

Exemplo 10.7. Vamos considerar a série Chuva–Lavras, com 384 observações mensais (janeiro de 1966 a dezembro de 1997). Utilizaremos 372 observações para a identificação, estimação e verificação do modelo; as 12 últimas observações servirão como base para comparar as previsões.

A Figura 10.2 apresenta o gráfico da série, o periodograma e as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais. O periodograma apresenta um pico na frequência $\frac{32}{384}$ ciclos, indicando (como veremos no Capítulo 14) uma componente periódica de 12 meses. A existência dessa componente periódica também se reflete no comportamento senoidal do correlograma e indica a necessidade de se aplicar uma diferença sazonal de ordem 12, à série original, com o objetivo de eliminar essa componente.

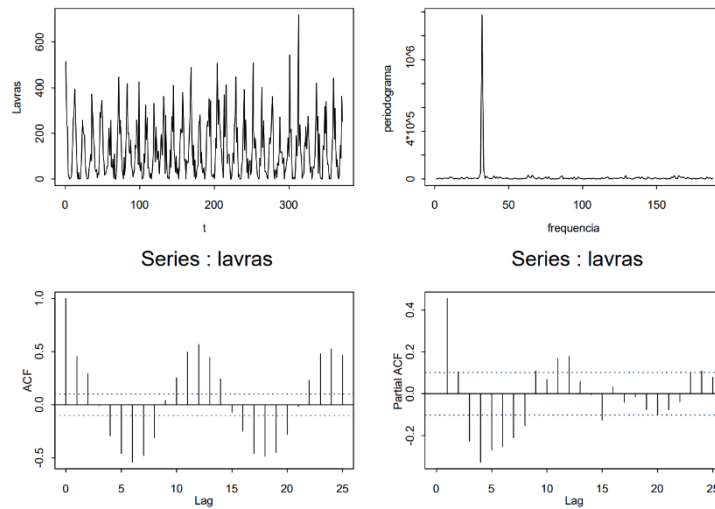


Figura 10.2: Série Chuva–Lavras, periodograma e funções de autocorrelação e autocorrelação parcial.

A Figura 10.3 apresenta as fac e facp da série $(1 - B^{12})Z_t$, com os respectivos intervalos de confiança. A análise do correlograma revela, nitidamente, a presença de correlações altas nos “lags” 12, 15 e 16. Além disso, as demais autocorrelações são não significantes, indicando um comportamento estacionário na série com uma diferença sazonal. Isto sugere, como modelo preliminar, um $\text{SARIMA}(0, 0, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ com uma constante:

$$(1 - B^{12})Z_t = (1 - \Theta_1 B^{12})a_t + \theta_0. \quad (10.29)$$

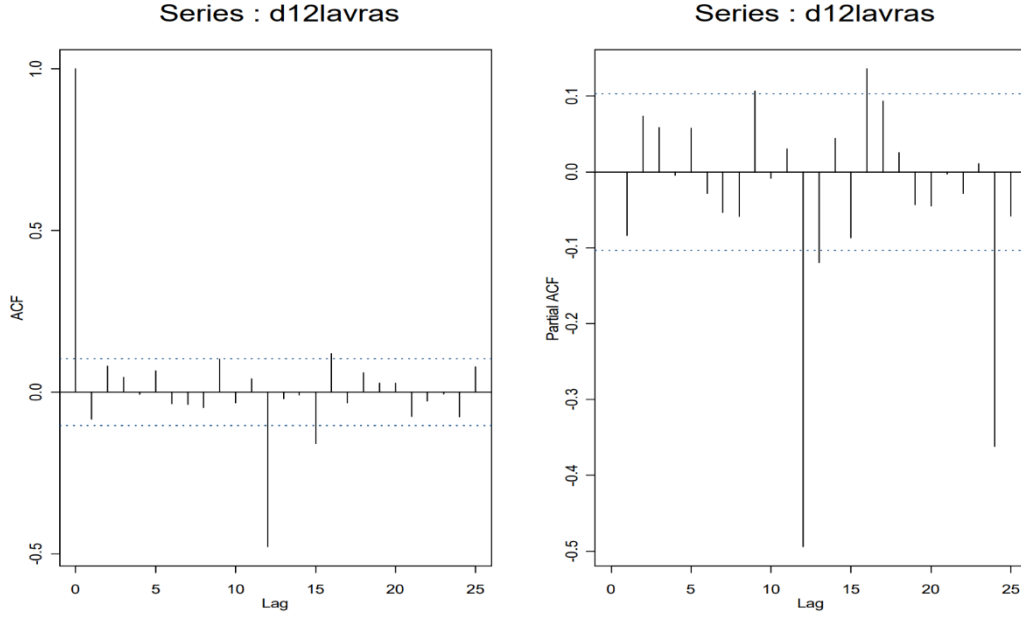


Figura 10.3: Fac e facp da série $(1 - B^{12})Z_t$

O Quadro 10.2 apresenta a estimação dos parâmetros utilizando o R. As fac e facp dos resíduos do modelo (10.29) estão na Figura 10.4. Analisando os resultados do Quadro 10.2, vemos que θ_0 não é significativo, devendo, portanto, ser retirado do modelo. Além disso, a análise residual (Figura 10.4) sugere a introdução de um polinômio autorregressivo no modelo, pois ϕ_{11} , ϕ_{99} e $\phi_{15,15}$ são significativamente diferentes de zero, indicando como modelo alternativo

$$(1 - \phi_1 B - \phi_9 B^9 - \phi_{15} B^{15})(1 - B^{12})Z_t = (1 - \Theta_1 B^{12})a_t. \quad (10.30)$$

Entretanto, ao ajustarmos esse modelo, verificamos que obtemos a informação $\text{s.e}(\hat{\phi}_1) = \text{NaN}$ (impossível de ser calculado) e, portanto, ϕ_1 foi retirado do modelo, indicando-se um novo modelo alternativo

$$(1 - \phi_9 B^9 - \phi_{15} B^{15})(1 - B^{12})(1 - B^{12})Z_t = (1 - \Theta_1 B^{12})a_t. \quad (10.31)$$

Quadro 10.2: Ajustamento de um modelo SARIMA(0,0,0) $\times$ (0,1,1)₁₂, com θ_0 , à série Chuva-Lavras.

