Derivação da inversa e derivação implícita, Teorema do Valor Médio
Aula 18

Primeiro Semestre de 2023

Derivada da Função Inversa

Considere f invertível. Então, para todo $x \in D_{f^{-1}}$,

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Já vimos que se f é contínua, então f^{-1} também é.

Se, além disso, f e f^{-1} forem deriváveis, pela Regra da Cadeia,

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1.$$

Portanto, para todo $x \in D_{f^{-1}}$, tal que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, vale

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Para mostrar que f^{-1} é diferenciável usamos a seguinte proposição:

Proposição (Derivada de funções inversas)

Seja f invertível. Se f for diferenciável em $q = f^{-1}(p)$, com $f'(q) \neq 0$, então f^{-1} será diferenciável em p e

$$\boxed{(f^{-1})'(p) = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}\,.}$$

De fato: Como f^{-1} é contínua em p, $\lim\limits_{h\to 0} f^{-1}(p+h) = f^{-1}(p)$.
Usando que $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in D_{f^{-1}}$, temos

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(p) &= \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(p+h) - f^{-1}(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{h}{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(p+h))-f(f^{-1}(p))}{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}
\end{aligned}$$

Exemplo

Se $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$, *então* $g'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$.

Recorde que, $x > 0$ *se* n *for par e* $x \neq 0$ *se* n *for ímpar.*

Solução: Note que $g(x) = x^{\frac{1}{n}} = f^{-1}(x)$ onde $f(u) = u^n$. Então

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{n-1}{n}})} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

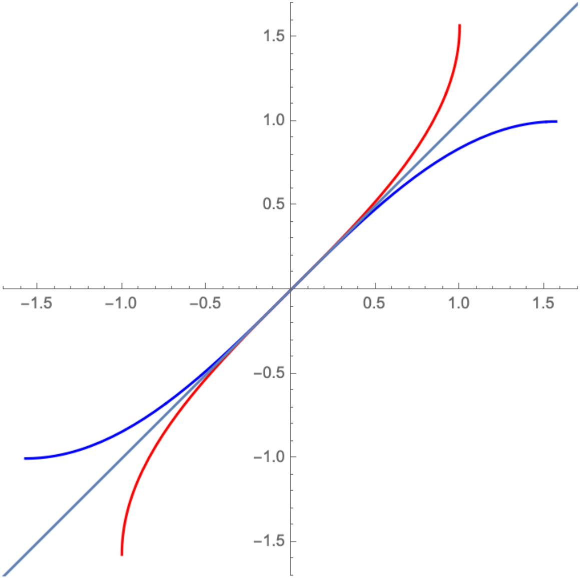
Exemplo

A inversa da função $f(x) = sen(x)$, para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, é a função $g(x) = \mathrm{arcsen}(x)$, para $x \in [-1, 1]$. Qual é a derivada de $g(x)$?

Solução: Observe que a função $\mathrm{sen}(x)$ é injetora no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ com imagem o intervalo $[-1, 1]$. Portanto, existe a função inversa $g(x) = \mathrm{arcsen}(x)$, para $x \in [-1, 1]$, dada por

$$\boxed{y = \mathrm{arcsen}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{sen}(y) = x.}$$

Gráficos seno e arco-seno



Aplicando a Proposição 1.

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(x))}.$$

Agora,
$1 = \cos^2(\operatorname{arcsen}(x)) + \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen}(x)) = \cos^2(\operatorname{arcsen}(x)) + x^2$, logo
$\cos(\operatorname{arcsen}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ pois $\cos(y) \geq 0$ para $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.
Portanto,

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De maneira análoga podemos definir as funções trigonométricas inversas do $\cos(x)$, $\operatorname{tg}(x)$, $\operatorname{cotg}(x)$, $\sec(x)$ e $\operatorname{cossec}(x)$ denominadas $\arccos(x)$, $\operatorname{arctg}(x)$, $\operatorname{arccotg}(x)$, $\operatorname{arcsec}(x)$ e $\operatorname{arccossec}(x)$.

