MAT1351 - Cálculo para Funções de Uma Variável Real I

SEGUNDA LISTA PARA ENTREGAR

Instruções

1. Esta lista representará 15% do valor total das listas.
2. Fazer em grupos de até 4 pessoas.
3. Prazo de entrega é até 12 de maio.
4. Escrever seus nomes completos com seu número usp nos trabalhos.
5. Enviar os trabalhos por e-Disciplinas em arquivos pdf.
6. Justifique todas as suas afirmações. Bom trabalho!

Questão 1 (3.0 pts) Calcule os seguintes limites

(a) $\lim_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

(b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-3}{x-1}$

(c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

Questão 2 (3.0 pts) Seja a função

$$g(x) = \frac{x^2+x-6}{|x-2|}.$$

(a) Encontre $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ e $\lim_{x\to 2^-} g(x)$

(b) $\lim_{x\to 2} g(x)$ existe?

(c) Esboce o gráfico de g.

Questão 3 (4.0 pts) Calcule os seguintes limites

(a) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+7}$.

(b) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$.

(c) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2+4x+7} - \sqrt[3]{x^3+2x^2-30}\right)$.

Q1.

(a) $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

fazemos a seguinte mudança de variável.
Consideramos $y^6 = x$, onde m.m.c $(2,3)=6$.
Então $\begin{cases} \sqrt{x} = y^3 \\ \sqrt[3]{x} = y^2 \end{cases}$

Além disso: se $x=64 \Rightarrow y^6 = 64 \Rightarrow y=2$.
Substituindo no limite acima temos:

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \lim_{y\to 2} \frac{y^3-8}{y^2-4} = \lim_{y\to 2} \frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{(y-2)(y+2)}$$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{y^2+2y+4}{y+2} = \frac{4+4+4}{2+2} = \boxed{3}.$$

(b) Da mesma forma que a parte (a), fazemos uma mudança de variável.

$y^{12} = x$; onde m.m.c $(4,3,2) = 12$.

Assim $\begin{cases} \sqrt{x} = y^6 \\ \sqrt[3]{x} = y^4 \\ \sqrt[4]{x} = y^3 \end{cases}$

Além disso, se $x=1 \Rightarrow y^{12}=1 \Rightarrow y=1$.
Subtituindo no limite temos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-3}{x-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^3+y^4+y^6-3}{y^{12}-1}$$

$$= \lim_{y\to 1} \frac{(y^6-1)+(y^4-1)+(y^3-1)}{y^{12}-1}$$

$$= \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)(y^5+y^4+y^3+y^2+y+1)+(y-1)(y^3+y^2+y+1)+(y-1)(y^2+y+1)}{(y^6+1)(y^6-1)}$$

$$= \lim_{y\to 1} \frac{\cancel{(y-1)}(y^5+y^4+2y^3+3y^2+3y+3)}{(y^6+1)(y^3+1)\cancel{(y-1)}(y^2+y+1)}$$

$$= \frac{1+1+2+3+3+3}{(1+1)(1+1)(1+1+1)} = \boxed{\frac{13}{12}}.$$

(c) $P(x) = x^{100}-2x+1$; $Q(x) = x^{50}-2x+1$

fatoramos $(x-1)$ em P e Q temos

$$P(x) = (x-1)(x^{99}+x^{98}+ \dots + x^2+x-1)$$

$$Q(x) = (x-1)(x^{49}+x^{48}+ \dots + x^2+x-1)$$

Assim

$$\lim_{x\to 1}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{99}+\dots+x-1)}{(x-1)(x^{49}+\dots+x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^{99}+\dots+x-1}{x^{49}+\dots+x-1}$$

$$= \frac{\overbrace{1+1+\dots+1}^{99\text{ vezes}}-1}{\underbrace{1+1+\dots+1}_{49\text{ vezes}}-1} = \frac{98}{48} = \boxed{\frac{49}{24}}$$

Q2. $g(x) = \dfrac{x^2+x-6}{|x-2|}$

(a) * . $$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+x-6}{|x-2|}$$

$$= \lim_{x\to 2^+}\frac{(x+3)(x-2)}{|x-2|}$$

$$= \lim_{x\to 2^+}\frac{(x+3)(x-2)}{x-2} \qquad \left(\text{pois se } x\to 2^+ \Rightarrow x-2>0\right)$$

$$= \lim_{x\to 2^+}(x+3) = \boxed{5.}$$

* Se $x\to 2^-$ então $x-2<0$, nosso limite é:

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+3)(x-2)}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+3)(x-2)}{-(x-2)}$$

