

Movimento Unidimensional e Método dos Mínimos Quadrados

Prof. Rafael Guido

rvcguido@ifsc.usp.br

1. Os resultados obtidos em um experimento de um objeto em MRU estão mostrados na Tabela abaixo.

y_i (cm)	x_i (s)
19,7	1,0
30,2	2,0
40,0	3,0
49,5	4,0

Determine os valores de **a** e **b** com suas respectivas unidades, pelo método dos mínimos quadrados. Para a equação do tipo: $y = ax + b$

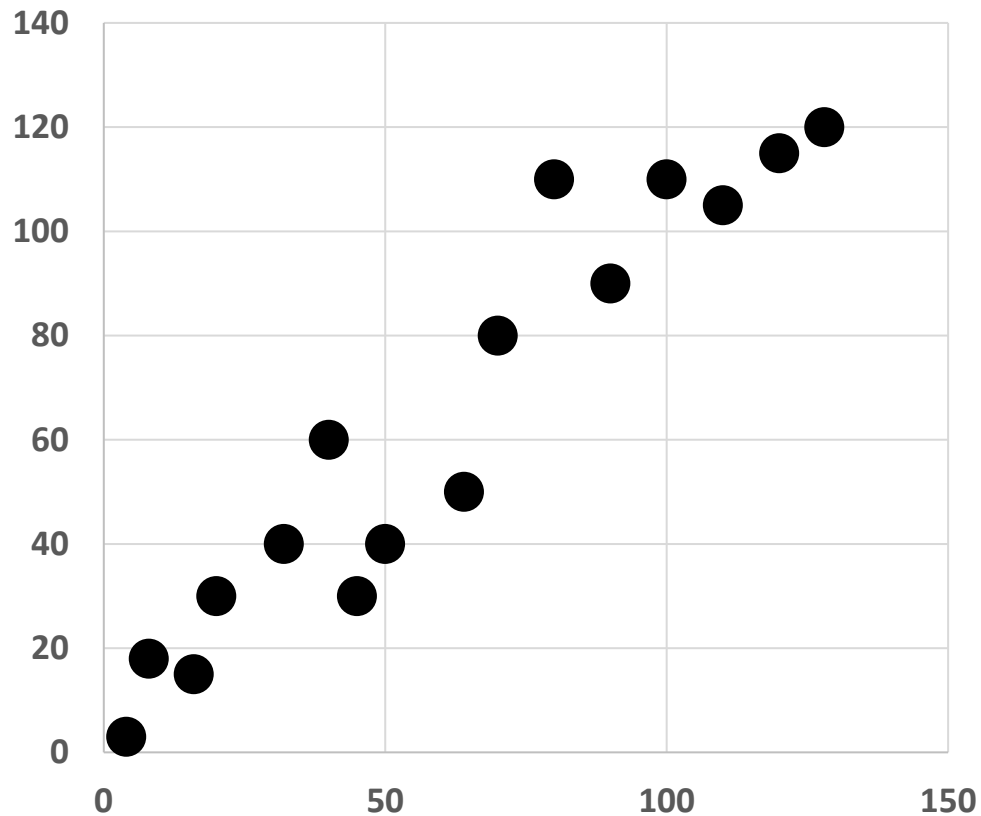
Dado:

$$a = \frac{N(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$b = \frac{(\sum y_i)(\sum x_i^2) - (\sum x_i y_i)(\sum x_i)}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} = \bar{y} - a\bar{x}$$

Relações lineares entre dados experimentais

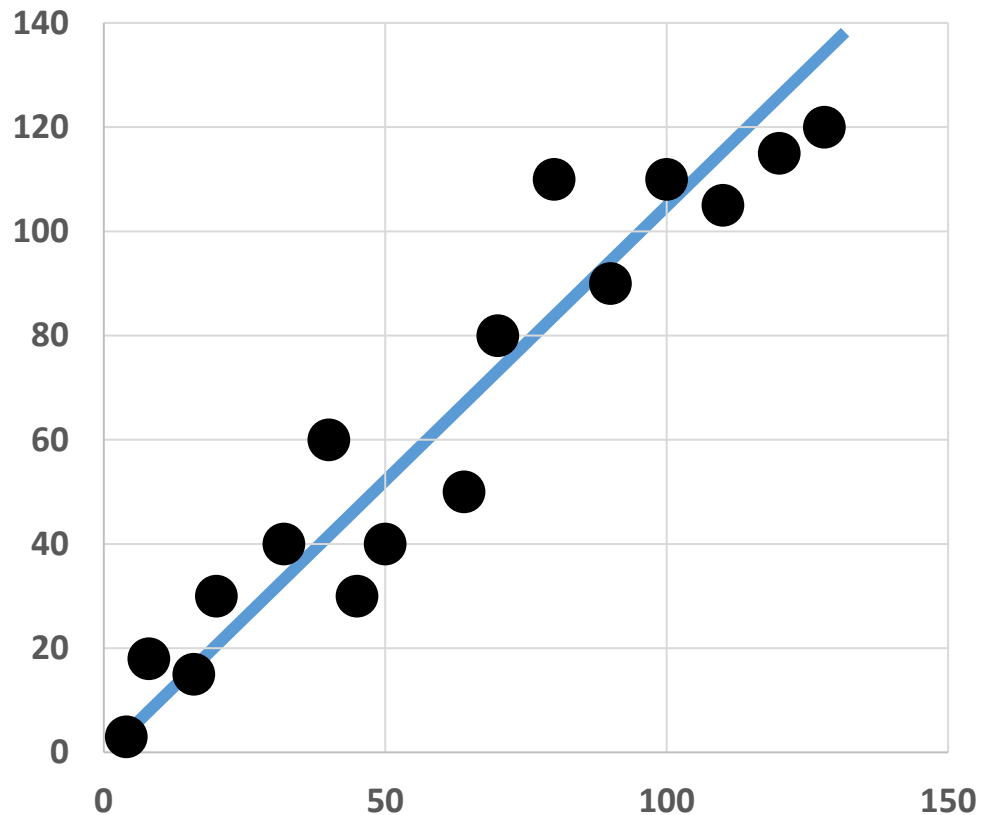
- Muitas vezes, a relação encontrada experimentalmente entre duas grandezas físicas é linear ou pode ser linearizada.*



