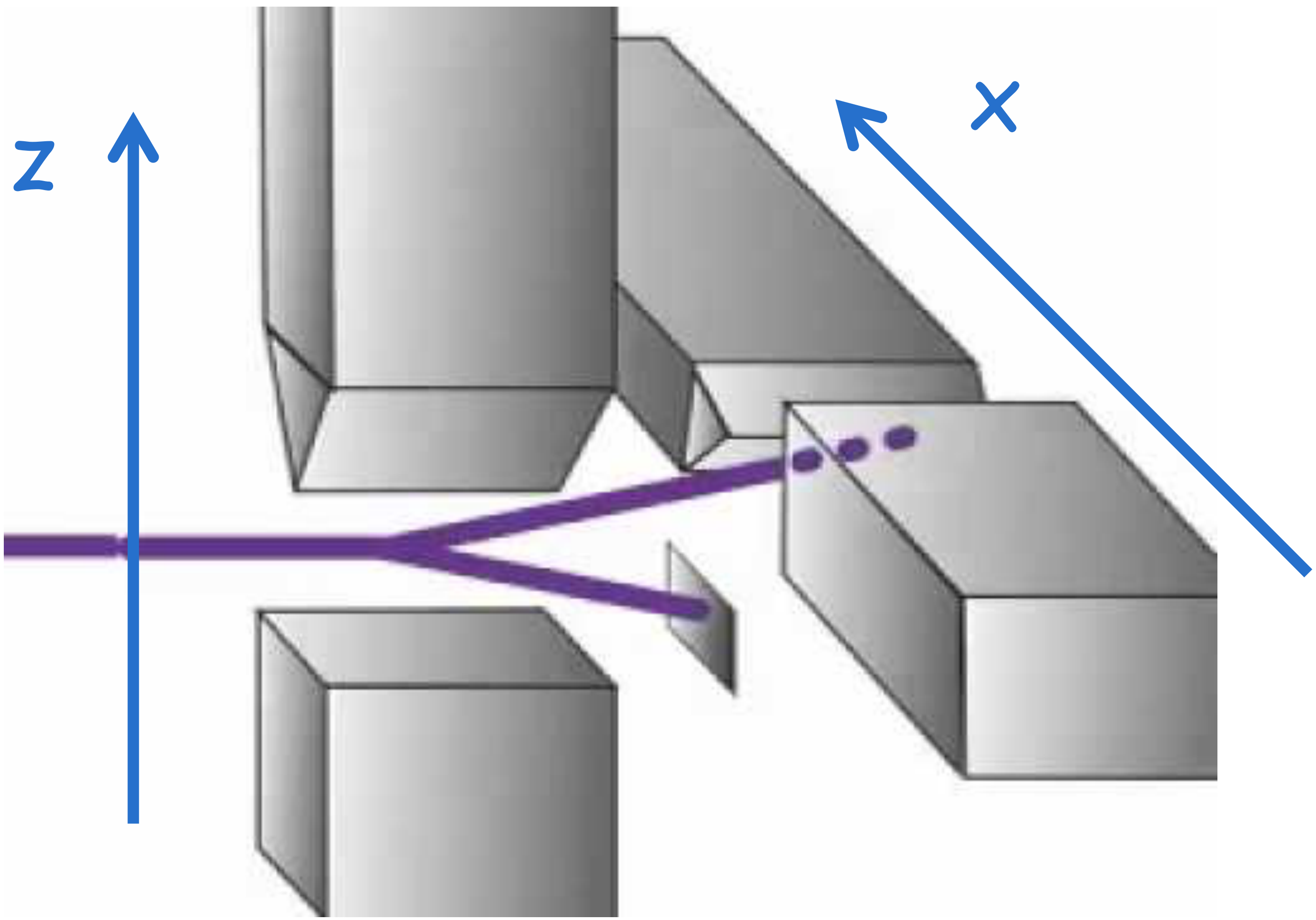
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}} - \dfrac{\beta}{\sqrt{2}} \\[2ex] 1 = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}} + \dfrac{\beta}{\sqrt{2}} \end{array} \right. \longrightarrow \quad \alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |x_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |x_-\rangle}$$

