MAT0164 - Números Inteiros: uma introdução à matemática

Lista 3

Axiomas de Peano, Números Naturais e Inteiros

1º Semestre de 2023

(1) Prove que, para todos m, n, p naturais,

- (a) $n \neq n^+$;
- (b) $n + 0 = n$;
- (c) $n + m^+ = (n+m)^+$;
- (d) $n^+ = n + 1$, onde $1 = 0^+$;
- (e) $m + n = n + m$;
- (f) $(m+n) + p = m + (n+p)$;
- (g) $m + p = n + p \Rightarrow m = n$;
- (h) se $m \neq 0$, então existe exatamente um natural m' tal que $(m')^+ = m$.

(2) Prove que, para todos m, n, p naturais,

- (a) $m \leq m$;
- (b) se $m \leq n$ e $n \leq p$, então $m \leq p$;
- (c) se $m \leq n$ e $n \leq m$, então $n = m$;
- (d) $m \leq n$ se, e somente se, $m + p \leq n + p$;
- (e) $m < n$ se, e somente se, $m^+ \leq n$;
- (f) $m < n^+$ se, e somente se, $m \leq n$;
- (g) $m < n$ se, e somente se, $n = m + q$, onde q é um natural e $q \neq 0$.

(3) [Tricotomia da ordem] Sejam m e n números naturais. Prove que exatamente uma das seguintes três sentenças é verdadeira: $m = n$ ou $m < n$ ou $n < m$.

(4) [Divisão Euclidiana] Prove que, dados n natural e q natural positivo, existem únicos naturais m e r tais que $n = mq + r$ e $0 \leq r < q$.

(5) Prove que, para todos m, n, p naturais,

- (a) $n \cdot 0 = 0$;
- (b) $n \cdot m^+ = n \cdot m + n$;
- (c) $m \cdot n = n \cdot m$;
- (d) $m(n+p) = mn + mp$;
- (e) $(m+n)p = mp + np$;
- (f) $(mn)p = m(np)$;
- (g) Se $p > 0$, então $m < n \Rightarrow mp < np$;
- (h) Se $p \neq 0$, então $mp = np \Rightarrow m = n$.

(6) Prove que, para todos m, n, p naturais,

(a) $1^n = 1$;

(b) $m^{n+p} = m^n \cdot m^p$;

(c) Suponha $p \geq 1$. Então: $(m+n)^p \geq m^p + n^p$, e $(m+n)^p = m^p + n^p$ se, e somente se $p = 1$ ou $mn = 0$.

(d) $(mn)^p = m^p \cdot n^p$;

(e) $(m^n)^p = m^{np}$;

(f) $(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$, onde $2 = (0^+)^+$.

(7) Dado um inteiro x, chamamos de *valor absoluto* (ou *módulo*) de x o número inteiro designado por $|x|$ e definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Prove que

(a) $|a| \geq 0$;

(b) $|a| = 0$ se, e somente se, $a = 0$;

(c) $-|a| \leq a \leq |a|$;

(d) $|ab| = |a||b|$;

(e) $|a+b| \leq |a| + |b|$;

(f) $||a| - |b|| \leq |a-b|$.

(8) Um elemento $a \in \mathbb{Z}$ é dito *inversível* se existir um elemento $a' \in \mathbb{Z}$ tal que $aa' = 1$. Mostre que os únicos elementos inversíveis de $\mathbb{Z}$ são 1 e -1.

(9) Sejam $p, q \in \mathbb{Z}$.

(a) Prove que

(i) $p \cdot (-q) = (-p) \cdot q = -(p \cdot q)$;

(ii) $(-p) \cdot (-q) = p \cdot q$.

(b) Mostre que se a multiplicação em $\mathbb{Z}$ tivesse sido definida satisfazendo $(-p) \cdot (-q) = -(p \cdot q)$, para todos $p, q \in \mathbb{N}$, então os números inteiros não satisfariam os seguintes axiomas:

(i) Propriedade cancelativa: para toda terna de inteiros a, b, c, com $a \neq 0$, tem-se que, se $ab = ac$, então $b = c$.

(ii) Propriedade distributiva: para toda terna de inteiros a, b, c de inteiros tem-se que $a(b + c) = ab + ac$.

(c) Se fosse válido que $(-3) \cdot (-5) = -15$, mostre que teríamos $7 \cdot 2 = -16$.

(10) * [Construção dos naturais a partir da Teoria dos Conjuntos] O sucessor de um conjunto x é designado por x^+ ou $S(x)$, e definido por

$$x^+ = x \cup \{x\} \quad \text{ou} \quad S(x) = x \cup \{x\}.$$

Os elementos de x^+ (ou de $S(x)$) são os elementos de x e o próprio x.
Defina

$$0 = \emptyset, 1 = \{\emptyset\}, 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, 3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$
$$4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}.$$

Mostre que:

(a) $2 = 1^+$ (b) $3 = (1^+)^+$ (c) $4 = (2^+)^+$ (d) $2 \subseteq 4^+$

(e) $2 \in 4^+$ (f) $3 \subseteq 3^+$ (g) $3 \in 3^+$

Observação: Exercícios marcados com * são extras.