$$y = ax + b$$

Relações lineares entre dados experimentais

- Muitas vezes, a relação encontrada experimentalmente entre duas grandezas físicas é linear ou pode ser linearizada.*

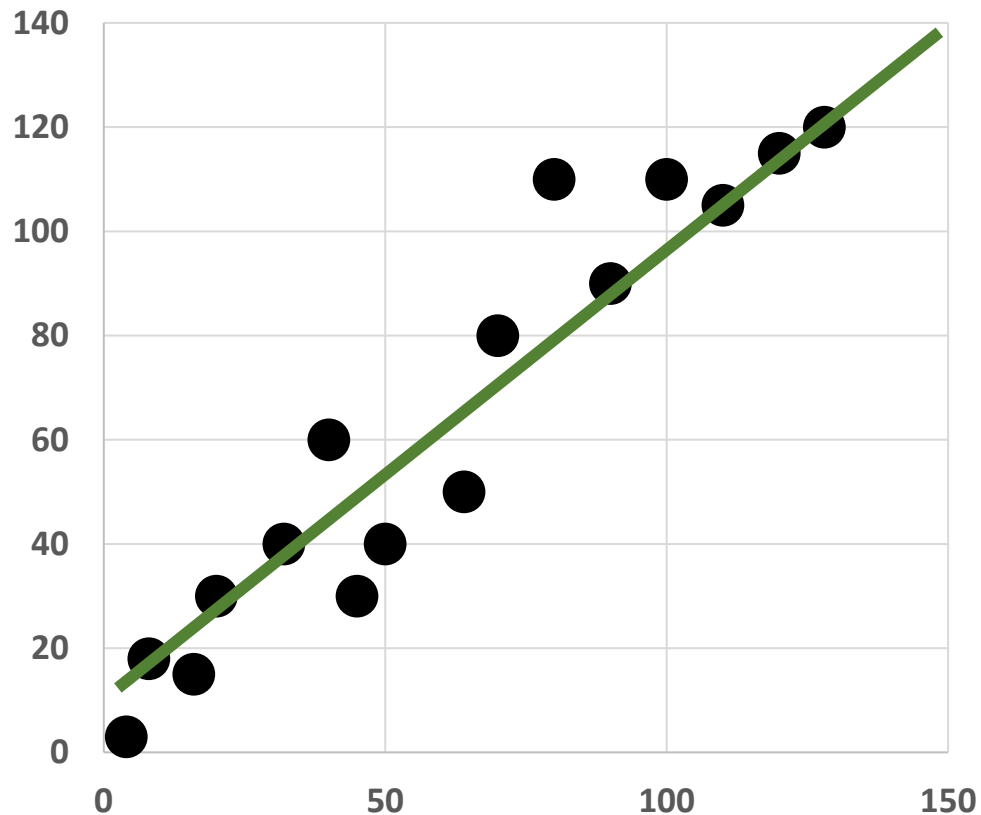


Método gráfico

$$y = ax + b$$

Relações lineares entre dados experimentais

- Muitas vezes, a relação encontrada experimentalmente entre duas grandezas físicas é linear ou pode ser linearizada.*