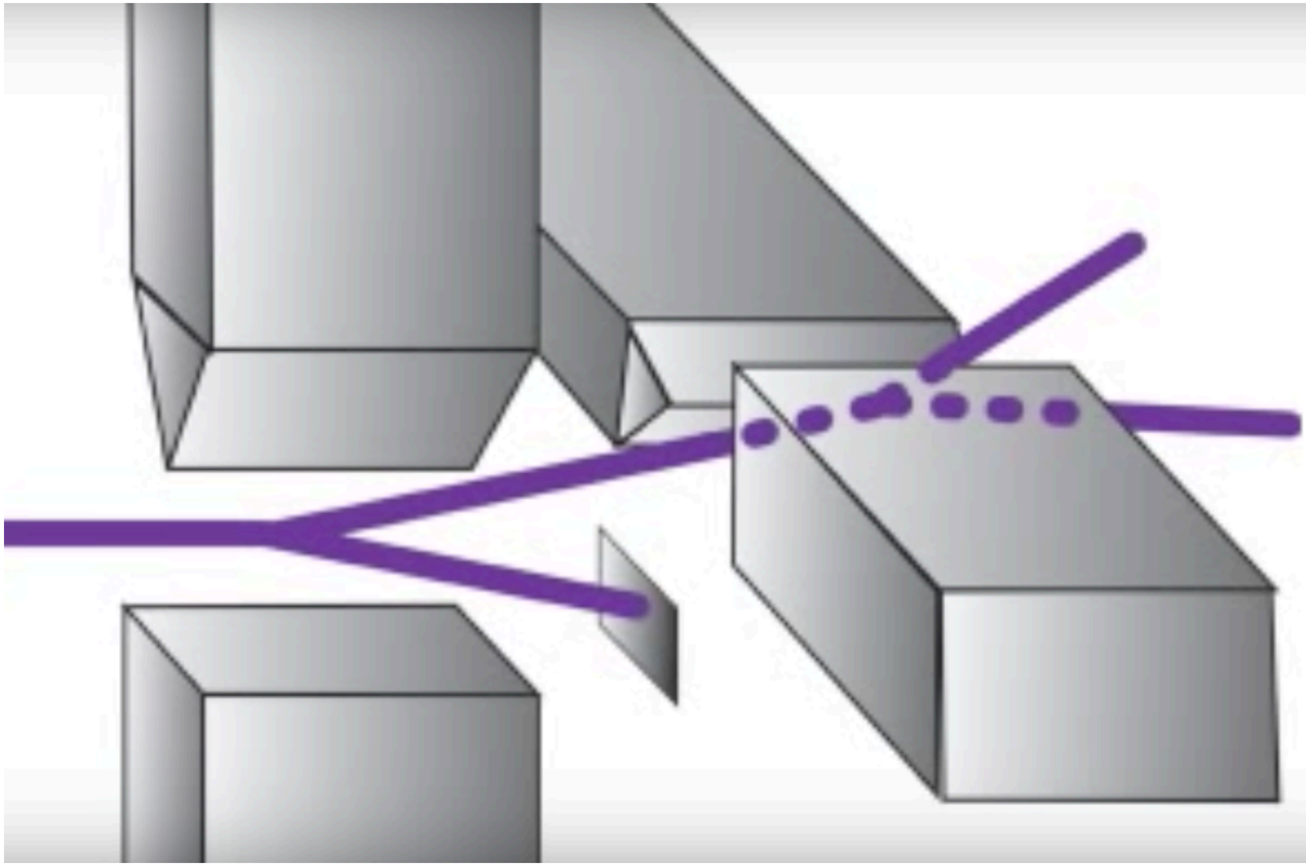
50 % - 50 %

Stern - Gerlach Sequencial

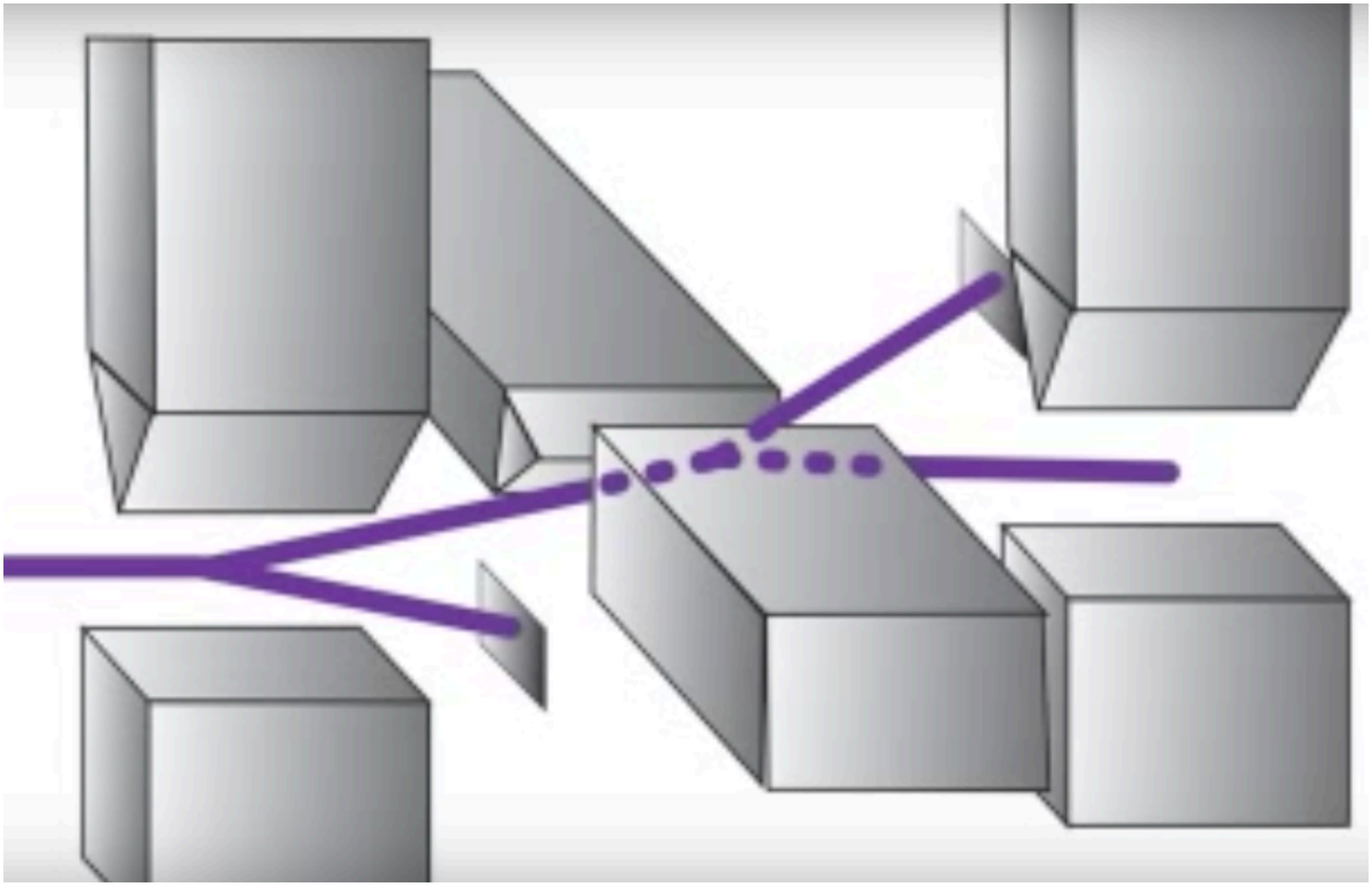
Medidas sequenciais de Stern-Gerlach



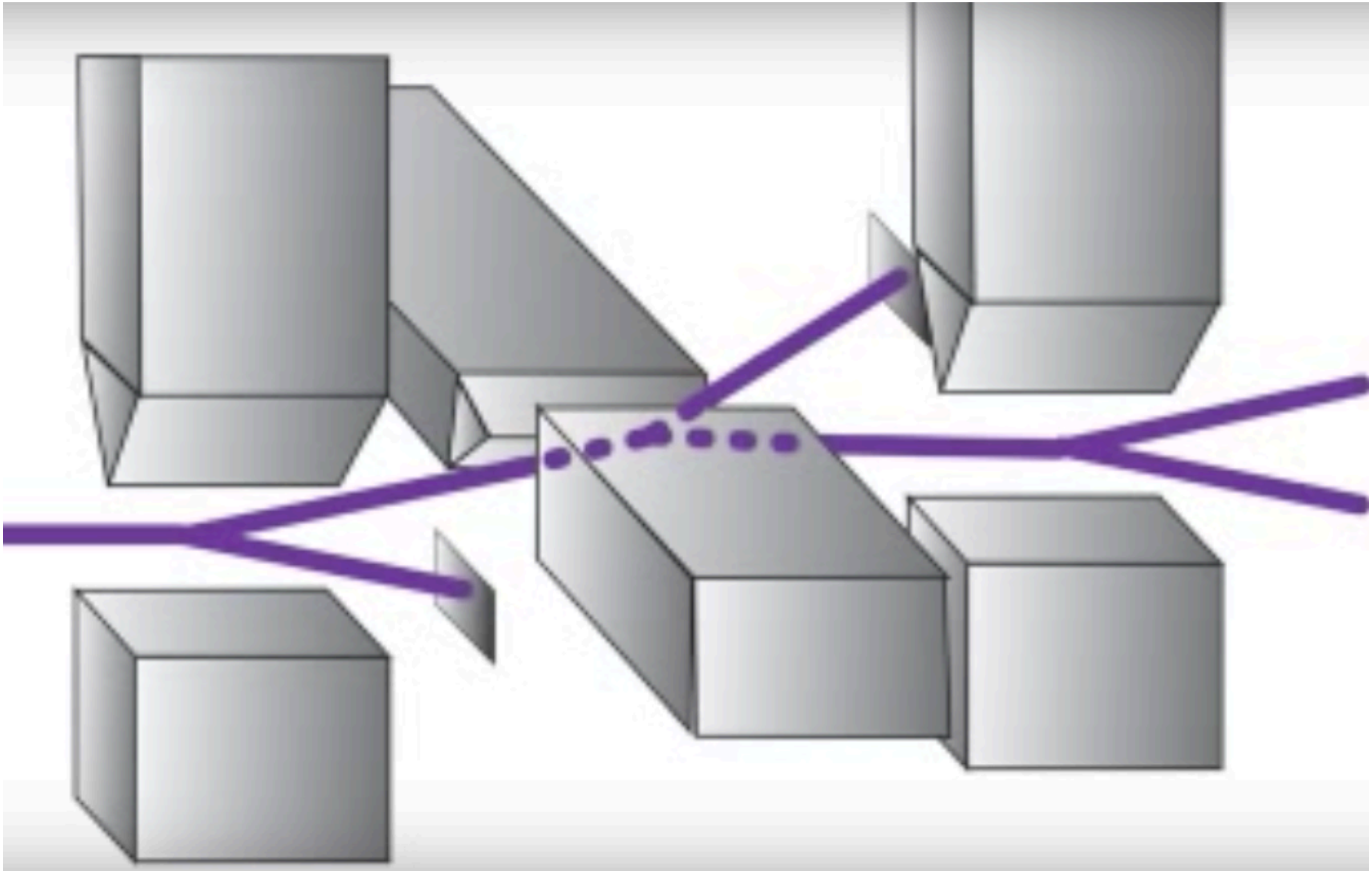
