Sobre erro de truncamento no método de Euler

Aqui Ω será um subconjunto aberto convexo de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ e $f : \Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^p$. Os pontos de Ω serão denotados por (t, x), com $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^p$. As funções coordenadas de f são f_i, $1 \leq i \leq p$ e derivadas parciais de f serão representadas por f_t e f_{x_j}, $1 \leq j \leq p$.

Denota-se por f_x a diferencial de f em relação à variável espacial x, mais precisamente, se $(t_0, x_0) \in \Omega$, $f_x(t_0, x_0)$ representará a diferencial da função $x \longmapsto f(t_0, x)$ em x_0. A matriz jacobiana de $f_x(t_0, x_0)$ é $\big[(f_i)_{x_j}(t_0, x_0)\big]$.

Supõe-se que $(t_0, x_0) \in \Omega$ e que a solução não prolongável de

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

é $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^p$ com $[t_0, t_0 + T] \subset I$, para um certo $T > 0$.

Nessas condições, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, tome $h_n = \frac{T}{n}$ e, para $1 \leq j \leq n$, $t_j = t_0 + jh_n$ e $x_j = x_{j-1} + f(t_{j-1}, x_{j-1})h_n$ e lembre que o método de Euler com passo $h = h_n$ fornece no intervalo $[t_0, t_0 + T]$ a aproximação $u_n(t)$, linear por trechos, de $\varphi(t)$ definida por:

$$u_n(t) = x_j + f(t_j, x_j)(t - t_j), \text{ para } t \in [t_j, t_{j+1}], \ (0 \leq j \leq n-1). \tag{2}$$

Vai-se avaliar o erro $E^n(t) = \|\varphi(t) - u_n(t)\|$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, no caso em que f tem algumas propriedades de limitação explicitadas a seguir.

Será admitido que existem constantes $M > 0$ e $L > 0$ tais que, se $(t, x) \in \Omega$, com $t \in [t_0, t_0 + T]$,

(i) $\|f_t(t, x) + f_x(t, x)f(t, x)\| \leq M$;

(ii) $\|f_x(t, x)u\| \leq L\|u\|$, $\forall u \in \mathbb{R}^p$.

Primeiro será obtida uma estimativa para $E^n(t)$ em $[t_0, t_1]$ (erro local) e depois analisa-se $E^n(t)$ em todo o intervalo $[t_0, t_0 + T]$ (erro global). Vai-se usar E^n_j para representar $E^n(t_j)$.

1 Erro local

A ferramenta básica para avaliar $E^n(t)$ em $[t_0, t_1]$ é o teorema de Taylor, que supõe-se conhecido:

Fato 1 *Suponha que* $\gamma : [a,b] \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}^p$ *e que* $\|\ddot{\gamma}(t)\| \leq K$*, para todo* $t \in [a,b]$*, então, se* $0 \leq \tau \leq b - a$*, tem-se* $\|\gamma(a+\tau) - (\gamma(a) + \dot{\gamma}(a)\tau)\| \leq \frac{K}{2}\tau^2$.

Com esse resultado obtém-se de pronto uma estimativa para $E^n(t)$ em $[t_0, t_1]$.

Fato 2 *Suponha que* $f : \Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^p$ *satisfaz* (i)*, então* $E^n(t) \leq \frac{M}{2}(t - t_0)^2$*, para todo* $t \in [t_0, t_1]$*, em particular* $E^n_1 = E^n(t_1) \leq \frac{M}{2}h_n^2$.

Demonstração: Note que, por f ser de classe $\mathcal{C}^1$ e φ ser solução de (1) então $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$, portanto φ é de classe $\mathcal{C}^2$ e, pela regra da cadeia, $\ddot{\varphi}(t) = f_t(t, \varphi(t)) + f_x(t, \varphi(t))f(t, \varphi(t))$.

