

MAP 2210 - Álgebra Linear e Aplicações

1^o Semestre de 2013

1 Sistemas lineares homogêneos de 1^a ordem a coeficientes constantes

1.1 Abusos de notação

Para $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$, usaremos nestas notas o abuso

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbf{C}),$$

isto é, usaremos a mesma notação z tanto para um vetor de $\mathbf{C}^n$ quanto para sua representação matricial na base canônica de $\mathbf{C}^n$.

Assim, se $f : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ é uma função definida por

$$f(z) = (a_{11}z_1 + \dots + a_{1n}z_n, a_{21}z_1 + \dots + a_{2n}z_n, \dots, a_{n1}z_1 + \dots + a_{nn}z_n),$$

escreveremos $f(z) = Az$, apesar de $f(z)$ ser elemento de $\mathbf{C}^n$ e Az ser elemento de $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbf{C})$ (onde, em Az , o z está sendo olhado como a representação matricial do vetor z de $\mathbf{C}^n$ na base canônica).

1.2 Forma canônica de Jordan

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{R})$ e considere a transformação linear

$$T = T_A : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$$

definida por $T(v) = Av, v \in \mathbf{C}^n$.

É claro que A é a matriz de T na base canônica, isto é, se $A_1, \dots, A_n$ são as colunas de A , temos $A_j = T(e_j), j = 1, \dots, n$.

Mais explicitamente, $T(e_j) = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{nj}e_n, j = 1, 2, \dots, n$.

Lembremos que se $\{f_1, \dots, f_n\}$ é uma base de $\mathbf{C}^n$, a matriz $\tilde{A}$ de T nessa base é dada por $\tilde{A}_j = T(f_j), j = 1, \dots, n$, onde $\tilde{A}_j$ é a j -ésima coluna de $\tilde{A}$, isto é,

$$T(f_j) = \tilde{a}_{1j}f_1 + \tilde{a}_{2j}f_2 + \cdots + \tilde{a}_{nj}f_n, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Exercício 1 Seja $T : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ definida por $T(z) = (2z_1 + 3z_2, 5z_1 - z_2)$.

- (a) Ache a matriz $[T]_B$ de T em relação à base $B = \{e_1, e_1 + e_2\}$
- (b) Ache a matriz $[T]_D$ de T em relação à base $D = \{(1 + i, 0), (0, 2i)\}$

Definição 1 Um escalar $\rho \in \mathbf{C}$ é dito um autovalor de A se o sistema linear $Au = \rho u$, ou, equivalentemente, $(A - \rho I)u = O$ tem alguma solução $u \neq O$. Tais soluções são chamadas autovetores de A associados ao autovalor ρ .

O polinômio

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

é chamado polinômio característico de A (e suas raízes são os autovalores, ou valores próprios, ou valores característicos de A).

Se σ é raiz de $p(\lambda)$ de multiplicidade m , dizemos que σ é um autovalor de A de multiplicidade algébrica m .

Como A é matriz real, se $\sigma \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ é autovalor de A de multiplicidade algébrica m então $\bar{\sigma} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ é também autovalor de A de multiplicidade algébrica m .

Exercício 2 Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbf{R})$ e considere $T : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ definida por $T(z) = Az$. Em cada caso, escreva a matriz de T em relação à base $B = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbf{C}^2$:

- (a) B é uma base tal que $(A - 2I)v_1 = O$ e $(A - 3I)v_2 = O$.
- (b) B é uma base tal que $(A - (2 + 3i)I)v_1 = O$ e $v_2 = \bar{v}_1$.
- (c) B é uma base tal que $(A - 2I)v_1 = O$ e $(A - 2I)v_2 = O$.
- (d) B é uma base tal que $(A - 2I)v_1 = O$ e $(A - 2I)v_2 = v_1$.

Exercício 3 Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbf{R})$ e considere $T : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ definida por $T(z) = Az$. Em cada item, ache uma base $B = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbf{C}^2$ com as propriedades requeridas e escreva a matriz de T nessa base.