Medidas sequenciais de Stern-Gerlach



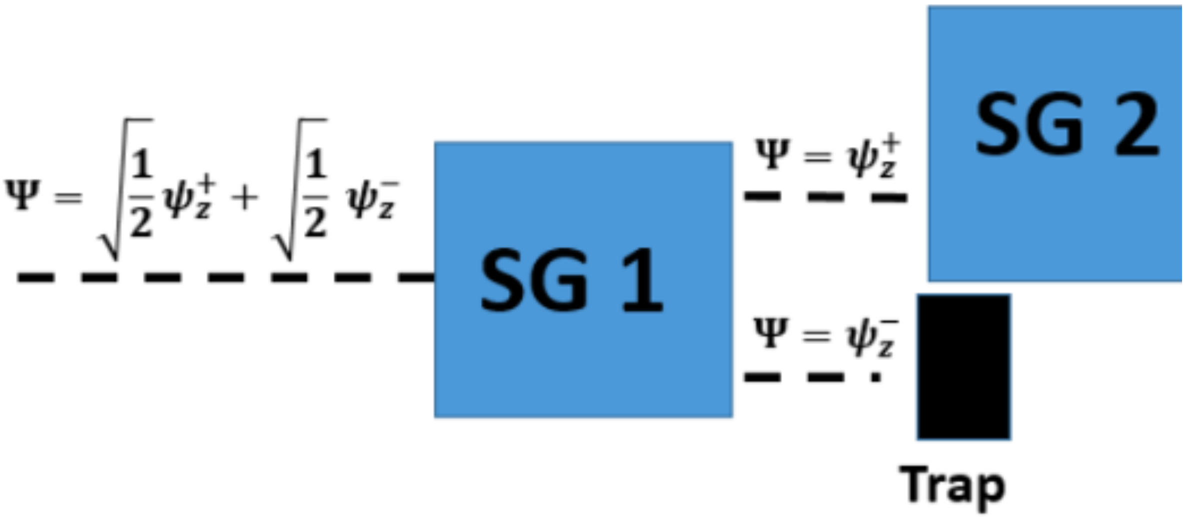
Medidas sequenciais de Stern-Gerlach



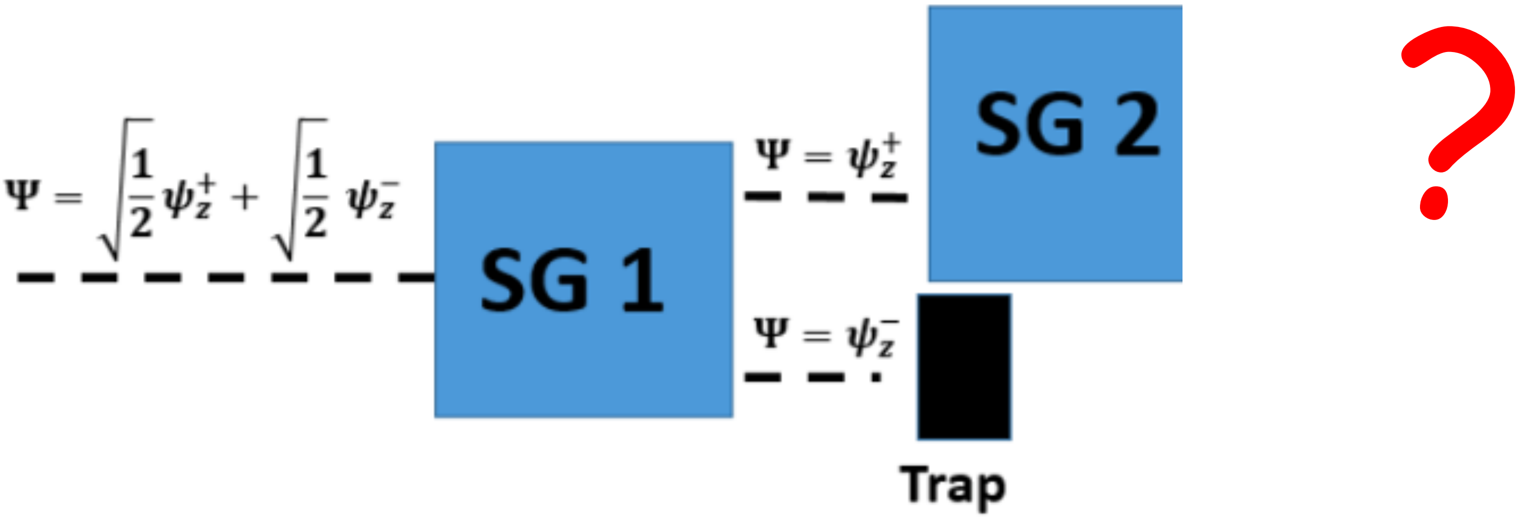
Medidas sequenciais de Stern-Gerlach



