Física III 2023 (IF) – Aula 22

Objetivos de aprendizagem

- Separar a auto-energia de um sistema de duas cargas puntiformes nas componentes de cada carga e da energia de interação entre elas.
- Calcular a energia de interação entre duas cargas puntiformes.
- Descrever a localização espacial da energia de interação entre duas cargas puntiformes.

A energia do campo de 2 c. p.

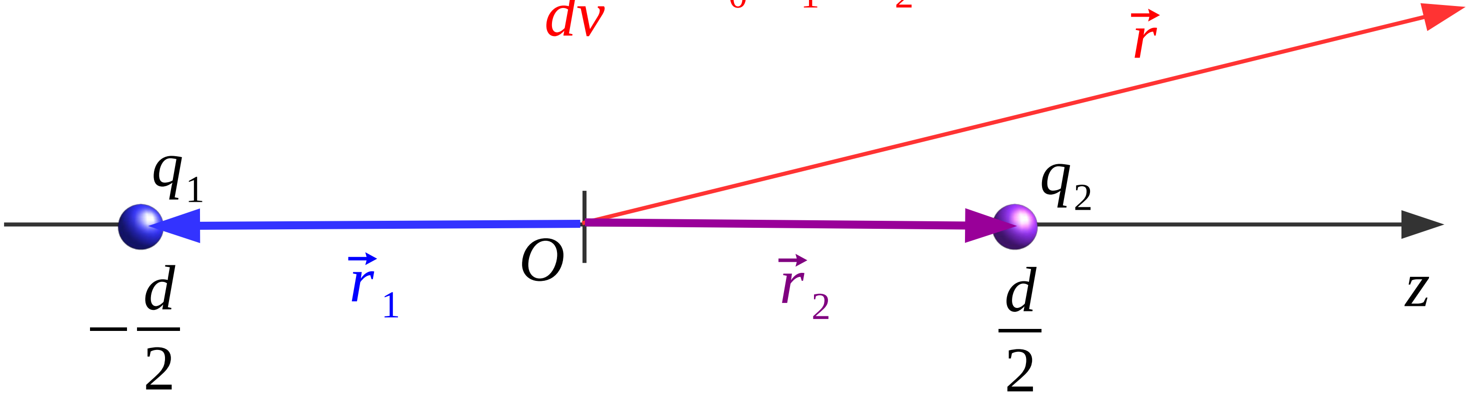
- ***E*** total $\rightarrow$ superposição do campo elétrico

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\frac{dU}{dv} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)\cdot(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2}_{\text{Auto 1}} + \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2}_{\text{Auto 2}} + \underbrace{\varepsilon_0 \vec{E}_1\cdot\vec{E}_2}_{\text{Interação 1,2}}$$

Densidade de energia de interação

$$\frac{dU_{\text{int}}}{dv} = \varepsilon_0 \vec{E}_1 . \vec{E}_2$$



$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \qquad \vec{r}_1 = -\frac{d}{2}\hat{k}; \quad \vec{r}_2 = +\frac{d}{2}\hat{k}$$

Energia de interação (2 c. p.)

$$U_{\text{int}} = \int_{\text{Univ.}} dv\, \varepsilon_0 \vec{E}_1 . \vec{E}_2 = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{\infty} \varepsilon_0 \vec{E}_1 . \vec{E}_2 r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$U_{\text{int}} = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_o^{\infty} r^2\, dr\, \varepsilon_0 \vec{E}_1 . \vec{E}_2$$

Depende de θ

A densidade de energia de interação depende do ângulo polar, mas não depende do azimutal:

$$\varepsilon_0 \vec{E}_1 . \vec{E}_2 = \frac{q_1 q_2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0} \frac{(r^2 - d^2/4)}{[(r^2 + d^2/4)^2 - r^2 d^2 \cos^2\theta]^{3/2}}$$

→ Como esperado: $$U_{\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

(vide apostila sobre a integração, pgs. 217-218)