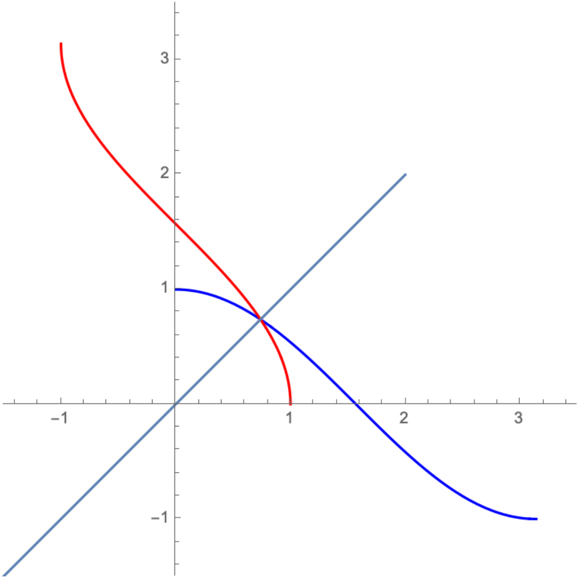
Exemplo

A inversa da função $f(x) = \cos(x)$, para $x \in [0, \pi]$, é a função $g(x) = \arccos(x)$, para $x \in [-1, 1]$. Qual é a derivada de $g(x)$?

Solução: Observe que a função $\cos(x)$ é injetora no intervalo $[0, \pi]$ com imagem o intervalo $[-1, 1]$. Portanto, existe a função inversa $g(x) = \arccos(x)$, para $x \in [-1, 1]$, dada por

$$y = \arccos(x) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(y) = x.$$

Gráficos cosseno e arco-cosseno



Aplicando a Proposição 1.

$$\boxed{\arccos'(x) = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos(x))}.}$$

Agora,

$\boxed{1 = \cos^2(\arccos(x)) + \operatorname{sen}^2(\arccos(x)) = x^2 + \operatorname{sen}^2(\arccos(x)),}$ logo $\operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ pois $\operatorname{sen}(y) \geq 0$ para $-0 \leq y \leq \pi$.

Portanto,

$$\boxed{\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

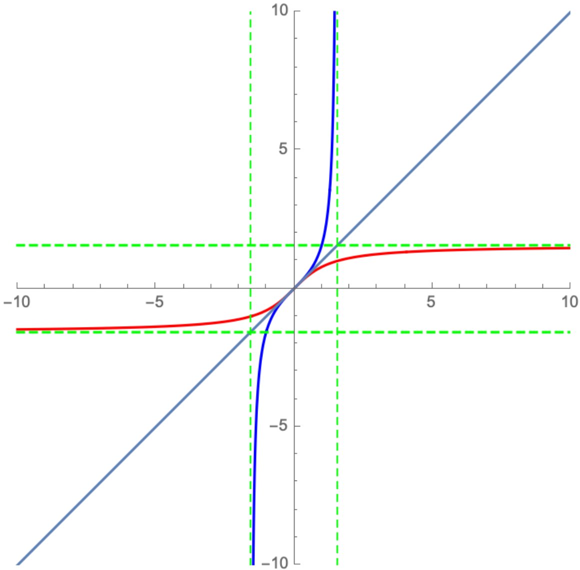
Exercício: Mostre que

$$(a)\ \operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}; \qquad (b)\ \operatorname{arccotg}'(x) = -\frac{1}{1+x^2};$$

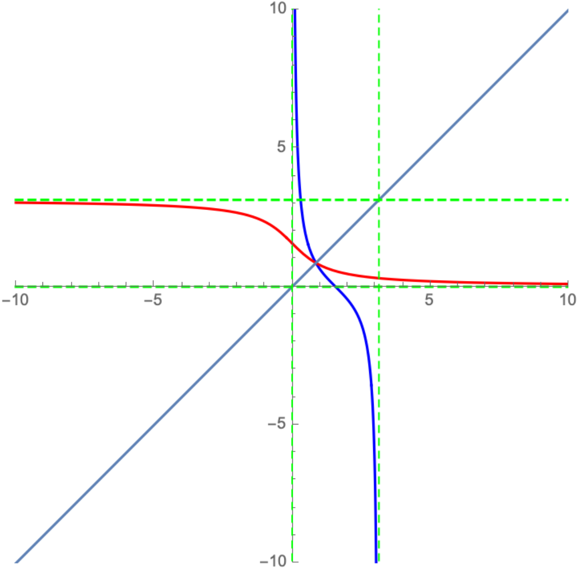
$$(c)\ \operatorname{arcsec}'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}; \qquad (d)\ \operatorname{arccossec}'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