	Estimate	SE	t-value	p-value
sma1	-0.9998	0.0567	-17.6300	0.0000
constant	0.0233	0.0375	0.6233	0.5335

sigma2 estimated as 6015
log likelihood = -2097.76
aic = 4201.52

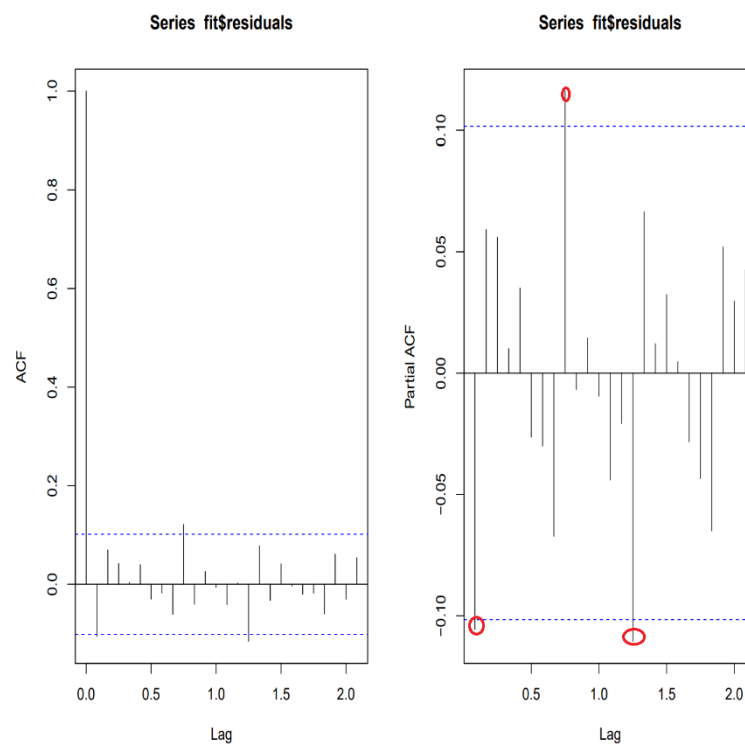


Figura 10.4: Fac e facp dos resíduos do modelo SARIMA (0,0,0) $\times$ (0,1,1)₁₂.

Assim, um modelo proposto para a Série Chuva - Lavras é dado por

com $\hat{\sigma}_a^2 = 5826$, AIC=4192,78 e $Q_{21} = 14,12$, com valor- $P = 0,8645$.

residuals Box-Ljung test: X-squared = 14.119, df = 21, p-value = 0.8645

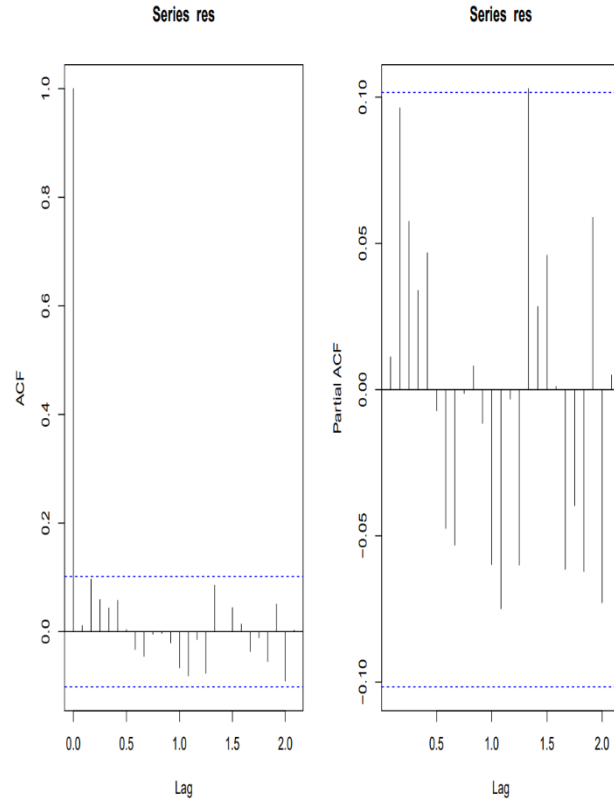


Figura 10.5: Fac e facp dos resíduos do modelo (10.32).

Entretanto, se observarmos o valor de $\Theta_1 = -1,0000(0,0608)$, veremos que (10.31) é um modelo não invertível. Na tentativa de encontrarmos um modelo invertível, trocaremos o parâmetro de média móvel sazonal por dois parâmetros autorregressivos sazonais, colocando também um polinômio AR(9) (comportamento de $\hat{\phi}_{99}$ na Figura 10.3).

Portanto um segundo modelo sugerido é um SARIMA(9,0,0) $\times$ (2,1,0)₁₂:

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_9 B^9)(1 - \Phi_1 B^{12} - \Phi_2 B^{24})Z_t = a_t. \quad (10.33)$$

Quadro 10.4: Ajustamento do modelo (10.33) à série Chuva-Lavras.

