



Instituto de Matemática e Estatística da USP

Disciplina MAE 0314 – Análise Estatística

Docente: Professora Silvia Nagib Elian

Seminário: Matrizes Inversas Generalizadas

Alunos:

Antonio Escamilla Garcia – NUSP: 339529

Arthur Henrique dos Santos – NUSP: 11809854

Hudson Novack – NUSP: 8071297

Leonardo Galante Barco – NUSP: 9793669

Rodrigo Chan Seng Chon – NUSP: 9298889

Matrizes Inversas Generalizadas

Note Title

21/04/2022

INTRODUÇÃO

Conceito clássico sobre inversa de uma matriz:

“Se uma matriz A tem inversa A^{-1} , essa matriz necessariamente é quadrada e deve ter determinante diferente de zero (**não-singular**: determinante não-nulo), ou ainda, ter **posto completo** (linhas e colunas linearmente independentes)”.

Algumas propriedades interessantes sobre A :

- i) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, sendo I uma matriz identidade de mesma dimensão ou ordem
- ii) A^{-1} é única, com determinante igual ao recíproco do determinante de A
- iii) $(A^{-1})^{-1} = A$
- iv) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$
- v) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

. Problemas estatísticos podem envolver a solução de sistemas de equações lineares do tipo $Ax = b$ (ou $y = X\beta$).

. Se A é de ordem $n \times n$, não singular, então, a solução do sistema existe (sistema consistente) e é única (sistema determinado), sendo dada por:

$$A \cdot x = b \Rightarrow x = A^{-1} \cdot b \text{ ou}$$

$$X \cdot \beta = y \Rightarrow \beta = X^{-1} \cdot y).$$

. Há casos em que A não é quadrada, ou mesmo sendo A quadrada, pode ocorrer de ser **singular** (matriz com determinante igual a zero ou, ainda, de posto incompleto).

. Uma teoria unificadora é conveniente para tratar todas as situações: **inversas generalizadas de matrizes** (Graybill, 1983).

. Inversas generalizadas de uso mais freqüente na solução de problemas estatísticos:

- i) inversa generalizada **condicional**, pela sua abrangência e simplicidade;
- ii) inversa generalizada de **Moore-Penrose**, por suas fortes propriedades algébricas;
- iii) inversa generalizada de **quadrados mínimos**, por sua ampla aplicação em estatística experimental;

1) **Inversa condicional de uma matriz A** , de ordem $m \times n$, é uma matriz denotada por A^- , de ordem $n \times m$, que satisfaz à condição:

$$A \cdot A^- \cdot A = A$$

A^- é “uma” inversa-g de A e não “a” inversa-g de A , pois podem existir muitas matrizes que satisfazem tal condição. A exceção ocorre quando A é não-singular; situação em que $A^- = A^{-1}$, sendo, portanto, única.

Algoritmo de Searle para obtenção de Matriz Inversa Generalizada Condicional (1971)

Tomemos, como exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Escalonemos A :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1}]{L_2 = L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

Exemplos de Inversas Generalizadas para A :

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Tomamos a submatriz quadrada de ordem igual a $r(A) = 2$
não singular

(2) Encontraremos a inversa dessa submatriz:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) Encontraremos a transposta de A^* :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{**}.$$

(4) Substituímos a transposta da inversa da submatriz escolhida nas posições antes ocupadas em A e preenchemos o restante das posições com zeros.

$$A^{***} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(5) Encontramos a transposta de A^{***} :

$$(A^{***})^t = A^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Testando: $AA^{-}A = A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}_A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{A^{-}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}_A \quad \text{teste OK}$$

Outro exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \right]^t = \begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} = A^{**}$$

$$A^{***} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^{***})^t = A^{-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -3/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$AA^{-}A = A$ (teste OK)

Outro exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \right]^t = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = A^{**}$$

$$(A^{**}) = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^{**})^t = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A^- \quad AA^-A = A \text{ (teste ok)}$$

INVERSA GENERALIZADA DE MOORE-PENROSE

. Trata-se de uma matriz com as propriedades de uma matriz inversa, para uma matriz A de ordem $m \times n$, de posto ou 'rank' $r[A] = r$, com $r \leq \min \{m, n\}$ (E. H. Moore - 1920 e R. Penrose - 1956).

. A matriz A^+ satisfaz às seguintes condições:

i) $A \cdot A^+ \cdot A = A$ (note que $A \cdot A^+$ e $A^+ \cdot A$ têm papel de matriz identidade I)

ii) $A^+ \cdot A \cdot A^+ = A^+$

iii) $A \cdot A^+ = (A \cdot A^+)^T$ ($A \cdot A^+$ é simétrica)

iv) $A^+ \cdot A = (A^+ \cdot A)^T$ ($A^+ \cdot A$ é simétrica)

. É possível mostrar que qualquer matriz, inclusive vetor, possui sempre uma única inversa generalizada de Moore-Penrose. Logo, A^+ sempre existe e é única para uma dada matriz A , o que caracteriza suas propriedades de **existência e unicidade**.