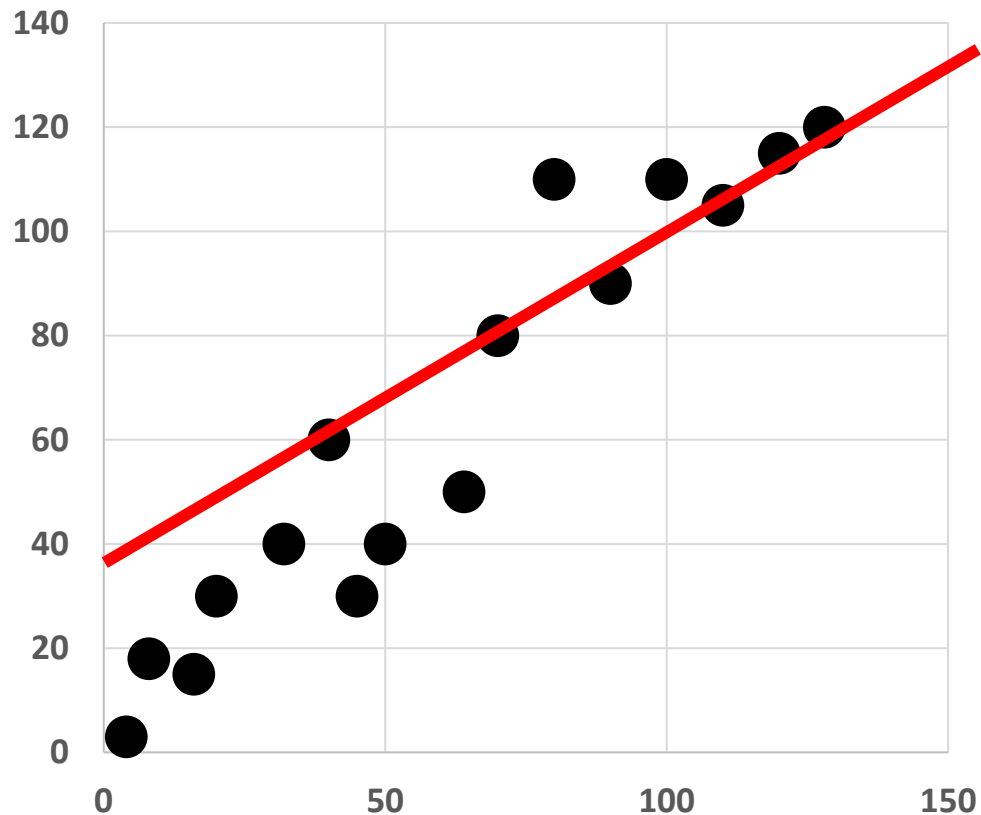


Método gráfico

$$y = ax + b$$

Relações lineares entre dados experimentais

- Muitas vezes, a relação encontrada experimentalmente entre duas grandezas físicas é linear ou pode ser linearizada.*

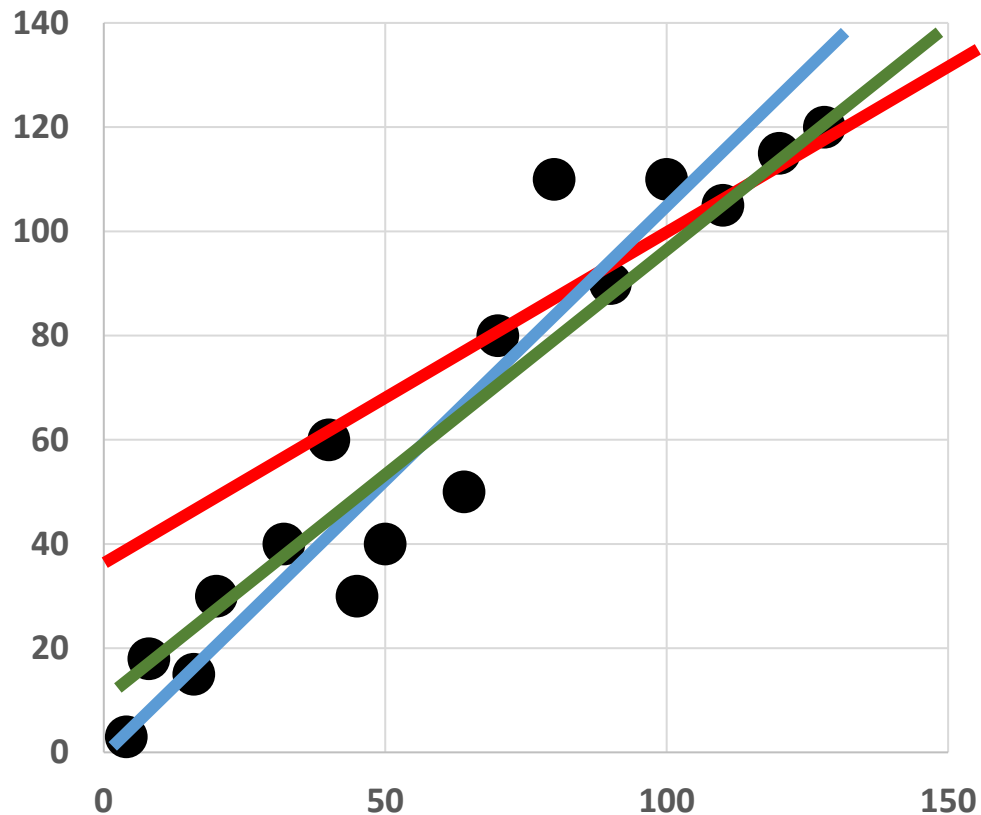


Método gráfico

$$y = ax + b$$

Relações lineares entre dados experimentais

- Muitas vezes, a relação encontrada experimentalmente entre duas grandezas físicas é linear ou pode ser linearizada.*