	Estimate	SE	t-value	p-value
ar1	-0.1329	0.0532	-2.4998	0.0129
ar2	0.0888	0.0537	1.6534	0.0991
ar3	0.0647	0.0540	1.1978	0.2318
ar4	0.0359	0.0547	0.6570	0.5116
ar5	0.0587	0.0540	1.0864	0.2780
ar6	-0.0049	0.0549	-0.0894	0.9288
ar7	-0.0360	0.0538	-0.6689	0.5040
ar8	-0.0573	0.0536	-1.0700	0.2854
ar9	0.1032	0.0535	1.9286	0.0546
sar1	-0.7132	0.0487	14.6371	0.0000
sar2	-0.4186	0.0483	-8.6675	0.0000

sigma2 estimated as 7133
log likelihood = -2112.02
aic = 4248.03

Quadro 10.5: Ajustamento do modelo (10.33) incompleto à série Chuva-Lavras (SE entre parênteses).

ar1	ar2	ar3	ar4	ar5	ar6
-0.1364	0	0	0	0	0
(0.0527)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
ar7	ar8	ar9	sar1	sar2	
0	0	0.1091	-0.7128	-0.4228	
(0)	(0)	(0.0532)	(0.0483)	(0.0480)	

sigma2 estimated as 7261
log likelihood = -2115.24
aic = 4240.47

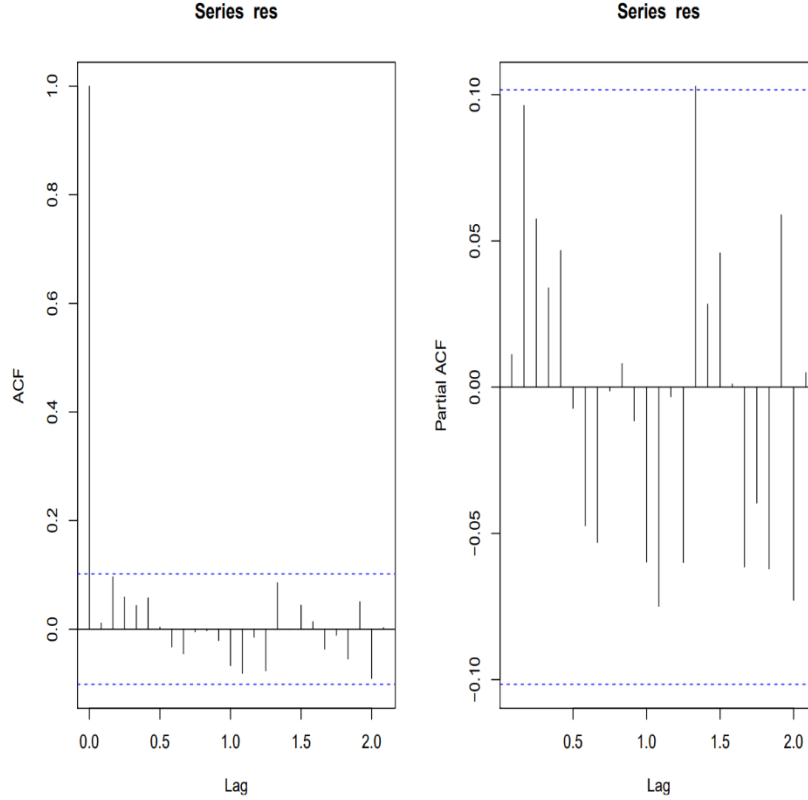


Figura 10.7: Fac e facp dos resíduos do modelo (10.34).

Analisando o Quadro 10.4, vemos ϕ_1, ϕ_9, Φ_1 e Φ_2 são significativos, com o nível de 5,5%. O Quadro 10.5 apresenta o ajustamento do modelo incompleto,

$$(1 + 0,1364B - 0,1091B^9)(1 + 0,7128B^{12} + 0,4228B^{24})(1 - B^{12})Z_t = a_t, \quad (10.34)$$

$\sigma_a^2 = 7261$, $AIC=4240,47$ e $Q_{20} = 24,671$, com valor $P=0,2143$.

Podemos verificar que o modelo (10.32), apesar de ser não invertível, é o que melhor se ajusta às observações (menor AIC, maior log-verossimilhança e menor variância residual).

As previsões para a precipitação em Lavras durante o ano de 1997, com origem em dezembro de 1976 ($t = 372$), estão nas Tabelas 10.5 e 10.6, utilizando os modelos (10.32) e (10.34), respectivamente. A representação gráfica dessas tabelas estão nas Figuras 10.6 e 10.8, respectivamente.

Com o objetivo de comparar os dois modelos ajustados, apresentamos algumas medidas de ajustamento e adequação de previsão na Tabela 10.7.

Analisando as informações da Tabela 10.7, podemos concluir que o modelo (10.32), apesar de não invertível, é o que melhor se ajusta e o que fornece melhores previsões.

Tabela 10.5: Previsões para a série Chuva–Lavras, utilizando o modelo (10.32), com origem em $t = 372$, $h = 1, 2, \dots, 12$.

$t + h$	$\hat{Z}_t(h)$	Erro padrão	Z_{t+h}
373	281,4125	77,5554	383,3000
374	209,7010	77,5554	114,5000
375	149,0552	77,5554	96,5000
376	81,2673	77,5532	61,1000
377	35,9498	77,5532	41,0000
378	41,2916	77,5532	52,6000
379	18,3567	77,5531	5,6000
380	37,0248	77,5531	1,2000
381	70,5101	77,5531	38,8000
382	122,5116	78,1451	164,1000
383	208,7317	78,1451	194,8000
384	276,5557	78,1451	253,6000
$EQMP_{372} = 2583,9827$			

Tabela 10.6: Previsões atualizadas para a série Chuva–Lavras, utilizando o modelo (10.34), com origem em $t = 372$, $h = 1, 2, \dots, 12$.

t	$\hat{Z}_t(h)$	Erro padrão	Z_{t+h}
373	294,8034	85,2124	383,3000
374	275,5695	86,0016	114,5000
375	188,2578	86,0162	96,5000
376	44,3199	86,0165	61,1000
377	128,1415	86,0165	41,0000
378	21,8078	86,0165	52,6000
379	0,0000	86,0165	5,6000
380	30,3922	86,0165	1,2000
381	43,6667	86,0165	38,8000
382	123,7323	86,5179	164,1000
383	213,3514	86,5551	194,8000
384	334,7162	86,5566	253,6000
$EQMP_{372} = 5039,8893$			

Tabela 10.7: Medidas de qualidade de ajuste e previsão para os modelos (10.32) e (10.34).