- Para (a) considere a função $\operatorname{tg}(x)$ definida no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$
- Para (b) considere a função $\operatorname{cotg}(x)$ definida no intervalo $(0, \pi)$
- Para (c) considere a função $\sec(x)$ definida em $[0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$
- Para (d) considere a função *cossec*(x) definida em $(0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2]$

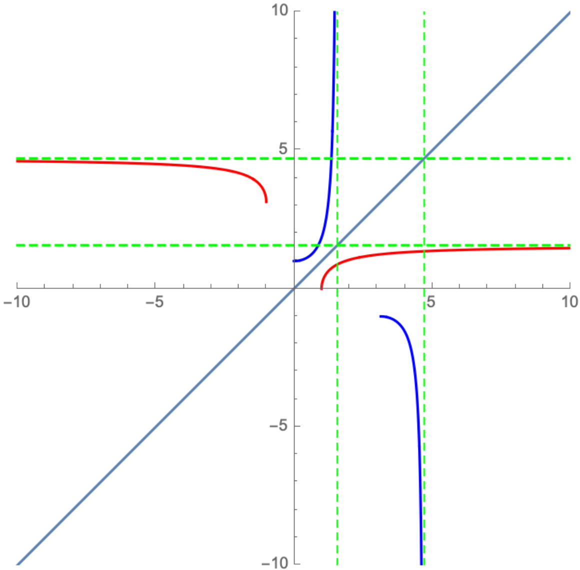
Gráficos tangente e arco-tangente



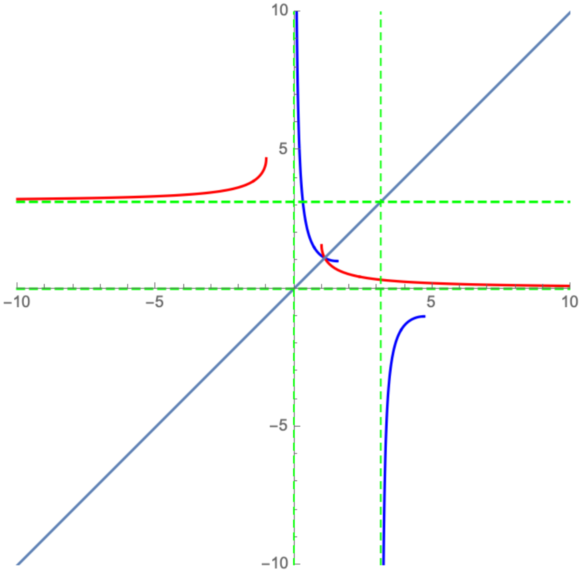
Gráficos cotangente e arco-cotangente



Gráficos secante e arco-secante



Gráficos cossecante e arco-cossecante



Derivadas de funções trigonométricas e suas inversas

$a)$ $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$ $\quad$ (b) $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$;

(c) $\operatorname{tg}'(x) = \sec^2(x)$; $\quad$ (d) $\operatorname{cotg}'(x) = -\operatorname{cossec}^2(x)$;

(e) $\sec'(x) = \sec(x)\operatorname{tg}(x)$; $\quad$ (f) $\sec'(x) = \sec(x)\operatorname{tg}(x)$;

(g) $\operatorname{arcsen}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\quad$ (h) $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(i) $\operatorname{arctg}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $\quad$ (j) $\operatorname{arccotg}'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

(k) $\operatorname{arcsec}'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; $\quad$ (l) $\operatorname{arccossec}'(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Derivação Implícita

Em geral, as funções são dadas na forma $y = f(x)$. Entretanto, algumas funções são definidas implicitamente por uma relação entre x e y.

No exemplo $x^2 + y^2 = 25$ é possível resolver uma equação e obter $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Contudo, no exemplo $x^3 + y^3 = 6xy$ não é fácil obter y como função de x.

Neste caso, para calcular a derivada de y, recorremos à **derivação implícita**, que consiste em derivar a ambos os lados da equação em relação a x e então resolver a equação resultante para encontrar y'.

A existência de uma função diferenciável $y(x)$ dada pela equação será mostrada no Cálculo III. Este resultado mostrará que sempre que podemos encontrar y' o resultado é válido.

Exemplo

Se $x^2 + y^2 = 25$, *encontre* $\frac{dy}{dx}$.