Cálculo da Matriz generalizada de Moore-Penrose (há vários algoritmos)

Seja A uma matriz $m \times n$ e $r(A) = r$

Caso 1: $r = m$

$$A^+ = A^t \cdot (A \cdot A^t)^{-1}$$

Caso 2: $r = n$

$$A^+ = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t$$

Caso 3: $r < m$; $r < n$ (4 passos)

(1) Obter: $B = A^t \cdot A$

(2) Fazer: $C_1 = I_n$

(3) Calcular: $C_{i+1} = [\text{traço}(C_i \cdot B) / i] \times I_n - C_i \cdot B$, para $i = 1, 2, \dots, r-1$

(4) $A^+ = [r / \text{traço}(C_r \cdot B)] \times C_r \cdot A^t$

Exemplos

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$ $r(A) = 2 = m \rightarrow$ linha-completo (CASO 1) $\Rightarrow A^- = A^t (A A^t)^{-1}$

$$\Rightarrow A^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^t \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^t \right)^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \\ -4 & 4 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

—//—

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ $\Rightarrow r(A) = 2 = n \rightarrow$ coluna-completo (CASO 2) $\Rightarrow A^- = (A^t A)^{-1} A^t$

$$\Rightarrow A^- = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^t = \frac{1}{59} \begin{bmatrix} 21 & 10 & -7 \\ 8 & 1 & 17 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$3) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow r(A) = 2 \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad r < m \wedge r < m \quad (\text{Caso 3})$$

$$B = A^t A = \begin{bmatrix} 14 & 5 & 23 \\ 5 & 2 & 8 \\ 23 & 8 & 38 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow C_1 B = \begin{bmatrix} 14 & 5 & 23 \\ 5 & 2 & 8 \\ 23 & 8 & 38 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{tr}(C_1 B) = 54$$

$$C_{1+1} = C_2 = \frac{54}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 & 5 & 23 \\ 5 & 2 & 8 \\ 23 & 8 & 38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & -5 & -23 \\ -5 & 52 & -8 \\ -23 & -8 & 16 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$C_2 B = C_2 B = \begin{bmatrix} 40 & -5 & -23 \\ -5 & 52 & -8 \\ -23 & -8 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 & 5 & 23 \\ 5 & 2 & 8 \\ 23 & 8 & 38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 15 & -3 \\ 6 & -3 & 15 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow \text{tr}(C_2 B) = 36$$

$$C_2 A^t = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -21 & 18 & -3 \\ 9 & -6 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow A^- = \frac{2}{36} \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -21 & 18 & -3 \\ 9 & -6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^- = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -7 & 6 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Sequência de operações para utilização da Matriz Inversa Generalizada de Moore-Penrose para resolução de equações matriciais

1. A é matriz de ordem $m \times n$, com $A \cdot x = y$;
2. Encontrar o posto de $A := r(A) = r$;
3. Calcular A^+ (matriz inversa generalizada de A) pelo algoritmo de Moore-Penrose;
4. Testar se o sistema é consistente (Sistema Possível:= tem solução):

Se $A \cdot A^+ \cdot y = y \Rightarrow$ Sistema consistente (SPD ou SPI);

Se $A \cdot A^+ \cdot y \neq y \Rightarrow$ Sistema inconsistente (SI);

5. Testar **Unicidade**, se o sistema for consistente (possível):

5.1 Se $A^+ \cdot A = I_n \Rightarrow$ Sistema tem solução única (SPD);

5.2 Se $A^+ \cdot A \neq I_n \Rightarrow$ Sistema tem infinitas soluções (SPI).

6. Calcular as soluções:

6.1 Solução única: $x = A^+ \cdot y$;

6.2 Infinitas soluções:

$$x = A^+ \cdot y + (I_n - A^+ \cdot A) \cdot h$$

$$\Rightarrow x = A^+ \cdot y + (I_n - A^+ \cdot A) \cdot (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$$

Exemplo 1: $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 10x_2 + 5x_3 = 11 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2990} \begin{bmatrix} 435 & 330 & 15 \\ -245 & -124 & 239 \\ 160 & 142 & 88 \end{bmatrix} \text{ e } y = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$

$Ax = y$

$\Rightarrow AA^{-1}y = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2990} \begin{bmatrix} 435 & 330 & 15 \\ -245 & -124 & 239 \\ 160 & 142 & 88 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} = y \Rightarrow \text{Sistema consistente}$

$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{2990} \begin{bmatrix} 435 & 330 & 15 \\ -245 & -124 & 239 \\ 160 & 142 & 88 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{115} \begin{bmatrix} 90 & -15 & 45 \\ -15 & 106 & 27 \\ 45 & 27 & 34 \end{bmatrix} \neq I_3 \Rightarrow \text{Infinitas soluções (SPI)}$