Modelos	Ajustamento		Previsão
	σ_a^2	AIC	EQM_{372}
(10.32)	5826	4.192, 78	2.583, 98
(10.34)	7.261	4.240, 47	5.039, 89

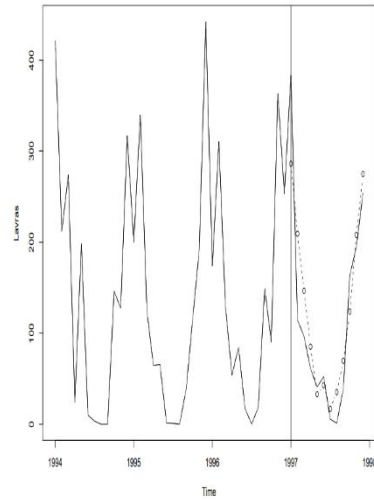


Figura 10.6: Série Chuva–Lavras, observações de janeiro de 1994 a dezembro de 1997 e previsões (linha tracejada com círculos) para o ano de 1997, utilizando o modelo (10.32).

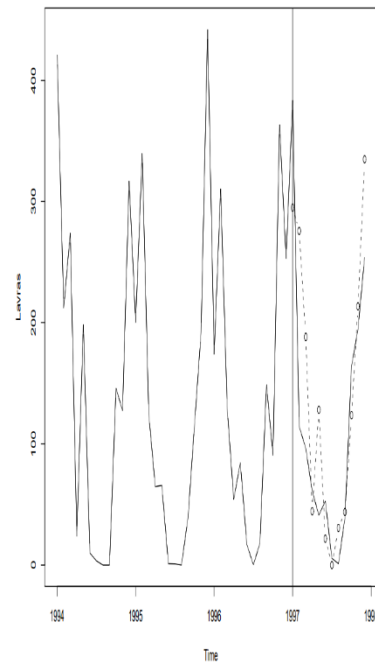


Figura 10.8: Série Chuva–Lavras, observações e previsões utilizando o modelo (10.34).

Exemplo 10.8. Vamos analisar agora a série Índices–IPI, no período compreendido entre janeiro de 1985 e julho de 2000. Utilizaremos as primeiras 180 observações para a identificação, estimação e verificação do modelo. As últimas 7 observações servirão como base para comparar as previsões. Observamos, na Figura 10.9, que a série apresenta uma componente sazonal de período 12 me-

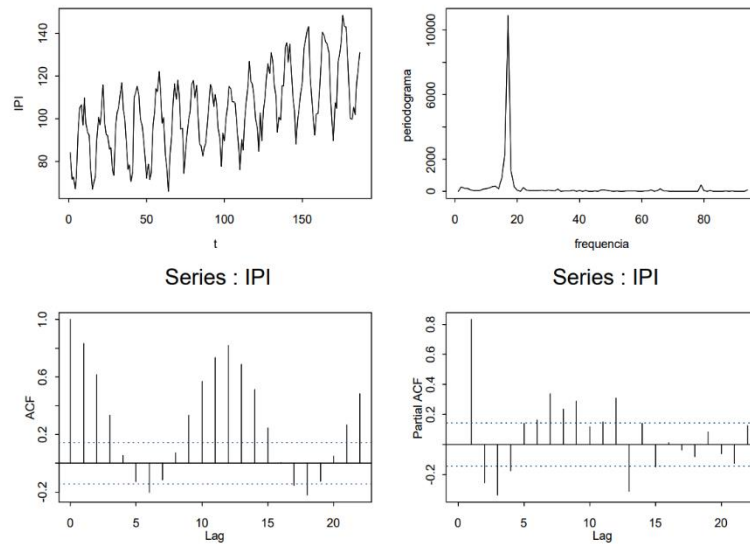


Figura 10.9: Série Índices–IPI, periodograma, fac e facp.