- (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \{v_1, v_2\}$ é uma base formada por autovetores de A .
- (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \{v_1, v_2\}$ é uma base formada por autovetores de A .
- (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \{v_1, v_2\}$ é uma base formada por autovetores de A .
- (d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \{v_1, v_2\}$ é uma base tal que v_1 é autovetor de A associado a um autovalor ρ e v_2 satisfaz $(A - \rho I)v_2 = v_1$.

Teorema 1 *Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{R})$.*

Existe uma base de $\mathbf{C}^n$

$$\left\{ w_1^1, \dots, w_{n_1}^1, w_1^2, \dots, w_{n_2}^2, \dots, w_1^s, \dots, w_{n_s}^s, \right. \\ \left. \bar{w}_1^1, \dots, \bar{w}_{n_1}^1, \bar{w}_1^2, \dots, \bar{w}_{n_2}^2, \dots, \bar{w}_1^s, \dots, \bar{w}_{n_s}^s, \right. \\ \left. w_1^{2s+1}, \dots, w_{n_{2s+1}}^{2s+1}, w_1^{2s+2}, \dots, w_{n_{2s+2}}^{2s+2}, \dots, w_1^r, \dots, w_{n_r}^r \right\}$$

tal que

- (a) $w_1^{2s+1}, \dots, w_{n_{2s+1}}^{2s+1}, w_1^{2s+2}, \dots, w_{n_{2s+2}}^{2s+2}, \dots, w_1^r, \dots, w_{n_r}^r \in \mathbf{R}^n$,
- (b) w_1^j é um autovetor de A associado a um autovalor λ_j , $j = 1, 2, \dots, s$,
- (c) $\bar{w}_1^j$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\bar{\lambda}_j$, $j = 1, 2, \dots, s$,
- (d) w_1^j é um autovetor de A associado a um autovalor real λ_j , $j = 2s + 1, \dots, r$,
- (e) *A matriz de $T = T_A$ nessa base tem a forma*

$$\tilde{A} = \text{Diag} (D_1, \dots, D_s, D_{s+1}, \dots, D_{2s}, D_{2s+1}, \dots, D_r)$$

onde $D_{s+j} = \bar{D}_j$, $j = 1, \dots, s$, e cada D_k é da forma

$$D_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, r.$$

Observação 1 No enunciado acima, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ são os autovalores de A , e podem não ser distintos. O número de blocos D_j em que aparece um certo autovalor $\tilde{\lambda}$ é a multiplicidade geométrica de $\tilde{\lambda}$. E a soma das ordens dos D_j em que aparece um certo autovalor $\tilde{\lambda}$ é a multiplicidade algébrica de $\tilde{\lambda}$.

Exercício 4 Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 5/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

Ache sua forma canônica de Jordan e apresente a base correspondente.

Exercício 5 Ache a forma canônica de Jordan e apresente a base correspondente:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 5/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.3 Sistemas de EDOs lineares homogêneos de 1^a ordem a coeficientes constantes

Teorema 2 Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{R})$. Considere o sistema

$$\dot{z} = Az \tag{1}$$

e sejam $\tilde{A} = \text{Diag} (D_1, \dots, D_s, D_{s+1}, \dots, D_{2s}, D_{2s+1}, \dots, D_r)$ e

$$\left\{ w_1^1, \dots, w_{n_1}^1, w_1^2, \dots, w_{n_2}^2, \dots, w_1^s, \dots, w_{n_s}^s, \right.$$

$$\left. \bar{w}_1^1, \dots, \bar{w}_{n_1}^1, \bar{w}_1^2, \dots, \bar{w}_{n_2}^2, \dots, \bar{w}_1^s, \dots, \bar{w}_{n_s}^s, \right.$$

$$\left. w_1^{2s+1}, \dots, w_{n_{2s+1}}^{2s+1}, w_1^{2s+2}, \dots, w_{n_{2s+2}}^{2s+2}, \dots, w_1^r, \dots, w_{n_r}^r \right\}$$

como no teorema anterior.