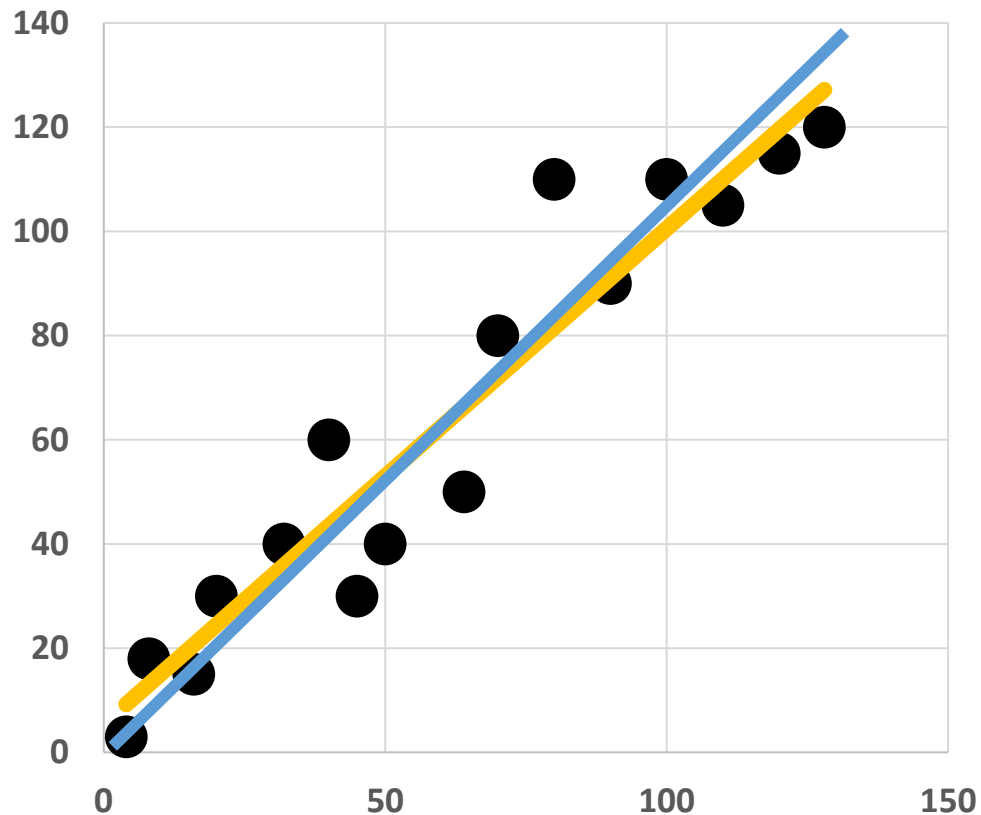
Método gráfico

Qual a melhor?

$$y = ax + b$$

Relações lineares entre dados experimentais

- Muitas vezes, a relação encontrada experimentalmente entre duas grandezas físicas é linear ou pode ser linearizada.*



Método gráfico (a olho)

Método analítico (mínimos quadrados)

$$y = ax + b$$

$$\text{coeficiente angular: } a = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

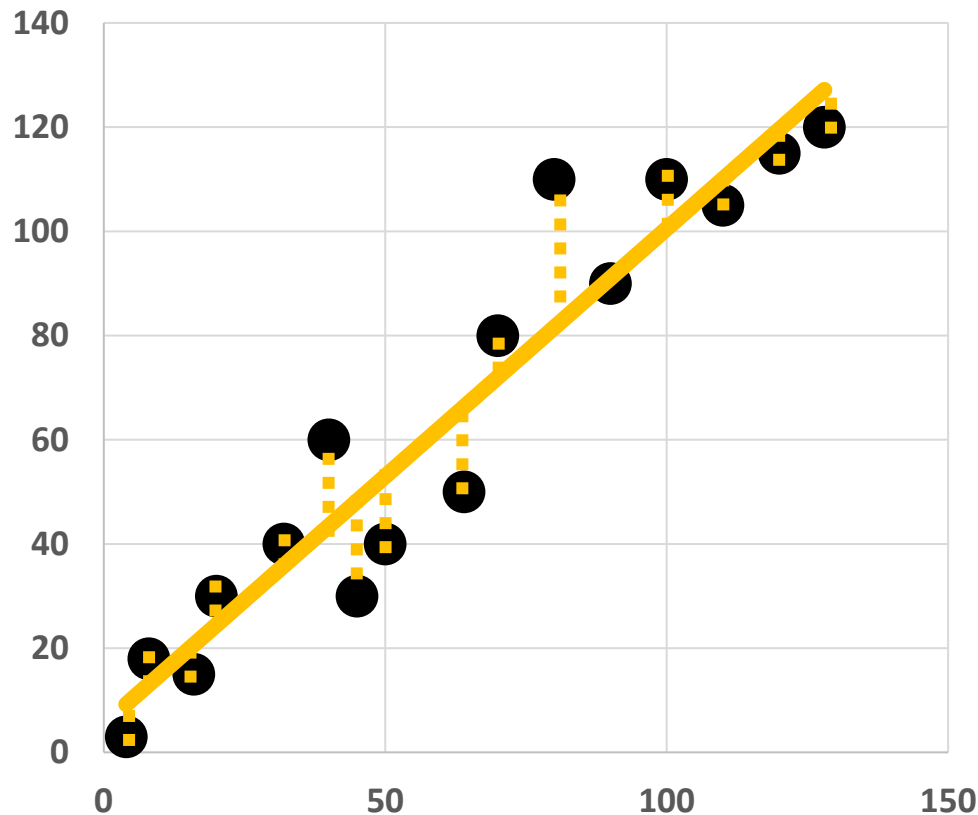
Relações lineares entre dados experimentais

- Muitas vezes, a relação encontrada experimentalmente entre duas grandezas físicas é linear ou pode ser linearizada.*

Método gráfico (a olho)