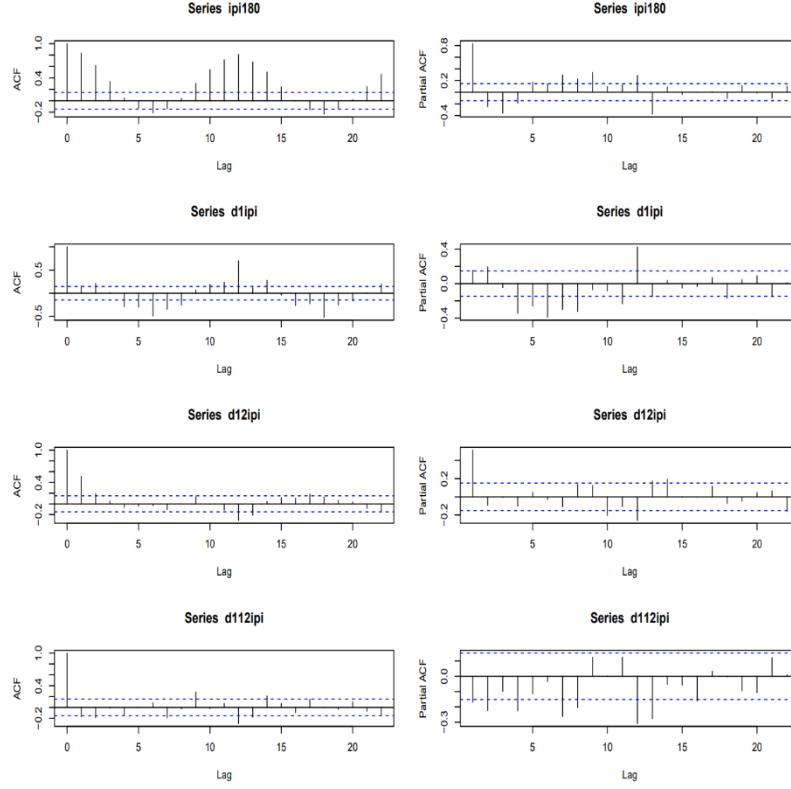


Figura 10.10: Série Índices-IPI, fac e facp das séries Z_t , $(1 - B)Z_t$, $(1 - B^{12})Z_t$ e $(1 - B)(1 - B^{12})Z_t$.

A Figura 10.10 apresenta as fac e facp das séries Z_t , $(1 - B)Z_t$, $(1 - B^{12})Z_t$ e $(1 - B)(1 - B^{12})Z_t$. Uma análise dessas funções sugere dois modelos preliminares:

- (a) SARIMA(0, 0, 1) $\times$ (0, 1, 1)₁₂ com θ_0 , isto é,

$$(1 - B^{12})Z_t = \theta_0 + (1 - \theta_1 B)(1 - \Theta_1 B^{12})a_t \quad (10.35)$$

- (b) SARIMA(0, 1, 1) $\times$ (0, 1, 1)₁₂, isto é,

$$(1 - B)(1 - B^{12})Z_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \Theta_1 B^{12})a_t, \quad (10.36)$$

que serão estimados, verificados e comparados com relação ao ajustamento e à capacidade de prever valores futuros da série.

(a) Modelo preliminar (10.35)

O Quadro 10.6 e a Figura 10.11 apresentam o ajustamento do modelo (10.35) e as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial dos resíduos. Verificamos, utilizando o Quadro 10.6, que todos os parâmetros são significantes, entretanto, a análise da Figura 10.11 nos mostra que o modelo não é adequado, uma vez que várias autocorrelações residuais são significativamente diferentes de zero. Valores altos de r_2 , $\hat{\phi}_{99}$ e $\hat{\phi}_{14,14}$ sugerem o modelo alternativo

$$(1 - B^{12})(1 - \phi_9 B^9 - \phi_{14} B^{14})Z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)(1 - \Theta_1 B^{12})a_t, \quad (10.37)$$

que ao ser ajustado revela uma autocorrelação residual de ordem três, r_3 , significativamente diferente de zero. Acrescentando um parâmetro de média móvel de ordem três, temos um novo modelo

$$(1 - B^{12})(1 - \phi_9 B^9 - \phi_{14} B^{14})Z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \theta_3 B^3)(1 - \Theta_1 B^{12})a_t, \quad (10.38)$$

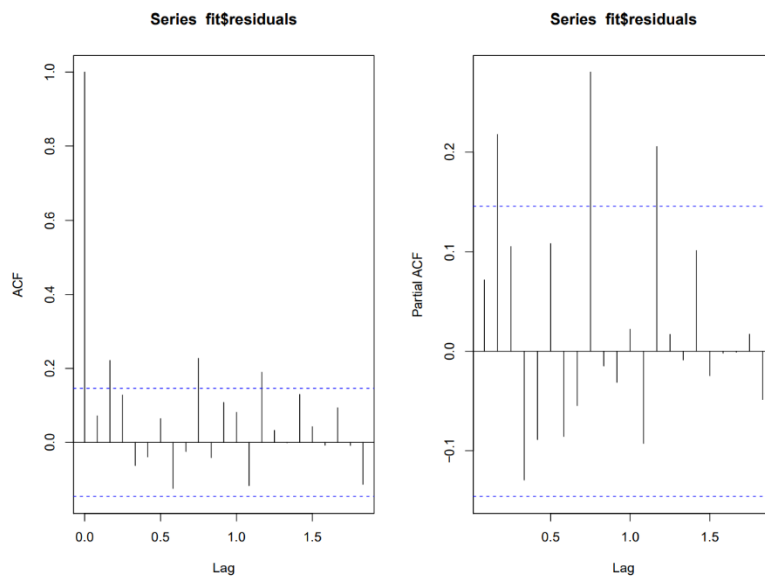
que tem seu ajustamento e fac e facp residuais apresentados no Quadro 10.7 e Figura 10.12, respectivamente. Analisando o Quadro 10.7, constatamos que todos os parâmetros são significantes; além disso, a análise das fac e facp residuais e da estatística de Ljung-Box não revelam nenhuma quebra de comportamento de ruído branco.

Assim, um primeiro modelo adequado à série Índices - IPI é dado por

$$\begin{aligned} & (1 - B^{12})(1 - 0,3271B^9 - 0,2927B^{14})Z_t \\ & = (1 + 0,6093B + 0,3790B^2 + 0,2272B^3)(1 - 0,5178B^{12})a_t, \end{aligned} \quad (10.39)$$

com $\hat{\sigma}_a^2 = (5,18)^2$.