Roteiro para o cálculo da integral

- Integrar em ângulo primeiro (integrar na coordenada radial depois).
- Escrever na forma “constantes” * “integral em u” com:

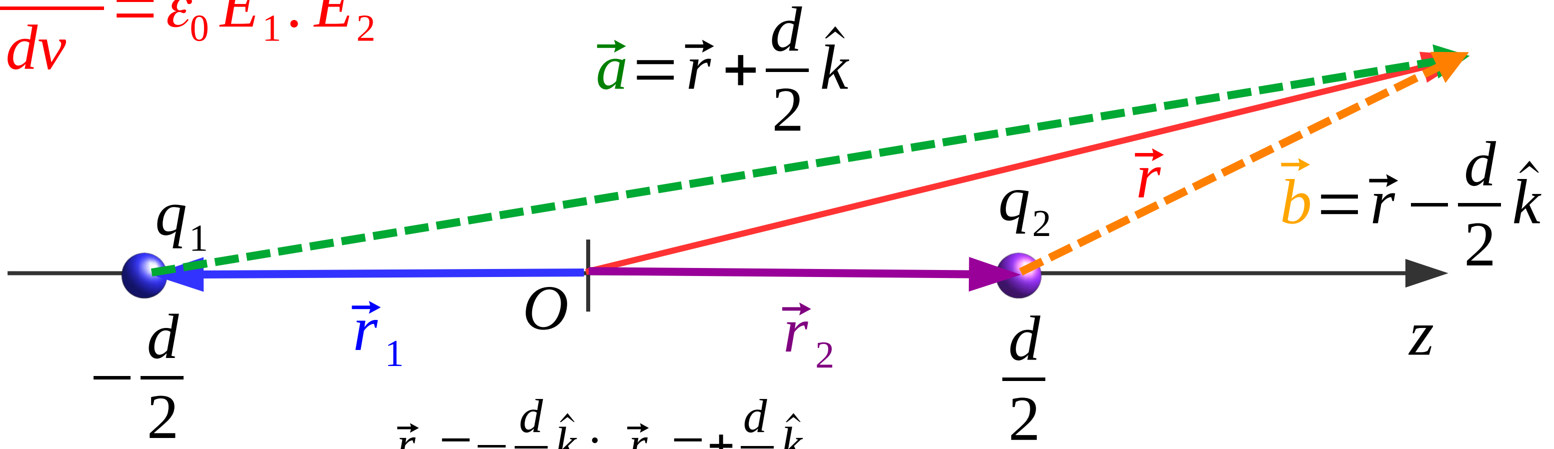
$$u = B\cos\theta, \quad \left(B = \frac{rd}{\left(r^2 + d^2/4\right)} \right)$$

- Integral angular vai ficar na forma: $f(r)\int \frac{du}{\left(1-u^2\right)^{3/2}}$
- Nova subst. de variável: $u = \sin\phi$
- Depois de integrar em ângulo, incluir o resultado na integral radial
- Manipular até obter (22.14) … etc… !

