UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Cálculo para Funções de uma Variavel Real I

3 de maio de 2023

Lista de Exercícios N° 2

Cálculos Usando Propriedades dos Limites

1. Calcule o limite justificando cada passagem com as Propriedades dos Limites que forem usadas.

a) $\lim_{x\to 4}(5x^2 - 2x + 3)$

b) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x-2}{x^2+4x-3}$

c) $\lim_{x\to 8}(1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

d) $\lim_{x\to -1}(t^2+1)^3(t+3)^5$

e) $\lim_{t\to 1}\left(\dfrac{1+3t}{1+4t^2+3t^4}\right)^3$

f) $\lim_{u\to -2}\sqrt{u^4+3u+6}$

2. Calcule o limite, se existir.

a) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(4+h)^2-16}{h}$

b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

c) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^3+8}$

d) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h}$

e) $\lim_{x\to 9}\dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

f) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

g) $\lim_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

h) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

i) $\lim_{x\to -4}\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}$

j) $\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2+t}\right)$

k) $\lim_{x\to 9}\dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$

l) $\lim_{h\to 0}\left(\dfrac{1}{h\sqrt{1+h}}-\dfrac{1}{h}\right)$

3. Use o Teorema do Confronto para mostrar que:

a) $\lim_{x\to 0}(x^2\cos 20\pi x) = 0$ (ilustre, fazendo os gráficos, na mesma tela, das funções $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2\cos 20\pi x$ e $h(x) = x^2$).

b) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3+x^2}\sin\dfrac{\pi}{x} = 0$ (ilustre, fazendo os gráficos na mesma tela, de f, g e h).

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Cálculo para Funções de uma Variavel Real I

3 de maio de 2023

Lista de Exercícios N° 2

---

4. Resolva

   a) Se $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para todo $x \geq 0$, encontre $\lim_{x \to 4} f(x)$.

   b) Se $2x \leq g(x) \leq x^4 - x^2 + 2$ para todo x, encontre $\lim_{x \to 1} g(x)$.

5. Demonstrar

   a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} x^4 \cos \frac{2}{x} = 0$

   b) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} e^{\sin \frac{\pi}{x}} = 0$

6. Encontre, quando existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

   a) $\displaystyle \lim_{x \to 3} (2x + |x - 3|)$

   b) $\displaystyle \lim_{x \to -6} \frac{2x + 12}{|x + 6|}$

   c) $\displaystyle \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|}$

   d) $\displaystyle \lim_{x \to -2} \frac{2 - |x|}{2 + x}$

   e) $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

   f) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

7. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & se \quad x \leq 2 \\ \\ x + 1 & se \quad x > 2 \end{cases}$$

   a) Encontre $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x)$.

   b) Existe $\lim_{x \to 2} f(x)$?

   c) Esboce o gráfico de f.

8. Encontre, quando existir o limite

   a) $\displaystyle \lim_{x \to 1} f(x)$, onde $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & se \quad x \leq 1 \\ \\ x + 1 & se \quad x > 1 \end{cases}$

   b) $\displaystyle \lim_{x \to 2} f(x)$, onde $f(x) = \begin{cases} x^2 & se \quad x \leq 2 \\ \\ 8 - 2x & se \quad x > 2 \end{cases}$

   c) $\displaystyle \lim_{x \to 0} x \sqrt{\frac{1}{4x^2} - 16}$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Cálculo para Funções de uma Variavel Real I

3 de maio de 2023

Lista de Exercícios N° 2

9. Calcular os seguintes limites

   a) $\lim_{x \to a} \dfrac{x^2 - (a-1)x + a}{x^3 + a^3}$

   b) Encontrar os valores de m tal que $\lim_{x \to m} \dfrac{x^2 - mx + 3x - 3m}{x - m} = m^2 - 27$.

   c) Encontrar o valor de a, com $a > 0$, tal que $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2a^2x + ax^2}{2ax + x^2} = 2a - 5$.

   d) Se $f(x) = x - 2$ e $g(x) = x^2 - x$, calcular $\lim_{x \to 2} \dfrac{(f \circ g)(x+1)}{(g \circ f)(x+2)}$.

   e) Se $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{1 - x^3} = 4$ e $\lim_{x \to 1} \dfrac{g(x)}{1 - x^2} = -6$, calcular $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Definição Precisa de Limite

1. a) Encontre um número δ tal que se $|x - 2| < \delta$, então $|4x - 8| < \varepsilon$, onde $\varepsilon = 0,1$.

   b) Repita a parte a) com $\varepsilon = 0,01$.

2. Dado que $\lim_{x \to 2}(5x - 7) = 3$, ilustre a Definição de Limite encontrando valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 0,1$ e $\varepsilon = 0,05$.

3. Demonstre cada afirmação usando a definição ε, δ de limite e ilustre com um diagrama:

   a) $\lim_{x \to 1}(2x + 3) = 5$

   b) $\lim_{x \to -2} \left(\dfrac{1}{2}x + 3\right) = 2$

   c) $\lim_{x \to -3}(1 - 4x) = 13$

   d) $\lim_{x \to 4}(7 - 3x) = -5$

4. Demonstre cada afirmação usando a definição ε, δ de limite

   a) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x}{5} = \dfrac{3}{5}$

   b) $\lim_{x \to 6} \left(\dfrac{x}{4} + 3\right) = \dfrac{9}{2}$

   c) $\lim_{x \to -5} \left(4 - \dfrac{3x}{5}\right) = 7$

   d) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3} = 7$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Cálculo para Funções de uma Variavel Real I

3 de maio de 2023

Lista de Exercícios N° 2

e) $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

f) $\lim_{x \to -6} \sqrt[4]{6+x} = 0$

g) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4x + 5) = 1$

h) $\lim_{x \to 3} (x^2 + x - 4) = 8$

Limites no Infinito

1. Calcular os seguintes limites

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + 3x + 5}{3x^2 - 2x + 1}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x+2}}}}{\sqrt{x+2}}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 9} \right)$

e) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x + 3}$

f) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x \right)$

g) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 7x + 5}{x^3 + 2x + 1}$

h) $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 + 2} - \dfrac{x^2}{x + 2} \right)$

i) $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2 - 1} - \dfrac{x^2}{2x + 1} \right)$