Quadro 10.6: Ajustamento do modelo (10.35) à série Índices-IPI.				
	Estimate	SE	t-value	p-value
ma1	0.4984	0.0629	7.9266	0
sma1	-0.5457	0.0825	-6.6124	0
constant	0.1975	0.0271	7.2796	0
sigma2 estimated as 31.98				
log likelihood = -531.71				
aic = 1071.42				
residuals Box-Ljung test: X-squared = 24.671, df = 20, p-value = 0.2143				



Quadro 10.7: Ajustamento do modelo (10.38) à série Índices-IPÍ (SE entre parênteses).								
ar1	ar2	ar3	ar4	ar5	ar6	ar7	ar8	ar9
0	0	0	0	0	0	0	0	0.3271
(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0.0705)
ar10	ar11	ar12	ar13	ar14	ma1	ma2	ma3	sma1
0	0	0	0	0.2927	0.6093	0.3790	0.2272	-0.5178
(0)	(0)	(0)	(0)	(0.0727)	(0.0735)	(0.0815)	(0.0745)	0.0690
sigma2 estimated as 26.84								
log likelihood = -518.15								
aic = 1050.31								
Residuals Box-Ljung test: X-squared = 16.314, df = 18, p-value = 0.5706								

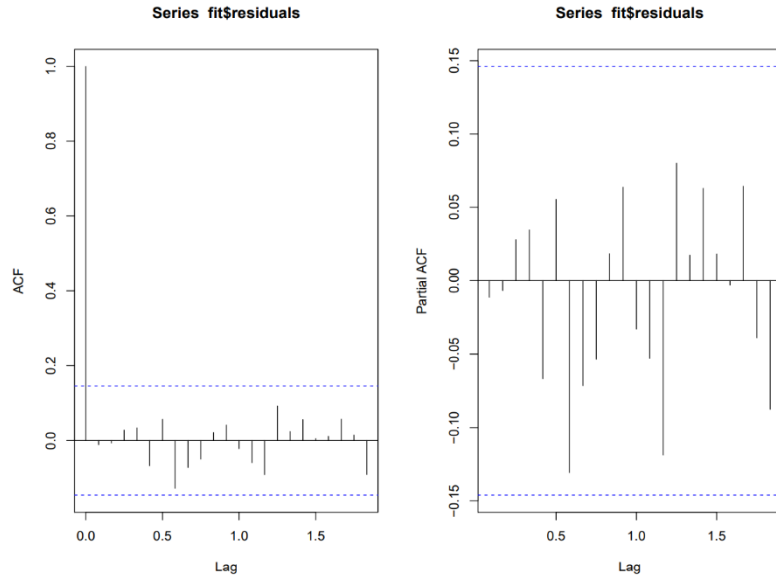
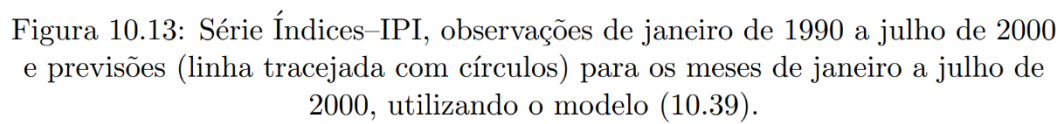


Figura 10.12: Fac e facp dos resíduos do modelo (10.39) ajustado à série Índices–IPI.

As previsões, com origem em $t = 180$ (dezembro de 1999), para os meses de janeiro a julho de 2000 encontram-se na Tabela 10.8 e a respectiva representação gráfica na Figura 10.13. Observe que, na última linha dessa tabela, apresentamos o erro quadrático médio de previsão, que será utilizado na comparação dos dois modelos propostos para a série Índices: IPI.

Tabela 10.8: Previsões para a série Índices–IPI, utilizando o modelo (10.39), com origem em $t = 180$ e $h = 1, 2, \dots, 7$.

$t + h$	$\hat{Z}_t(h)$	Erro padrão	Z_{t+h}
181	92,1105	5,1811	100,1300
182	104,1630	6,0672	99,9000
183	102,2110	6,3770	105,3800
184	124,8182	6,4847	101,9600
185	129,1130	6,4847	116,1900
186	142,4084	6,4847	124,6600
187	146,3081	6,4847	131,1000
$EQMP_{180} = 189,76$			



Quadro 10.9: Ajustamento do modelo (10.40) à série Índices-IPI (SE entre parênteses).								
ar1	ar2	ar3	ar4	ar5	ar6	ar7	ma1	sma1
0 (0)	0 (0)	0 (0)	-0.2739 (0.0717)	0 (0)	0 (0)	-0.2774 (0.0725)	-0.5274 (0.1027)	-0.6358 (0.0626)
sigma2 estimated as 32.33								
log likelihood=-526.41								
AIC=1062.81								

(b) Modelo preliminar (10.36)

O Quadro 10.8 e a Figura 10.14 apresentam o ajustamento do modelo (10.36) e as fac e facp residuais. Todos os parâmetros do modelo são significantes, entretanto, o comportamento da fac mostra que o modelo é inadequado. Os valores grandes de $\hat{\phi}_{44}$ e $\hat{\phi}_{77}$ sugerem a inclusão de um polinômio AR no modelo, isto é,

$$(1 - \phi_4 B^4 - \phi_7 B^7)(1 - B)(1 - B^{12})Z_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \Theta_1 B^{12})a_t. \quad (10.40)$$

O ajustamento do modelo (10.40) bem como o comportamento dos resíduos são apresentados no Quadro 10.9 e Figura 10.15, respectivamente. O comportamento das fac e facp revela que o modelo (10.40) pode ser melhorado, introduzindo um parâmetro AR de ordem 5 no modelo ($\hat{\phi}_{55} = -0,16$ está no limite do intervalo de confiança). Assim, o novo modelo proposto é

$$(1 - \phi_4 B^4 - \phi_5 B^5 - \phi_7 B^7)(1 - B)(1 - B^{12})Z_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \Theta_1 B^{12})a_t, \quad (10.41)$$

com ajustamento e fac e facp residual apresentados no Quadro 10.10 e Figura 10.16, respectivamente.