Método analítico (mínimos quadrados)

$$y = ax + b$$



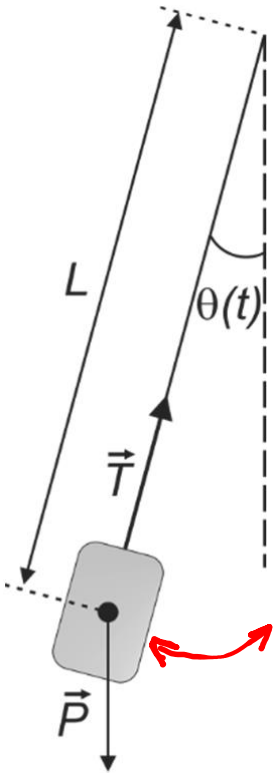
coeficiente angular: $a = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

dispersão média do ajuste: $\Delta y = \sqrt{\frac{\sum (ax_i + b - y_i)^2}{N - 2}}$

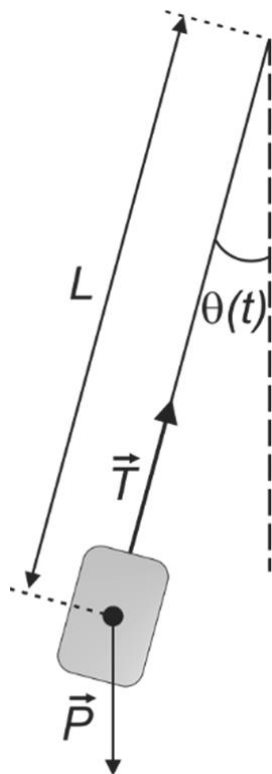
incerteza do coeficiente angular: $\Delta a = \frac{\Delta y}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$

incerteza do coeficiente linear: $\Delta b = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N \sum (x_i - \bar{x})^2}} \Delta y$

Experimental: Pêndulo simples



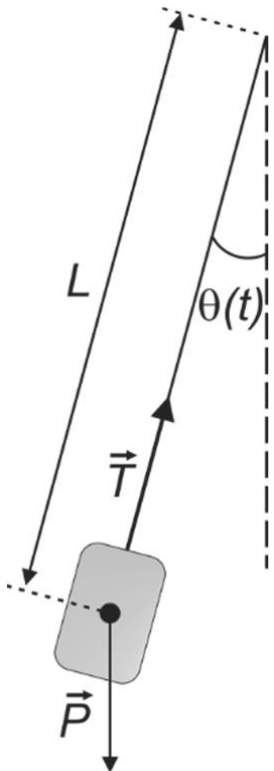
Experimental: Pêndulo simples



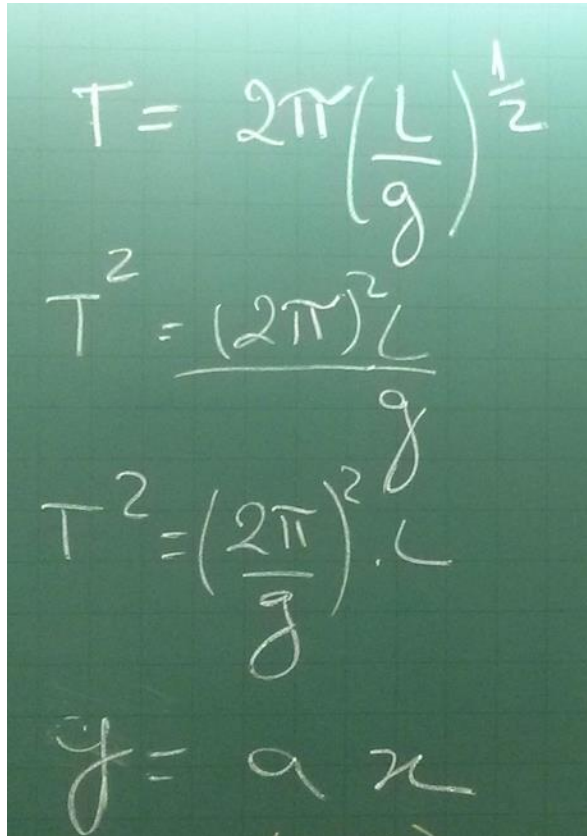
$$T = 2\pi \left(\frac{L}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 L}{g}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Experimental: Pêndulo simples



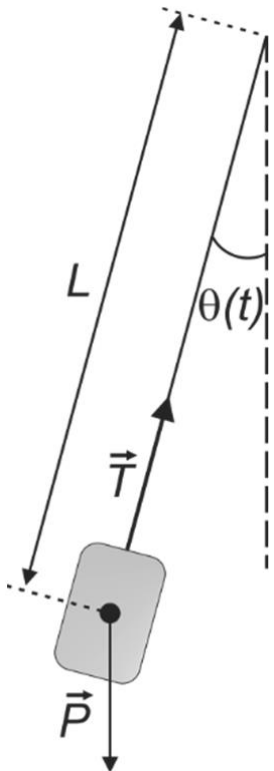
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



Handwritten equations on a green background:

$$T = 2\pi \left(\frac{L}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 L}{g}$$
$$T^2 = \left(\frac{2\pi}{g} \right)^2 \cdot L$$
$$g = a \cdot \pi$$