Solução: Derivando a ambos os lados da equação e usando a Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}25 \Rightarrow \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Assim, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

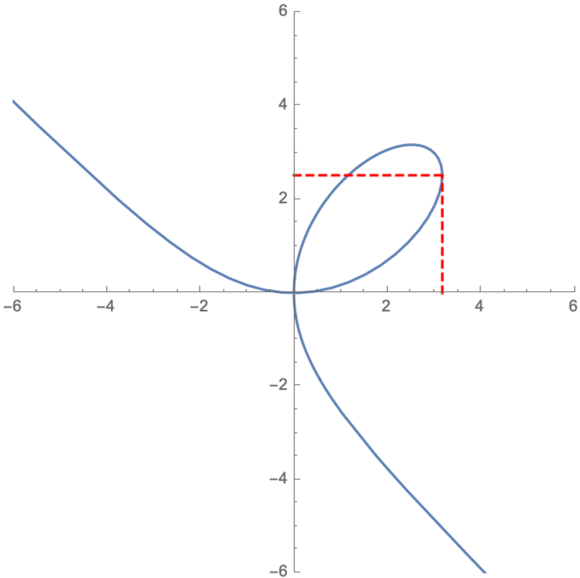
Exemplo (Fólio de Descartes)

Se $x^3 + y^3 = 6xy$, encontre $\frac{dy}{dx}$.

Solução: Derivando ambos os lados da equação em relação a x, obtemos $3x^2 + 3y^2y' = 6y + 6xy'$. Resolvendo em y'

$$\boxed{y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.}$$

Note que $(0,0)$ e $(2^{5/3}, 2^{4,3})$ são os únicos pontos do fólio onde $y^2 - 2x = 0$.



6
4
2
−6
−4
−2
2
4
6
−2
−4
−6

Exemplo

Se $y = f(x)$ é diferenciável e $xf(x) + \operatorname{sen}(f(x)) = 1$, determine $f'(x)$.

Solução: Note que,

$$0 = \frac{d}{dx}(xf(x) + \operatorname{sen}(f(x))) = f(x) + xf'(x) + \cos(f(x))f'(x).$$

Assim,

$$f'(x) = -\frac{f(x)}{x + \cos(f(x))}$$

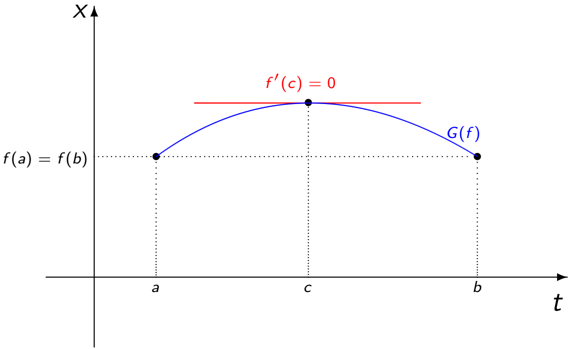
O Teorema do Valor Médio é um dos Teoremas mais importantes do Cálculo. A sua demonstração depende do seguinte resultado:

Teorema (de Rolle)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existirá $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Interpretação: Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), $x=f(t)$ a equação horária do movimento de uma partícula sobre a reta.

Se e a partícula estiver no mesmo lugar em 2 instantes distintos de tempo, pelo Teorema de Rolle, existirá um tempo para o qual a velocidade se anula.



Prova: Como f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, existem x_1 e x_2 tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $x \in [a, b]$.

Se f não é uma função constante em $[a, b]$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Logo, ao menos um dos pontos em $\{x_1, x_2\}$ pertence a (a, b).

Seja $c \in (a, b) \cap \{x_1, x_2\}$. Então c é um ponto de máximo ou de mínimo de f e $c \in (a, b)$.

Vimos que se c é um máximo ou um mínimo de f em $[a, b]$ e $c \in (a, b)$, então $f'(c) = 0$ e o resultado segue.