$$\rightarrow U_{\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

Analisando a densidade de energia de interação

$$\frac{dU_{\text{int}}}{dv} = \varepsilon_0 \vec{E}_1 . \vec{E}_2$$



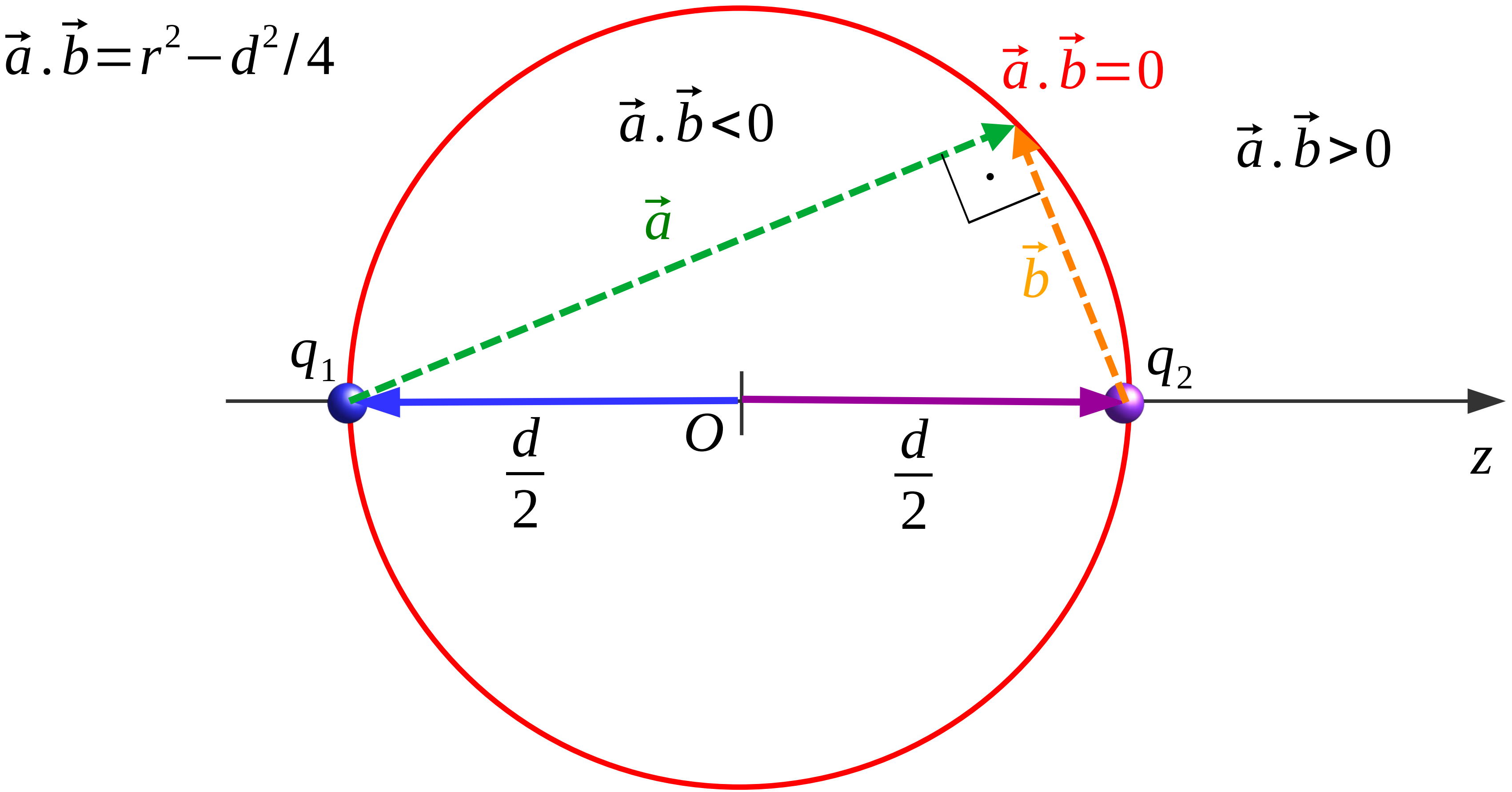
$$\vec{r}_1 = -\frac{d}{2}\hat{k}; \quad \vec{r}_2 = +\frac{d}{2}\hat{k}$$

$$\varepsilon_0 \vec{E}_1 . \vec{E}_2 = \frac{q_1 q_2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0} \frac{(r^2 - d^2/4)}{[(r^2 + d^2/4)^2 - r^2 d^2 \cos^2\theta]^{3/2}}$$