Assim, por (i), tem-se $\|\ddot{\varphi}(t)\| \leq M$ e, de (2), para $t \in [t_0, t_1]$, vale $u_n(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0) = \varphi(t_0) + \dot{\varphi}(t_0)(t - t_0)$, o fato 1 implica de pronto $E^n(t) \leq \frac{M}{2}(t - t_0)^2$ o que, para $t = t_1 = t_0 + h_n$, fornece a tese. ∎

2 Erro global

Agora será obtida uma estimativa para $E^n(t)$ todo $t \in [t_0, t_0+T]$, a estratégia para isso será supor conhecido que, para um certo $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, vale $E^n(t_j) = E^n_j \leq K_j$, para algum $Kj > 0$, e a partir daí, encontrar uma estimativa para $E^n(t)$ em $[t_j, t_{j+1}]$ (Note que, pelo fato 2, tem-se $E^n_1 \leq K_1 = \frac{Mh_n^2}{2}$). Dessa forma obter-se-á um majorante para E^n_{j+1} e, se $j+1 < n$, pode-se passar ao intervalo $[t_{j+1}, t_{j+2}]$ até cobrir todo o intervalo $[t_0, t_0+T]$.

Nesta parte serão usadas as hipóteses de f satisfazer também a desigualdade (ii) e de Ω ser convexo.

O ponto essencial será usar a chamada desigualdade do valor médio para funções de várias variáveis, enunciada a seguir[1].

Fato 3 *Sejam* Δ *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^m$ *que contém os pontos* a *e* b*, e* $g : \Delta \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^q$*. Suponha que o segmento* $\overline{ab}$ *está contido em* Δ *e que existe* $K > 0$ *tal que* $\|g_x u\| \leq K\|u\|$*, para todo* x *no segmento* $\overline{ab}$ *e todo* $u \in \mathbb{R}^m$*. Então* $\|g(b) - g(a)\| \leq K\|b - a\|$.

Com isso, vai-se obter o resultado central desta seção.

Fato 4 *Suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ *é um aberto convexo e que* $f : \Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^q$ *satisfaz* (i) *e* (ii)*. Considere* $n \geq 2$*,* φ *e* u_n *definidas acima, e admita que,*

[1] Uma demonstração deste resultado pode ser vista, por exemplo, no livro *The elements of real analysis*, segunda edição, de R.G.Bartle.

para um certo $j \in \{1, \ldots, n-1\}$*, tem-se* $E_j^n \leq K_j$*, para algum* $K_j > 0$*. Então, para* $t \in [t_j, t_{j+1}]$ *vale* $E^n(t) \leq \frac{M}{2}(t-t_j)^2 + (1 + L(t-t_j))E_j^n$*, em particular* $E_{j+1}^n \leq \frac{M}{2}h_n^2 + (1 + Lh_n)K_j$*.*

Demonstração: Lembre que pela definição de u (veja (2)), se $t \in [t_j, t_{j+1}]$, tem–se $u^n(t) = x_j + f(t_j, x_j)(t - t_j)$, assim o que deseja é encontrar um majorante de $E^n(t) = \|\varphi(t) - (x_j + f(t_j, x_j)(t - t_j))\|$.

O polinômio de Taylor de ordem 1 de φ em t_j é $p(\tau) = \varphi(t_j) + \dot{\varphi}(t_j)\tau = \varphi(t_j) + f(t_j, \varphi(t_j))\tau$, assim para $t \in [t_j, t_{j+1}]$,

$$\begin{aligned} E^n(t) &= \|\varphi(t) - (x_j + f(t_j, x_j)(t - t_j))\| \leq \\ &\leq \|\varphi(t) - p(t - t_j)\| + \|p(t - t_j) - (x_j + f(t_j, x_j)(t - t_j))\|. \end{aligned} \tag{3}$$