Se f for constante em $[a, b]$, então $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a, b)$. Logo, podemos escolher c qualquer em (a, b). $\square$

Teorema (do Valor Médio)

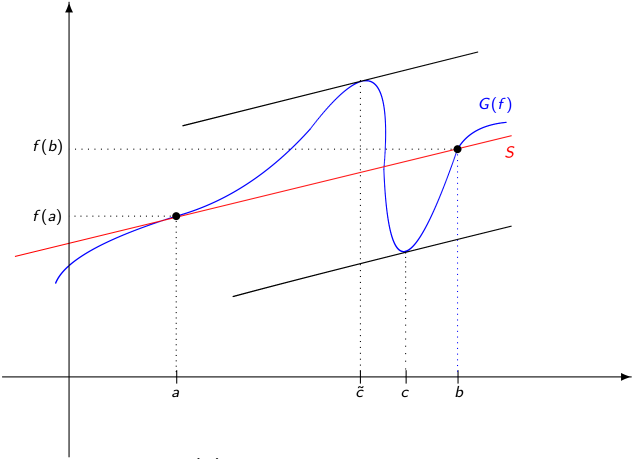
Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é contínua em* $[a,b]$ *e diferenciável em* (a,b)*,* *então existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b-a),}$$

ou seja

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.}$$

Observação: O Teorema do Valor Médio diz que, se f for contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), existirá $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)$ é o coeficiente angular da reta S que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



Observação. Se $x = f(t)$ for a equação horária do movimento de uma partícula, $v_m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ será a velocidade média entre $t = a$ e $t = b$. O Teorema do Valor Médio assegura que existe um instante $c \in (a, b)$ tal que $v_m = f'(c) =$ velocidade instantânea em $t = c$.

Prova: A reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dada por

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Definamos

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Note que, h satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, isto é,

(a) $h(x)$ é contínua em $[a, b]$.

(b) $h(x)$ é diferenciável em (a, b).

(c) $h(a) = h(b) = 0$.

Logo, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Portanto,

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \Longrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

e o Teorema do Valor Médio está demonstrado. $\square$

Agora vamos obter informação do comportamento de uma função a partir de suas derivadas. Os fatos a seguir são conseqüências do Teorema do Valor Médio.

Corolário (1)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).

Se $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, *f será crescente em* $[a, b]$.

Se $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$, *f será decrescente em* $[a, b]$.

Prova: Queremos provar que, se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$. Pelo Teorema do Valor Médio, aplicado a f em $[x_1, x_2]$, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$ devemos ter que $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Segue que f é crescente. A prova do outro item é análoga.$\square$

É fácil ver que, se f for diferenciável e não-decrescente (não-crescente) em (a, b), então $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), para todo $x \in (a, b)$. O resultado a seguir mostra que a recíproca também é verdadeira.

Corolário (2)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).

- *Se $f'(x) \geq 0$ $\forall\, x \in (a, b)$, f será não-decrescente em $[a, b]$.*
- *Se $f'(x) \leq 0$ $\forall\, x \in (a, b)$, f será não-crescente em $[a, b]$.*

Exemplo

Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f e esboce o gráfico de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$.

Solução: Calculamos $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 3(x-1)(x-\frac{1}{3})$ e analisamos o sinal.

- $f'(x) > 0$ em $(-\infty, \frac{1}{3})$ e $(1, +\infty) \Rightarrow f$ é crescente em $(-\infty, \frac{1}{3}]$ e $[1, +\infty)$,
- $f'(x) < 0$ em $(\frac{1}{3}, 1) \Rightarrow f$ é decrescente $[\frac{1}{3}, 1]$.
- $f(0) = 2$, $f(\frac{1}{3}) = 2 + \frac{4}{27}$, $f(1) = 2$, $f(x) \geq 2$, for $x \geq 0$, $f(-1) = -2$ e $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
- Do Teorema do Valor Intermediário e do fato que f é injetora em $(-\infty, \frac{1}{3}]$, existe um único $z \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = 0$ e $z \in (-1, 0)$.

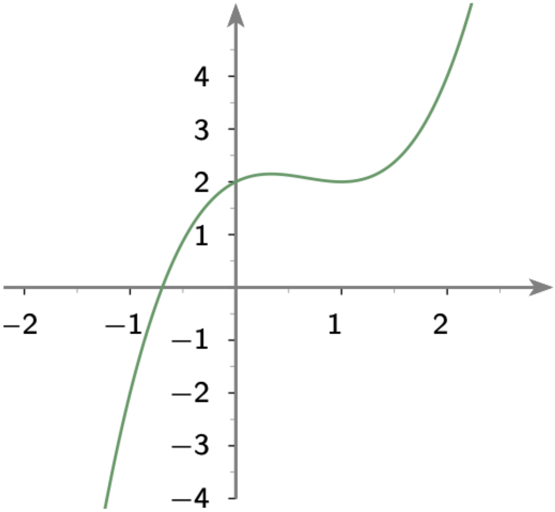


Figura: Esboço do gráfico