Quadro 10.8: Ajustamento do modelo (10.36) à série Índices-IPI (SE entre parênteses).								
ar1	ar2	ar3	ar4	ar5	ar6	ar7	ma1	sma1
0	0	0	-0.2739	0	0	-0.2774	-0.5274	-0.6358
(0)	(0)	(0)	(0.0717)	(0)	(0)	(.0725)	0.1027	0.0626
sigma2 estimated as 32.33								
log likelihood=-526.41								
AIC=1062.81								

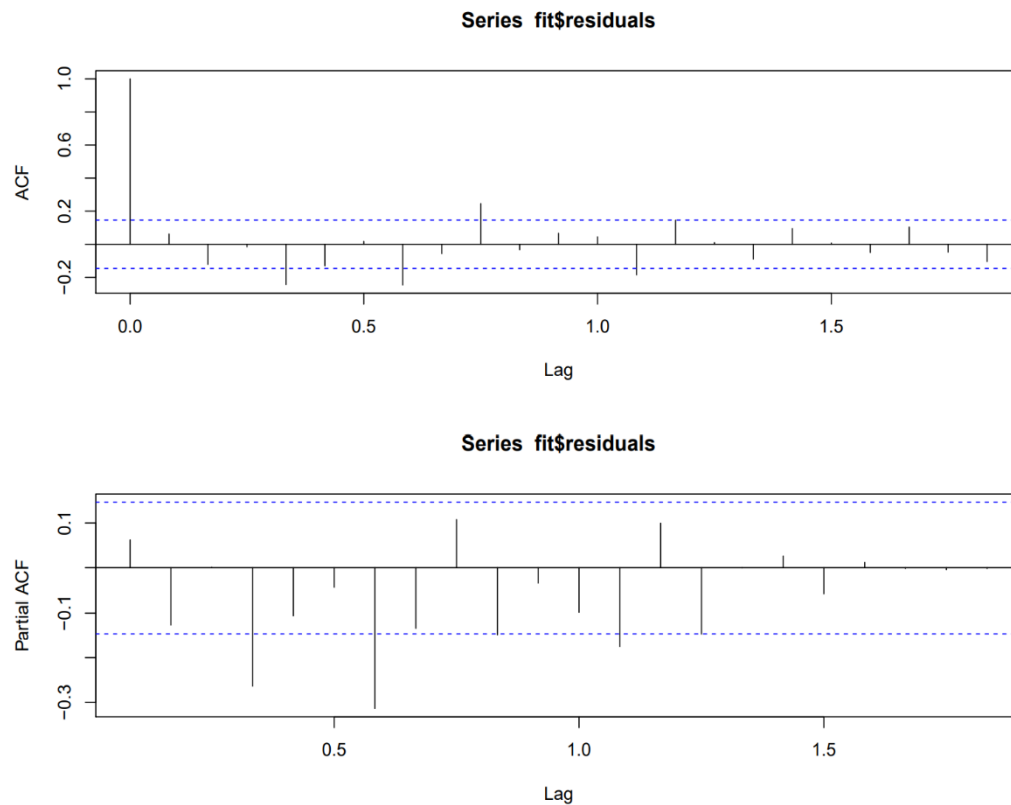


Figura 10.14: Fac e facp dos resíduos do modelo (10.36).

Quadro 10.9: Ajustamento do modelo (10.40) à série Índices–IPI (SE entre parênteses).								
ar1	ar2	ar3	ar4	ar5	ar6	ar7	ma1	sma1
0	0	0	-0.2739	0	0	-0.2774	-0.5274	-0.6358
(0)	(0)	(0)	(0.0717)	(0)	(0)	(0.0725)	(0.1027)	(0.0626)
sigma2 estimated as 32.33								
log likelihood=-526.41								
AIC=1062.81								

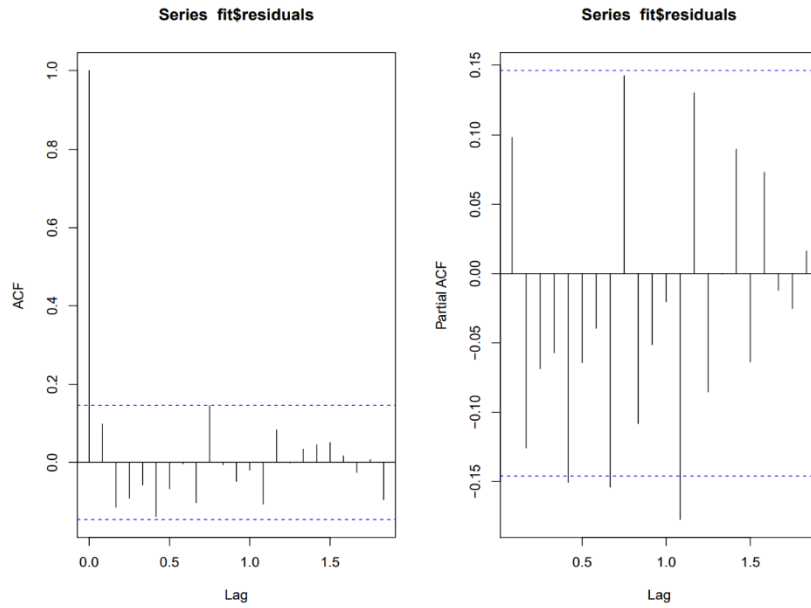


Figura 10.15: Fac e facp dos resíduos do modelo (10.40).