Medidas sequenciais de Stern-Gerlach

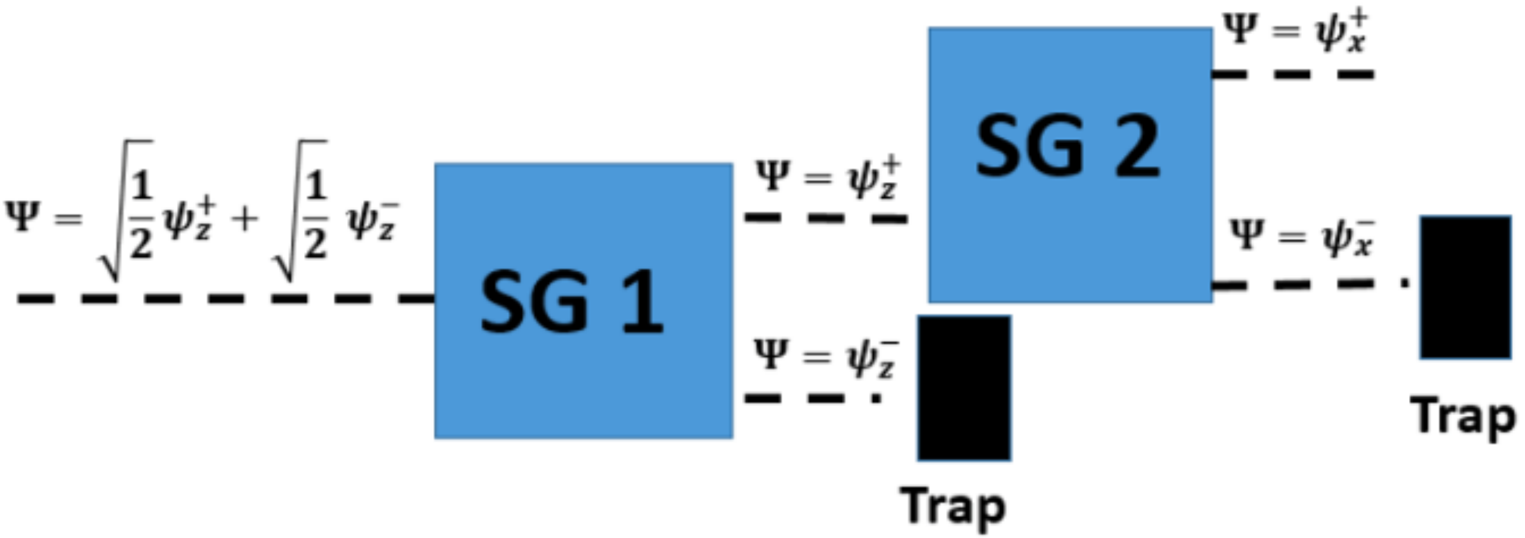


Medidas sequenciais de Stern-Gerlach

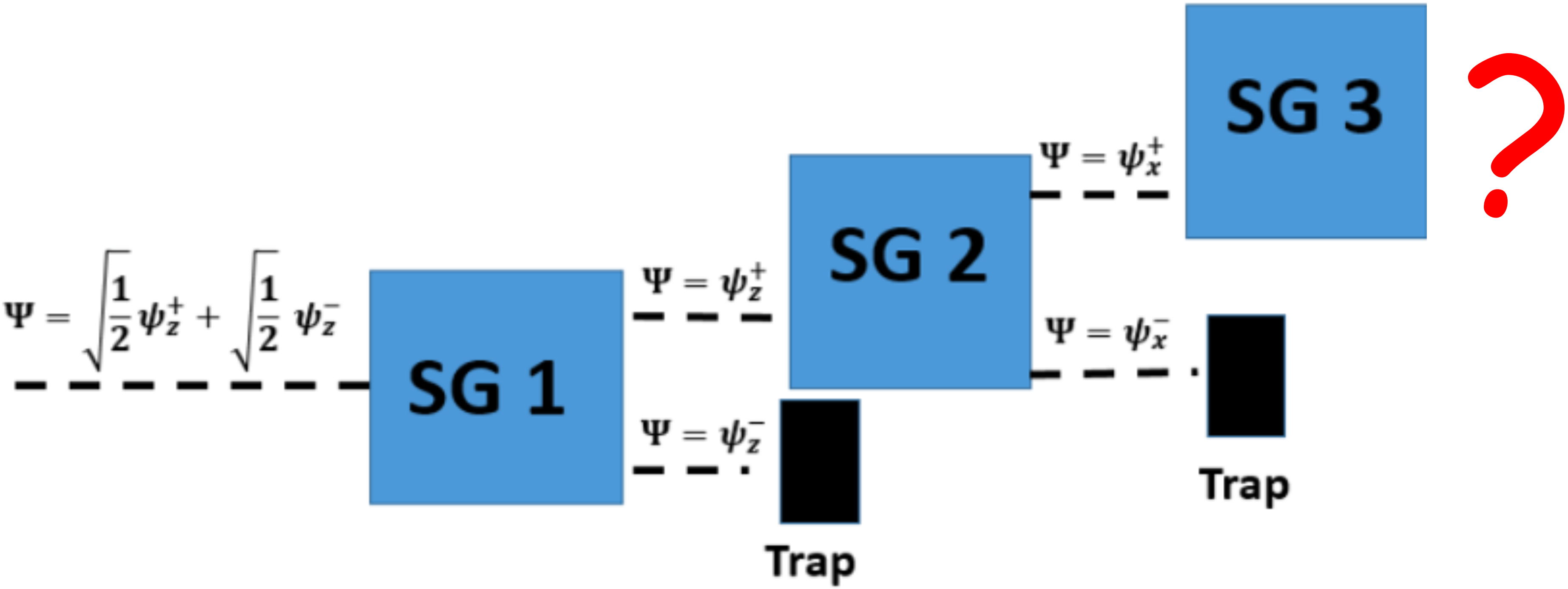