Experimental: Pêndulo simples



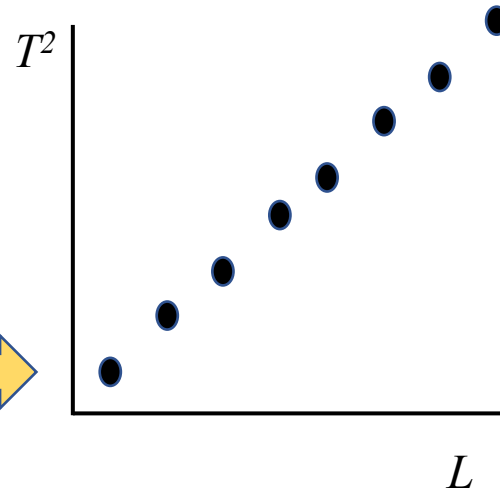
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T = 2\pi \left(\frac{L}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$$

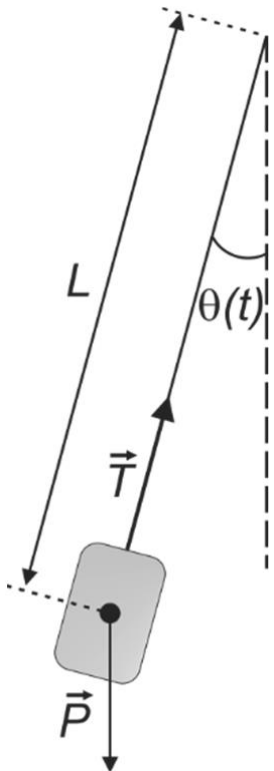
$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 L}{g}$$

$$T^2 = \left(\frac{2\pi}{g} \right)^2 \cdot L$$

$$g = a \cdot \kappa$$



Experimental: Pêndulo simples



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

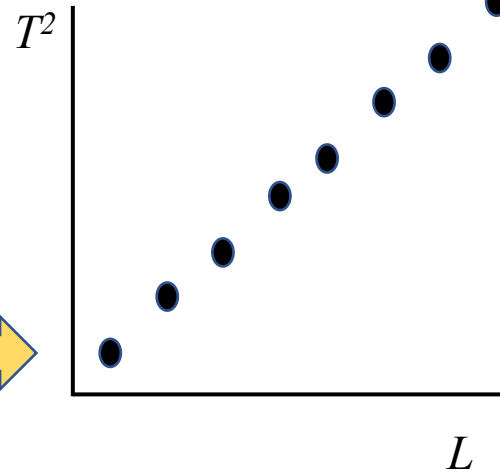
$$T = 2\pi \left(\frac{L}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 L}{g}$$

$$T^2 = \left(\frac{2\pi}{g} \right)^2 L$$

$$y = ax$$

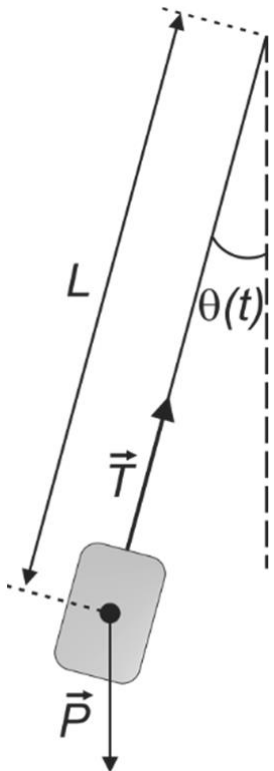
$$a = \frac{(2\pi)^2}{g} \Rightarrow$$



Método dos mínimos quadrados

$$g = \frac{(2\pi)^2}{a \pm \Delta a}$$

Experimental: Pêndulo simples



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

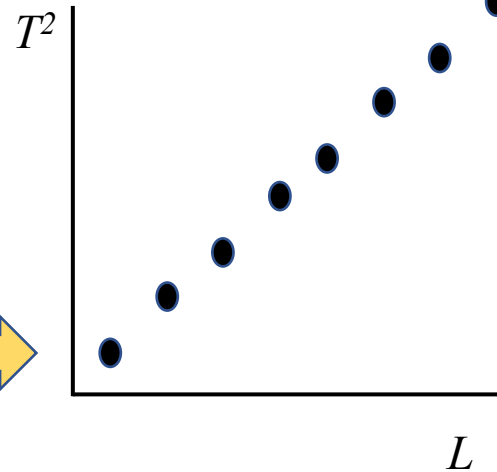
$$T = 2\pi \left(\frac{L}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 L}{g}$$

$$T^2 = \left(\frac{2\pi}{g}\right)^2 L$$

$$y = ax$$

$$a = \frac{(2\pi)^2}{g} \Rightarrow g = \frac{(2\pi)^2}{a \pm \Delta a}$$



Método dos mínimos quadrados

Exemplo

Tabela 1

$L(m)$	$T_0(s)$	$T_1(s)$	$T^2(s^2)$
2,25			
2,00			
1,75			
1,50			
1,25			
1,00			

coeficiente angular: $a = \frac{\sum(x_i - \bar{x})y_i}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$

incerteza do coeficiente angular: $\Delta a = \frac{\Delta y}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}}$

Experimental: Pêndulo simples

Tabela 1: xxxxxxxx *legenda* xxxxxxxx

i	L (cm)	t ₁₀ (s)	T (s)	T ² (s ²)
1	63,0	16,03		
2	78,0	17,97		
3	88,5	19,13		
4	99,2	20,18		
5	111,5	21,44		
6	125,2	22,72		
7	139,1	23,94		
8	152,4	25,03		
9	163,9	25,91		
10	227,2	30,28		