$\Rightarrow x = A^{-1}y + (I_3 - A^{-1}A) \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{115} \begin{bmatrix} 120 + 25\lambda_1 + 15\lambda_2 - 45\lambda_3 \\ 49 + 15\lambda_1 + 9\lambda_2 - 27\lambda_3 \\ 83 - 45\lambda_1 - 27\lambda_2 + 81\lambda_3 \end{bmatrix}$

Exemplo 2: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_3 = 12 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 & 2 \\ 14 & -13 & 3 & 1 \\ 8 & -1 & -9 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } y = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$

$Ax = y$

$$AA^{-}y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{30} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 & 2 \\ 14 & -13 & 3 & 1 \\ 8 & -1 & -9 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} = y \Rightarrow \text{Sistema consistente}$$

$$A^{-}A = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 & 2 \\ 14 & -13 & 3 & 1 \\ 8 & -1 & -9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 \Rightarrow \text{Solução Única (SPD)}$$

$$x = A^{-}y = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 & 2 \\ 14 & -13 & 3 & 1 \\ 8 & -1 & -9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \therefore x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^- = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$Ax = y$

$\Rightarrow AA^- y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 17 \end{bmatrix} \neq y$

Sistema
inconsistente
(SI)

Propriedades das Matrizes Inversas Generalizadas

- (1) Toda matriz A tem uma inversa generalizada única A^-
- (2) Se A é de ordem $m \times n$, então A^- é de ordem $n \times m$
- (3) Se A é a matriz nula $m \times n$, então A^- é a matriz nula $n \times m$
- (4) A matriz inversa generalizada da transposta de A é a transposta da matriz inversa generalizada de A :
$$(A^t)^- = (A^-)^t$$
- (5) A matriz inversa generalizada da matriz inversa generalizada de A é igual à matriz A :
$$(A^-)^- = A$$

(6) $r(A) = r(A^-)$, $r :=$ posto da matriz A

(7) Se $r(A) = r$, então as seguintes matrizes também têm posto " r ":

$$r(A) = r(A^-) = r(A^-A) = r(AA^-A) = r(A^-AA^-)$$

(8) Para qualquer matriz A : $(A^t A)^- = A^- (A^t)^-$

(9) Se A é uma matriz simétrica, então A^- será uma matriz simétrica

(10) Se A é não-singular, então: $A^{-1} = A^-$

(11) Se A é simétrica e idempotente, então: $A^- = A$
Se $A = A^t \wedge A^2 = A$, então $A^- = A$

(12) As matrizes AA^+ , A^+A , $I-AA^+$, $I-A^+A$ são simétricas e idempotentes

(13) Se " a " é um vetor-coluna não-nulo, então:

$$a^- = (a^t a)^{-1} a^t$$

Inversa de Quadrados Mínimos (A')

Seja A uma matriz $m \times n$, a inversa de Quadrados Mínimos satisfaz duas condições:

- (i) $A A' A = A$
- (ii) $A A' = (A A')^t$ (forma simétrica)

* Note que toda inversa de Quadrados Mínimos é também uma inversa condicional.

Uma matriz (A') pode ser obtida a partir de uma matriz inversa condicional (A^-) por meio da expressão:

$$A' = (A^* A)^- \cdot A^*$$

Observação: A inversa de Moore - Penrose (A^+) é também inversa generalizada de Quadrados mínimos (A')

Exemplo: Encontre a Inversa Generalizada
pelo método dos Quadrados Mínimos
Usando a mesma matriz do Algoritmo de Searle

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 14 & 5 & 23 \\ 5 & 2 & 8 \\ 23 & 8 & 38 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

Usando $B = \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, vamos calcular $(A^t \cdot A)^{-}$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -5/3 \\ -5/3 & 14/3 \end{bmatrix} = (B^{-1})^t$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 2/3 & -5/3 & 0 \\ -5/3 & 14/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (A^*)^t$$

$$(A^t \cdot A)^{-} \cdot A^t = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -5/3 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

teste $A \cdot A^* \cdot A \approx 0$ OK

Referências:

1. Marvin H. J. Gruber - Matrix Algebra for Linear Models, Wiley Editors, 2014, pgs 30-44.
2. Franklin A. Graybill - Matrices with Applications in Statistics, 2nd. Edition, Wadsworth Publishing, 1983, pgs 105-114.
3. S. R. Searle - Linear Models, Wiley Editors, 1997, pgs. 1-28.
4. Adi Ben-Israel, Thomas N. E. Greville - Generalized Inverses Theory an Applications, 2nd Edition, Springer, 2003, pgs 1-5.
5. João Batista Duarte - Introdução às Inversas Generalizadas de Matrizes de aplicação comum em Estatística.

[https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/396/o/G-invMatrix\(DuarteJB\).pdf](https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/396/o/G-invMatrix(DuarteJB).pdf)

6. Adelmo Fernandez - Inversa Generalizada (aula em espanhol).

<https://www.google.com.br/search?q=matriz+inversa+generalizada&ie=UTF-8&oe=UTF-8&hl=pt-br&client=safari#fpstate=ive&vld=cid:5c4d8f4c,vid:MQOyc8eAjCw,st:0>