Sabendo que a partícula está no estado $|\uparrow\rangle$,
qual é o resultado da medida na componente x ?

Medidas sequenciais de Stern-Gerlach

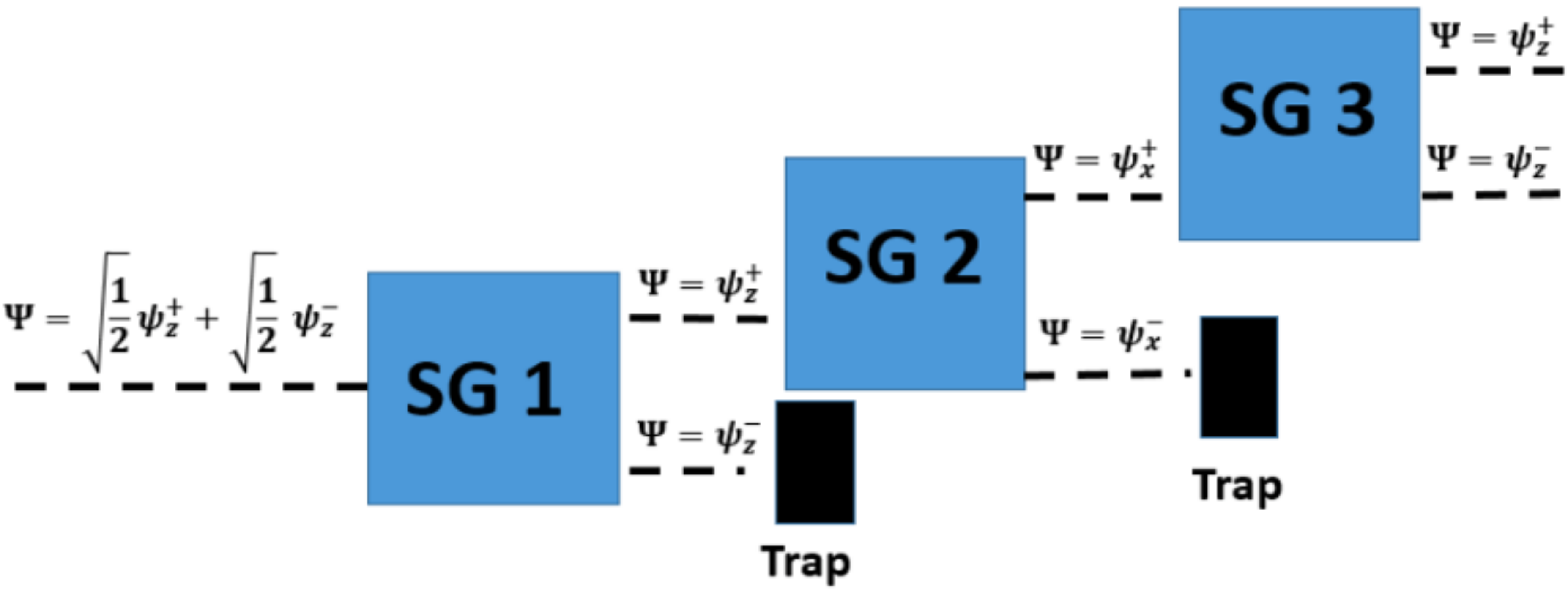


Medidas sequenciais de Stern-Gerlach



Sabendo que a partícula esteve no estado $|\uparrow\rangle$,
que depois esteve no estado $|x_+\rangle$
qual é o resultado de nova medida da componente z ?

Medidas sequenciais de Stern-Gerlach



Medidas sequenciais:
uma medida "apaga a memória" da outra !

Medidas alteram o estado

Quando um dos observáveis incompatíveis
é completamente determinado
a incerteza no outro é máxima !!!