Para majorar a primeira parcela de (3) use o fato 1 e a desigualdade (i) para obter, como na demonstração do fato 2,

$$\|\varphi(t) - p(t - t_j)\| \leq \frac{M}{2}(t - t_j)^2. \tag{4}$$

Agora lembre que f satisfaz (ii) e aplique a desigualdade do valor médio (o fato 3) à função $x \longmapsto f(t_j, x)$ para obter

$$\|f(t_j, \varphi(t_j)) - f(t_j, x_j))(t - t_j)\| \leq L\|\varphi(t_j) - x_j\|(t - t_j). \tag{5}$$

Como $\|\varphi(t_j) - x_j\| = E_j^n$, resulta de (5),

$$\begin{aligned} &\|p(t - t_j) - (x_j + f(t_j, x_j)(t - t_j))\| \leq \\ &\|\varphi(t_j) - x_j\| + L\|\varphi(t_j) - x_j\|(t - t_j) = (1 + L(t - t_j))E_j^n. \end{aligned} \tag{6}$$

A estimativa $E^n(t) \leq \frac{M}{2}(t - t_j)^2 + (1 + L(t - t_j))E_j^n$ resulta agora ao usar (4) e (6) em (3).

Como $t_{j+1} = t_j + h_n$ tem-se $E_{j+1}^n \leq \frac{M}{2}h_n^2 + (1 + Lh_n)K_j$. ∎

A demonstração do próximo resultado é feita por indução em j e é deixada a cargo do leitor como exercício.

Corolário 1 *Para* $1 \leq j \leq n$ *vale que*

$$E_j^n \leq \left(\sum_{i=0}^{j-1}(1 + Lh_n)^i\right)\frac{M}{2}h_n^2. \tag{7}$$

Agora vai-se usar (7) para mostrar que $\lim_{n\to\infty} E^n(t) = 0$ uniformemente em $[t_0, t_0 + T]$. Claro que basta mostrar que $E_n^n \to 0$, pois se $t \in]t_0, t_0 + T]$, tem-que que, para algum $j \in \{1 \ldots n\}$, $t \in]t_{j-1}, t_j]$ e vem $E^n(t) \le E_j^n \le E_n^n$.

Para simplificar a notação a partir deste ponto E_n^n será denotado apenas por E_n.

Uma pequena lembrança sobre um assunto bem conhecido, progressões geométricas.

Questão 1 Mostre que, para $n \ge 1$, tem-se $\sum_{i=0}^{n-1} (1 + Lh_n)^i = \frac{(1+Lh)^n - 1}{Lh}$.

O resultado da questão 1 junto com o corolário 1 mostram que

$$E_n \le \frac{(1 + Lh_n)^n - 1}{2L} M h_n. \qquad (*)$$

Agora lembre que $h_n = \frac{T}{n}$ portanto

$$(1 + Lh_n)^n = (1 + Lh_n)^{\frac{T}{h_n}} = \exp\left(\frac{T}{h_n} \log(1 + Lh_n)\right),$$

se $n \to \infty$ tem-se $h_n \to 0$ e, como $\lim_{h\to 0} \frac{T}{h} \log(1 + Lh) = TL$ resulta que

$$\lim_{n\to\infty} (1 + Lh_n)^n = \exp(TL). \qquad (**)$$

Por fim, calcule a derivada de $\theta(h) = (1 + Lh)^{\frac{T}{h}}$ e veja que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\theta(h)$ é estritamente decrescente em $]0, \varepsilon]$, portanto para $0 < h < \varepsilon$, tem–se $\theta(h) < \lim_{h\downarrow 0} \theta(h) = \exp(TL)$.

Portanto, se n é grande o bastante para ter-se $\frac{T}{n} \le \varepsilon$ tem–se

$$E_n \le \frac{MT}{2Ln} (\exp(TL) - 1) \qquad (8)$$

que implica de imediato $\lim_{n\to\infty} E_n = 0$, e, como já se observou, isto basta para provar que $E^n(t) \to 0$ em $[t_0, t_0 + T]$ de modo uniforme, para $n \to \infty$.