Produto de Kronecker e Aplicações em Estatística

Enrico Weinstock (10349853)
Manuela Bonetto (6493700)
Julianne Lobato (10376367)
Samir Haidar (10298590)

Abril 2022

1 Objetivos

Neste trabalho vamos explorar o produto de Kronecker de matrizes suas propriedades, resultados úteis e por fim algumas das suas aplicações em estatística, como mostrar algumas identidades no calculo da densidade da distribuição normal para matrizes.

2 Definição e propriedades

Definição

Seja A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $p \times q$, definimos o **produto de Kronecker** de A e B como uma matriz $pm \times qn$ dada por:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B \dots a_{1n}B \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1}B \dots a_{mn}B \end{bmatrix}$$

mais explicitamente:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{bmatrix} & \dots a_{1n} & \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{bmatrix} & \dots a_{mn} & \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

ou ainda:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} \dots a_{11}b_{1q} \dots\dots a_{1n}b_{11} \dots a_{1n}b_{1q} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \ddots\ddots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{11}b_{p1} \dots a_{11}b_{pq} \dots\dots a_{1n}b_{p1} \dots a_{1n}b_{pq} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \ddots\ddots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \ddots\ddots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1}b_{11} \dots a_{m1}b_{1q} \dots\dots a_{mn}b_{11} \dots a_{mn}b_{1q} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \ddots\ddots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1}b_{p1} \dots a_{m1}b_{pq} \dots\dots a_{mn}b_{p1} \dots a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}$$

Exemplo

Seja A $= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e B $= \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, então $A \otimes B =$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 2\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ 3\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 4\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 0 & 1\times 5 & 2\times 0 & 2\times 5 \\ 1\times 6 & 1\times 7 & 2\times 6 & 2\times 7 \\ 3\times 0 & 3\times 5 & 4\times 0 & 4\times 5 \\ 3\times 6 & 3\times 7 & 4\times 6 & 4\times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 28 \end{bmatrix}.$$

Propriedades

Podemos citar algumas propriedades interessantes do produto de Kronecker. Vale ressaltar que as seguintes propriedas, exceto caso especificado diferente, valem para quaisquer matrizes, independente de suas dimensões.

1. **Bilinearidade e associatividade**: Sejam k um escalar, A, B e C matrizes e 0 a matriz nula, valem:

   (a) $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$
   (b) $(B + C) \otimes A = B \otimes A + C \otimes A$
   (c) $(kA) \otimes B = A \otimes (kB) = k (A \otimes B)$
   (d) $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$
   (e) $A \otimes 0 = 0 \otimes A = 0$

2. **Nao-comutatividade**. Em geral, $A \otimes B \neq B \otimes A$. Por exemplo, para A e B como no exemplo anterior:

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 0\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ 6\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & 7\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \times 1 & 0 \times 2 & 5 \times 1 & 5 \times 2 \\ 0 \times 3 & 0 \times 4 & 5 \times 3 & 5 \times 4 \\ 6 \times 1 & 6 \times 2 & 7 \times 1 & 7 \times 2 \\ 6 \times 3 & 6 \times 4 & 7 \times 3 & 7 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 15 & 20 \\ 6 & 12 & 7 & 14 \\ 18 & 24 & 21 & 28 \end{bmatrix}.$$

3. **Propriedade do Traço e Determinante** Para matrizes quadradas de dimensão $m \times m$ e $n \times n$, temos que valem as seguintes identidades: traço$(A \otimes B)$ = traço(A) $\times$ traço(B) e que $\det(A \otimes B) = (detA)^m \times (detB)^n$

4. **Distributividade do Posto** posto$(A \otimes B)$ = posto(A) $\times$ posto(B)

5. **Relação com o produto usual** Sejam as matrizes A, B, C e D de dimensões m×h, p×k, h×n e k×l respectivamente.
   Então vale que $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$

   Disso não custa ver que para A e B matrizes idempotentes, vale que $A \otimes B$ também é idempotente.