(Princípio da incerteza)

W. Heisenberg
(1901 -1976)

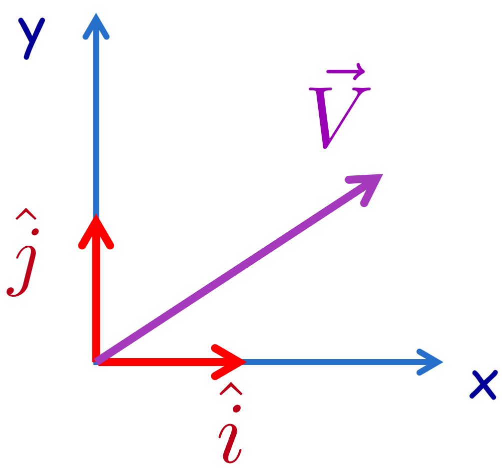
Apêndice sobre espaços vetoriais

Autoestados de S^2 e S_z

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Com estes estados vamos definir um espaço vetorial

Espaço vetorial de duas dimensões



$$\vec{V} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$$

versores $\left\{ \hat{i} = |\,\hat{i}\,\rangle \quad \hat{j} = |\,\hat{j}\,\rangle \right.$

$$\vec{V} = x\,|\hat{i}\rangle + y\,|\hat{j}\rangle$$

Espaço Vetorial

David Hilbert
(1862 -1943)

Seja um conjunto V, não-vazio, sobre o qual estão definidas as operações adição e multiplicação por escalar, isto é:

$$\forall u, v \in V \ , u + v \in V$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall u \in V, \ \alpha \mathrm{u} \in V$$

O conjunto V com essas duas operações é chamado de espaço vetorial real (ou espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$) se forem verificados os seguintes axiomas:

Em relação à adição:

A1) $u+(v+w)=(u+v)+w,\ \forall u,v,w\in V$

A2) $u+v=v+u,\ \forall u,v\in V$

A3) $\exists 0\in V, \forall u\in V, u+0=u$

A4) $\forall u\in V, \exists(-u)\in V, u+(-u)=0$

Em relação à multiplicação por escalar:

M1) $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$

M2) $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

M3) $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$

M4) $1(u)=u$

$\forall u,v\in V\ e\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

OBSERVAÇÕES:

1) Os elementos do espaço vetorial V são chamados de vetores, independente de sua natureza. Pode parecer estranho, o fato de se chamar de vetores os *polinômios*, (quando V for constituído de polinômios), as *matrizes* (quando V for constituído de matrizes), os *números* (quando V for constituído for um conjunto numérico), e assim por diante. Podemos fazer isso, pois esses elementos de natureza tão distinta se comportam de forma idêntica nas operações de adição e multiplicação de escalar, como se estivéssemos trabalhando com os próprios vetores do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

2) Se tivéssemos tomado para escalares o conjunto $\mathbb{C}$ do números complexos, V seria um *espaço vetorial complexo*.

Produto Interno num Espaço Vetorial

$$P = \langle u , v \rangle$$

P1) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ para todos $u, v \in V$;
P2) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$ para todos $u, v, w \in V$;
P3) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha \langle u, v\rangle$ para todos $u, v \in V$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$;
P4) $\langle u, u\rangle \geqslant 0$ para todo $u \in V$ e $\langle u, u\rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

(O Produto Interno Usual em $\mathbb{R}^2$)

$\langle (a, b), (c, d)\rangle = ac + bd$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{A} \,.\, \vec{B} = \langle \vec{A} , \vec{B} \rangle = \langle (A_x , A_y) , (B_x , B_y) \rangle = A_x\, B_x + A_y\, B_y$$

$$\vec{A} \,.\, \vec{A} = \langle \vec{A} , \vec{A} \rangle = \langle (A_x , A_y) , (A_x , A_y) \rangle = A_x\, A_x + A_y\, A_y$$

Espaços Vetoriais Euclidianos

Um *espaço vetorial euclidiano* é um espaço vetorial de dimensão finita, munido de um produto interno.

Norma de um Vetor

Seja V um espaço vetorial com produto interno Dado $v \in V$ define-se a *norma* de v, indicada por $|v|$, por

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x\, A_x + A_y\, A_y}$$

$|v| = 1$ vetor unitário vetor normalizado

Para normalizar: $u = \dfrac{v}{|v|}$