

Lista 12 - MAT-206 e MAP-216 - 2023

(I) Decida se cada uma das séries converge ou diverge. Se possível, calcule a sua soma.

(i) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(ii) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{10^n}$

(iii) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{9}{10^n}\right)$

(iv) $\sum_{n \geq 1} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

(v) $\sum_{n \geq 0} 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(vi) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$

(vii) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(II) Seja (x_n) uma sequência de números reais, e considere $y_n = x_n - x_{n+1}$, $\forall n \geq 1$. Prove que a série $\sum_{n \geq 1} y_n$ converge se, e somente se, a sequência (x_n) converge.

(III) Seja (a_n) uma sequência de termos estritamente positivos, e $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, $\forall n \geq 1$. Prove que $\sum_{n \geq 1} b_n$ diverge para $+\infty$.

(IV) Estude a convergência ou divergência das seguintes séries:

(1) $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{2^n}$

(2) $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{n!}$

(3) $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^2 + 2}$

(4) $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{2^{3n}}$

$$(5) \sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^n}$$

$$(6) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$(7) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$(8) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$$

$$(9) \sum_{n \geq 1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$