6. **Preservação da Ortogonalidade** Para A e B matrizes ortogonais, diretamente da propriedade anterior vale que $A \otimes B$ é matriz ortogonal.

7. **Distributividade da Transposição(em relação ao produtos de Kronecker)** Para A e B matrizes,

$$(A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t$$

   Disso não custa perceber que a simetria de matrizes também é preservada apś o produto de Kronecker.

8. **Distributividade da Inversão de matrizes(em relação ao produtos de Kronecker)** Sejam A e B matrizes quadradas inversíveis. Então:

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

   (Vale o resultado mais abrangente análogo para inversas generalizadas)

9. **Combinação de Autovalores** Sejam $\lambda_1, \ldots\ ,\lambda_m$ os autovalores de uma matriz quadrada A de ordem m, e sejam $\theta_1, \ldots\ ,\theta_p$ os autovalores de uma matriz quadrada B de ordem p, então o conjunto dos mp autovalores da matriz $A \otimes B$ é dado por $\{\lambda_i \theta_j \mid i = 1, ..., m; j = 1, ..., p\}$.

3 Densidade da distribuição normal matricial

Seja uma matriz aleatória

$$X_{n \times p}$$

tal que

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{MN}_{n,p}(\mathbf{M}, \mathbf{U}, \mathbf{V})$$

, ou seja, uma Matriz de Distribuição Normal. Sua função densidade probabilidade segue a seguinte forma

$$p(\mathbf{X} \mid \mathbf{M}, \mathbf{U}, \mathbf{V}) = \frac{\exp -\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{M})^T \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{M})]}{(2\pi)^{np/2}|\mathbf{V}|^{n/2}|\mathbf{U}|^{p/2}}$$

sendo $\mathbf{M}$ matriz de dimensão $n \times p$, $\mathbf{U}$ matriz de dimensão $n \times n$ e $\mathbf{V}$ matriz de dimensão $p \times p$.

A Matriz de Distribuição Normal se relaciona à distribuição normal multivariada da seguinte maneira:

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{MN}_{n\times p}(\mathbf{M}, \mathbf{U}, \mathbf{V})$$

, $\iff$

$$\mathrm{vec}(\mathbf{X}) \sim \mathcal{N}_{np}(\mathrm{vec}(\mathbf{M}), \mathbf{V} \otimes \mathbf{U})$$

4 Exemplo do Produto de Kronecker

$$\underset{\sim}{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

Y_1: peso, Y_2: altura

$$Var(\underset{\sim}{Y}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \Sigma$$

$\underset{\sim}{Y_1}, \underset{\sim}{Y_2}, \underset{\sim}{Y_3}$ a.a de $\underset{\sim}{Y}$

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{Y_1} \\ \underset{\sim}{Y_2} \\ \underset{\sim}{Y_3} \end{bmatrix}$$

$$Var(\underset{\sim}{Z}) = \begin{bmatrix} Var(\underset{\sim}{Y_1}) & Cov(\underset{\sim}{Y_1}, \underset{\sim}{Y_2}) & Cov(\underset{\sim}{Y_1}, \underset{\sim}{Y_3}) \\ Cov(\underset{\sim}{Y_2}, \underset{\sim}{Y_1}) & Var(\underset{\sim}{Y_2}) & Cov(\underset{\sim}{Y_2}, \underset{\sim}{Y_3}) \\ Cov(\underset{\sim}{Y_3}, \underset{\sim}{Y_1}) & Cov(\underset{\sim}{Y_3}, \underset{\sim}{Y_2}) & Var(\underset{\sim}{Y_3}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma \end{bmatrix} = I_3 \otimes \Sigma$$

5 Referências

C. R. Rao, Linear Statistical Inference and its Applications, John Wiley, 1973.

D. M. M. Salvador, Modelação de Matrizes Estocásticas Simétricas, Universidade Nova de Lisboa, 2013.

S. J. Holt, Applied Multivariate Analysis, Academic Press, 1972.

C M. Hafner, Estimation of a Multiplicative Covariance Structure in the Large Dimensional Case, University of Cambridge, 2016.