Quadro 10.10: Ajustamento do modelo (10.41) à série Índices-IPI (SE entre parênteses).								
ar1	ar2	ar3	ar4	ar5	ar6	ar7	ma1	sma1
0	0	0	-0.2440	-0.1752	0	-0.2969	-0.5363	-0.6545
(0)	(0)	(0)	(0.0699)	(0.0716)	(0)	(0.0705)	(0.0943)	(0.0592)
sigma2 estimated as 29.55								
log likelihood = -523.46								
aic = 1058.93								
Residuals Box-Ljung test : X-squared = 28.081, df = 19, p-value = 0.08188								

Substituindo os valores estimados dos parâmetros em (10.41), temos que um segundo modelo adequado à série Índices: IPI é dado por

$$\begin{aligned}
 & (1 + 0,2440B^4 + 0,1752B^5 + 0,2969B^7)(1 - B)(1 - B^{12})Z_t \\
 & = (1 - 0,5363B)(1 - 0,6545B^{12})a_t,
 \end{aligned} \tag{10.42}$$

com $\sigma_a^2 = 29,55$.

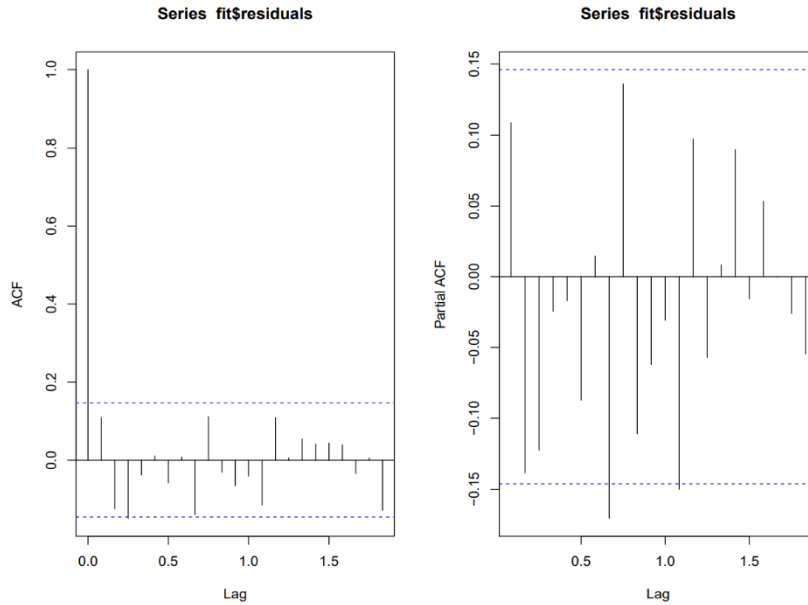


Figura 10.16: Fac e facp dos resíduos do modelo (10.42).

As previsões para os meses de janeiro a julho de 2000, com origem em dezembro de 1999 ($t = 180$), encontram-se na Tabela 10.9 e Figura 10.17.

Finalmente, com o objetivo de comparar os dois modelos ajustados para a série Índices-IPI, expressões (10.39) e (10.42), apresentamos algumas medidas de ajustamento e adequação de previsão na Tabela 10.10.

Os valores $EQMP_{180}$ foram obtidos das Tabelas 10.8 e 10.9. Os valores AIC e BIC, da expressão (6.21) e (6.24), respectivamente.

Analisando as informações da Tabela 10.10 podemos concluir que o modelo (10.39) é o que melhor se ajusta à série Índices - IPI e, também, o que faz melhores previsões para os meses de janeiro a julho de 2000 quando fixamos a origem da previsão em dezembro de 1999.

Tabela 10.9: Previsões para a série Índices-IPI, utilizando o modelo (10.42), com origem em $t = 180$ e $h = 1, 2, \dots, 7$.

$t + h$	$\hat{Z}_t(h)$	Erro padrão	Z_{t+h}
181	95,2730	5,4359	100,1300
182	106,6373	5,19918	99,9000
183	106,8644	6,5003	105,3800
184	124,0673	6,9718	101,9600
185	130,6255	7,0733	116,1900
186	141,8238	7,1372	124,6600
187	148	7,2858	131,1000
$EQMP_{180} = 197,57$			

Tabela 10.10: Medidas de qualidade de ajuste e previsão para os modelos (10.39) e (10.42).

Modelos	Ajustamento		Previsão
	$\hat{\sigma}_a^2$	AIC	$EQMP_{180}$
(10.39)	26,84	1.050,31	189,76
(10.42)	29,55	1.058,93	197,57

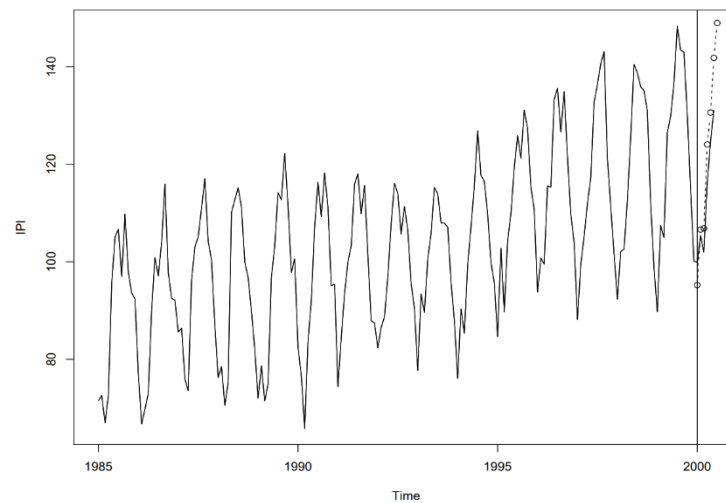


Figura 10.17: Série Índices-IPI, observações de janeiro de 1990 a julho de 2000 e previsões (linha tracejada) para os meses de janeiro a julho de 2000, utilizando o modelo (10.42), com origem em dezembro de 1999 e $h = 1, 2, \dots, 7$.