$$\vec{a} . \vec{b} = r^2 - d^2/4$$

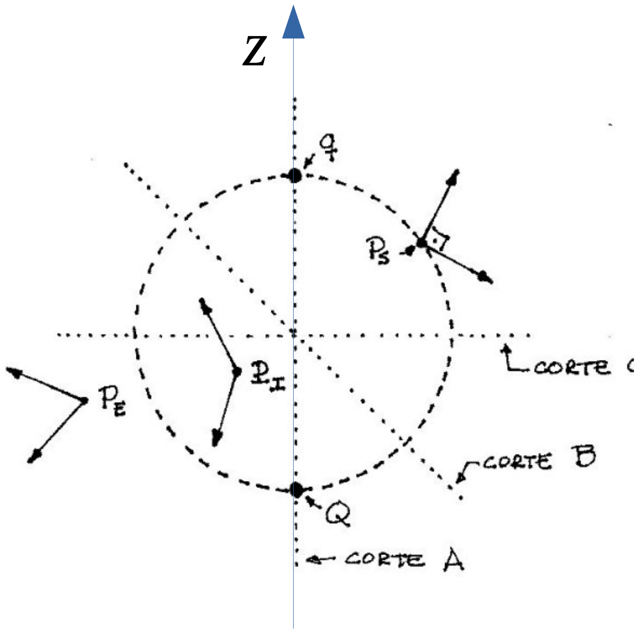
$r > d/2$ (+), $r = d/2$ (0), $r < d/2$ (-)

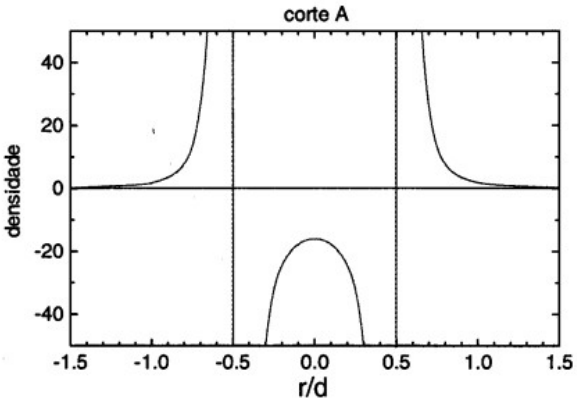
Círculo de raio d/2

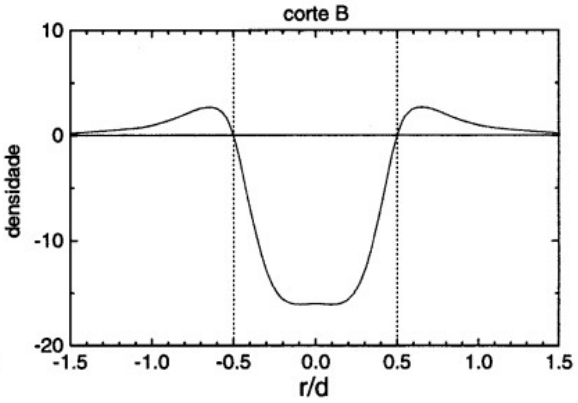


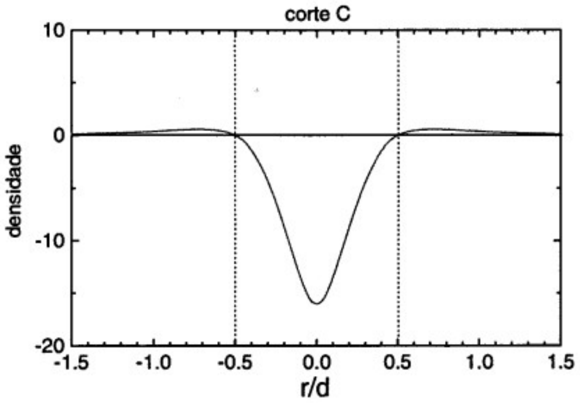
O perfil da densidade de energia

$$\frac{dU_{\text{int}}}{dv} = \varepsilon_0 \vec{E}_1 . \vec{E}_2$$









https://www.desmos.com/calculator/h5uhi2jsuv