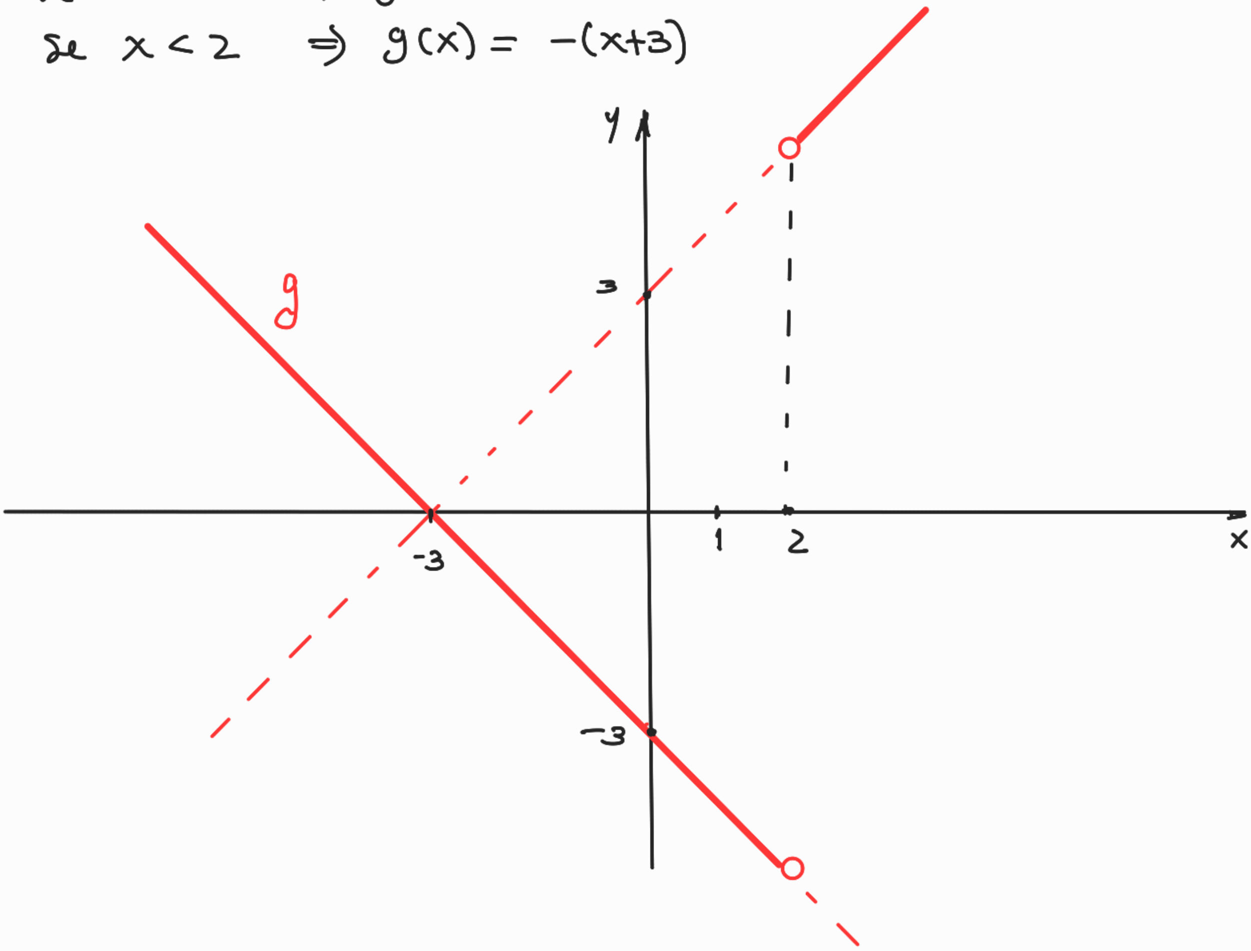
$$= \lim_{x\to 2^-} -(x+3) = \boxed{-5}.$$

(b) Como os limites laterais de g não são iguais quando $x\to 2$, então não existe $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

(c) $Dom(g) = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

Se $x>2 \Rightarrow g(x) = (x+3)$

Se $x<2 \Rightarrow g(x) = -(x+3)$



Q3.

(a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+7}$

No cálculo do limite quando $x\to-\infty$ devemos lembrar que para $x<0$ temos $\sqrt{x^2} = |x| = -x \Rightarrow x = -\sqrt{x^2}$, logo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}}{\frac{x+7}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+4}}{-\sqrt{x^2}}}{1+\frac{7}{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2}}}{1+\frac{7}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{7}{x}} = \frac{-\sqrt{1}}{1} = \boxed{-1}.$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-5x+6-x^2}{\sqrt{x^2-5x+6}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x+6}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-5+\frac{6}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1\right)} = \frac{-5+0}{\sqrt{1-0+0}+1} = \boxed{\frac{-5}{2}}.$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2+4x+7} - \sqrt[3]{x^3+2x^2-30}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\underbrace{\frac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2+4x+7} - x} + \underbrace{x - \sqrt[3]{x^3+2x^2-30}}\right)$$

suma de límites

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2+5}{x^2+4x+7} - \left(\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+2x^2-30} - \underset{\sqrt[3]{x^3}}{x}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{(x^3+2x^2-30)^2} + \sqrt[3]{(x^3+2x^2-30)x^3} + \sqrt[3]{(x^3)^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{(x^3+2x^2-30)^2} + \sqrt[3]{(x^3+2x^2-30)x^3} + \sqrt[3]{(x^3)^2}\right)}\right)$$

Usamos:
$$a-b = \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right).$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(-1+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}\right)} - \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3}+2x^2-30-\cancel{x^3}}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+2x^2-30}+\sqrt[3]{(x^3+2x^2-30)^2}}\right)$$

$$= \frac{-1+0}{1+0+0} - \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{30}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}-\frac{30}{x^3}}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x}-\frac{30}{x^3}\right)^2}\right)}\right)$$

$$= -1 - \left(\frac{2-0}{1 + \sqrt[3]{1+0-0} + \sqrt[3]{(1+0-0)^2}} \right)$$

$$= -1 - \frac{2}{3} = \boxed{-\frac{5}{3}}$$