Então uma base para o espaço das soluções complexas de (1) é

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_j t} w_1^j, \\ & e^{\lambda_j t} (w_2^j + t w_1^j), \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{\lambda_j t} \left(w_{n_j}^j + t w_{n_j-1}^j + \frac{t^2}{2!} w_{n_j-2}^j + \cdots + \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} w_1^j \right), \\
& e^{\bar{\lambda}_j t} \bar{w}_1^j, \\
& e^{\bar{\lambda}_j t} (\bar{w}_2^j + t \bar{w}_1^j), \\
& \vdots \\
& e^{\bar{\lambda}_j t} \left(\bar{w}_{n_j}^j + t \bar{w}_{n_j-1}^j + \frac{t^2}{2!} \bar{w}_{n_j-2}^j + \cdots + \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \bar{w}_1^j \right), \\
& e^{\lambda_k t} w_1^k, \\
& e^{\lambda_k t} (w_2^k + t w_1^k), \\
& \vdots \\
& e^{\lambda_k t} \left(w_{n_k}^k + t w_{n_k-1}^k + \frac{t^2}{2!} w_{n_k-2}^k + \cdots + \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} w_1^k \right), \\
& \text{onde } j = 1, 2, \dots, s, \text{ e } k = 2s+1, 2s+2, \dots, r.
\end{aligned}$$

Corolário 1 Nas condições do teorema anterior, sejam $w_k^j = u_k^j + i v_k^j$ com $u_k^j, v_k^j \in \mathbf{R}^n$, e $\lambda_j = \rho_j + i \theta_j$ com $\rho_j, \theta_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, \dots, s$, $k = 1, \dots, n_j$.

Então uma base para o espaço das soluções reais de (1) é

$$\begin{aligned}
& e^{\rho_j t} (\cos(\theta_j t) u_1^j - \sin(\theta_j t) v_1^j), \\
& e^{\rho_j t} [(\cos(\theta_j t) u_2^j - \sin(\theta_j t) v_2^j) + t(\cos(\theta_j t) u_1^j - \sin(\theta_j t) v_1^j)], \\
& \vdots \\
& e^{\rho_j t} \left[(\cos(\theta_j t) u_{n_j}^j - \sin(\theta_j t) v_{n_j}^j) + t(\cos(\theta_j t) u_{n_j-1}^j - \sin(\theta_j t) v_{n_j-1}^j) + \cdots \right. \\
& \quad \left. + \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} (\cos(\theta_j t) u_1^j - \sin(\theta_j t) v_1^j) \right], \\
& e^{\rho_j t} (\cos(\theta_j t) v_1^j + \sin(\theta_j t) u_1^j), \\
& e^{\rho_j t} [(\cos(\theta_j t) v_2^j + \sin(\theta_j t) u_2^j) + t(\cos(\theta_j t) v_1^j + \sin(\theta_j t) u_1^j)], \\
& \vdots \\
& e^{\rho_j t} \left[(\cos(\theta_j t) v_{n_j}^j + \sin(\theta_j t) u_{n_j}^j) + t(\cos(\theta_j t) v_{n_j-1}^j + \sin(\theta_j t) u_{n_j-1}^j) + \cdots \right. \\
& \quad \left. + \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} (\cos(\theta_j t) v_1^j + \sin(\theta_j t) u_1^j) \right], \\
& e^{\lambda_k t} w_1^k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{\lambda_k t} (w_2^k + t w_1^k), \\
& \vdots \\
& e^{\lambda_k t} \left(w_{n_k}^k + t w_{n_k-1}^k + \frac{t^2}{2!} w_{n_k-2}^k + \cdots + \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} w_1^k \right), \\
& \text{onde } j = 1, 2, \dots, s, \text{ e } k = 2s+1, 2s+2, \dots, r.
\end{aligned}$$

Exercício 6 Resolva $\dot{z} = Az$ com a matriz A dada no exercício 4.

Exercício 7 Resolva $\dot{z} = Az$ com a matriz A dada no exercício 5.

Exercício 8 Resolva o sistema $\dot{z} = Az$ onde

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$