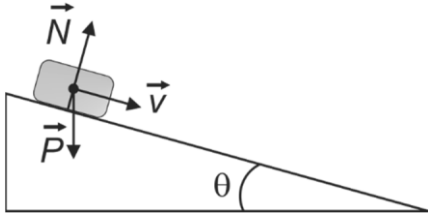
L: Comprimento
do pêndulo

t₁₀: Tempo de
10 oscilações

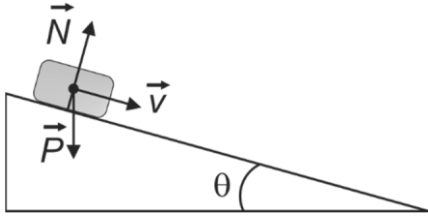
T: Período de
oscilação

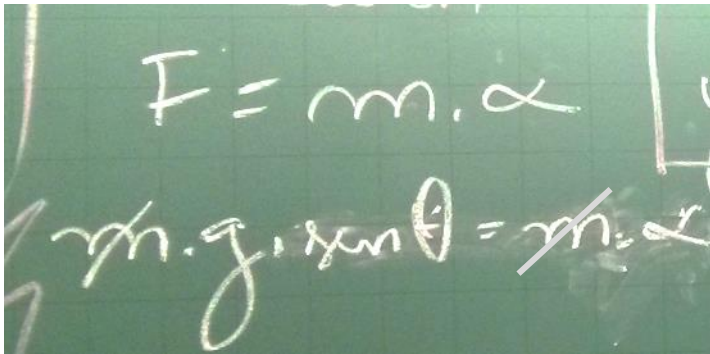
Incertezas nas medidas:
 $\Delta L = 0,1 \text{ cm}$ e $\Delta T = 0,02 \text{ s}$

Experimental: Plano inclinado



Experimental: Plano inclinado

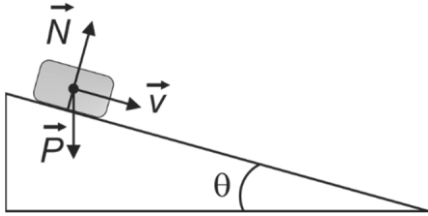


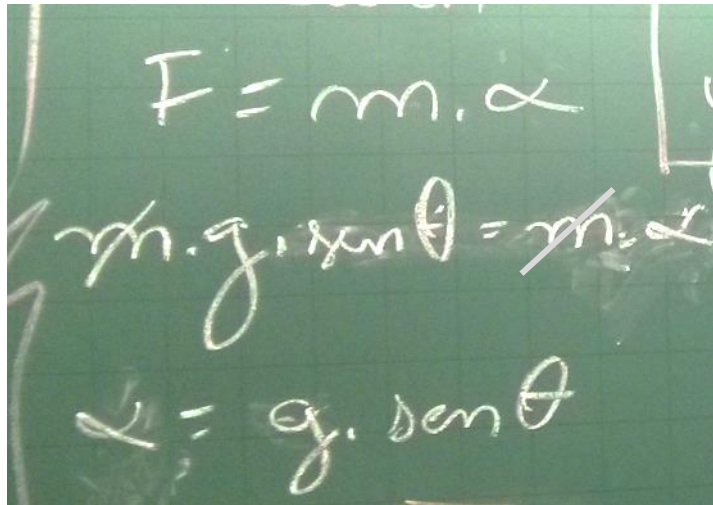


Handwritten equations on a green chalkboard:

$$F = m \cdot a$$
$$m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot a$$

Experimental: Plano inclinado

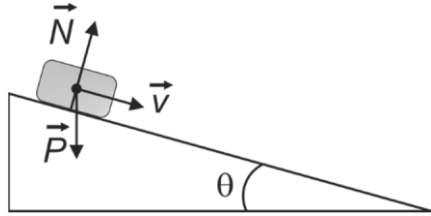




Handwritten equations on a green chalkboard:

$$F = m \cdot a$$
$$m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot a$$
$$a = g \cdot \sin \theta$$

Plano inclinado



$$y = \sqrt{a}x + \alpha x^2$$

(Handwritten equation with red corrections: a horizontal line under the first term, a red 'x' under the second term, and a red 'x' under the third term.)

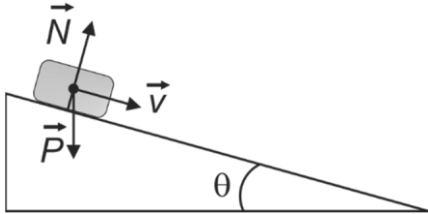
$$F = m \cdot a$$

$$m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot a$$

$$a = g \cdot \sin \theta$$

(Handwritten equations on a green chalkboard.)

Plano inclinado



$$F = m \cdot a$$

$$m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot a$$

$$a = g \cdot \sin \theta$$

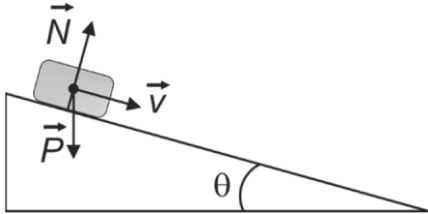
$$y = \sqrt{ax} + \frac{a}{2} x^2$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{ax}}{x} + \frac{a x^2}{2x}$$

$$\frac{y}{x} = \sqrt{a} + \frac{ax}{2}$$

$$y = b + ax$$

Plano inclinado



$$F = m \cdot a$$

$$m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot a$$

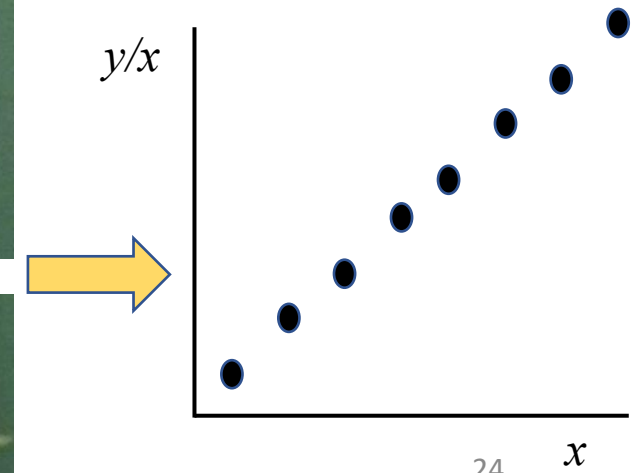
$$a = g \cdot \sin \theta$$

$$y = \sqrt{a}x + \frac{a}{2}x^2$$

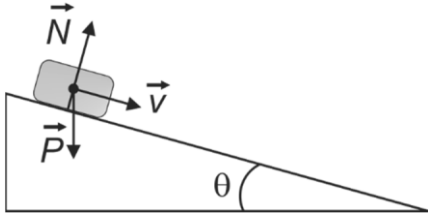
$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{a}x}{x} + \frac{a x^2}{2x}$$

$$\frac{y}{x} = \sqrt{a} + \frac{a}{2}x$$

$$y = b + ax$$



Plano inclinado



$$F = m \cdot a$$

$$m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot a$$

$$a = g \cdot \sin \theta$$

$$y = \sqrt{a}x + \frac{a}{2}x^2$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{a}x}{x} + \frac{a}{2}x$$

$$\frac{y}{x} = \sqrt{a} + \frac{a}{2}x$$

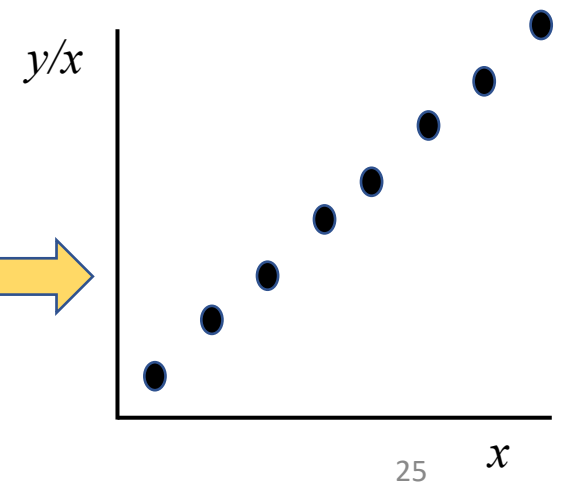
$$y = b + ax$$

coeficiente angular: $a = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

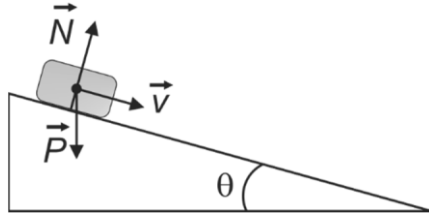
incerteza do coeficiente angular: $\Delta a = \frac{\Delta y}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$

$$a = \frac{a}{2} = \frac{1}{2} a = 2a$$

Método dos mínimos quadrados



Plano inclinado



Handwritten notes on a chalkboard:

$$F = m \cdot a$$

$$m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot a$$

$$a = g \cdot \sin \theta$$

$$g = \frac{2a + v^2}{\sin \theta}$$

$$y = \sqrt{a}x + \frac{a}{2}x^2$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{a}x}{x} + \frac{a}{2}x$$

$$\frac{y}{x} = \sqrt{a} + \frac{a}{2}x$$

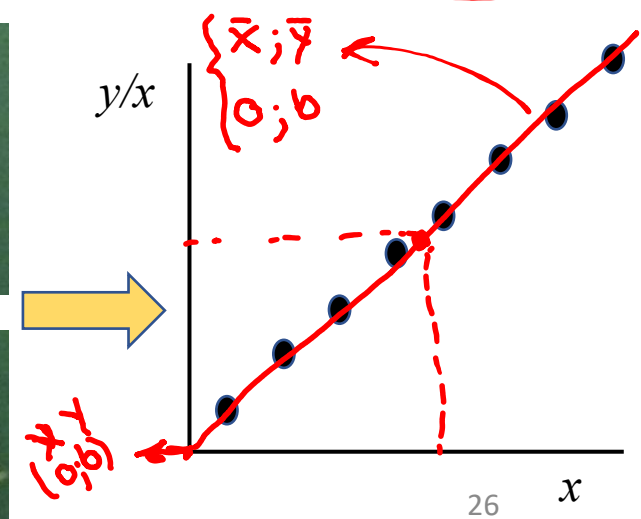
$$y = b + ax$$

coeficiente angular: $a = \frac{\sum (x_i - \bar{x})y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

incerteza do coeficiente angular: $\Delta a = \frac{\Delta y}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$

$$a = \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}a = 2a$$

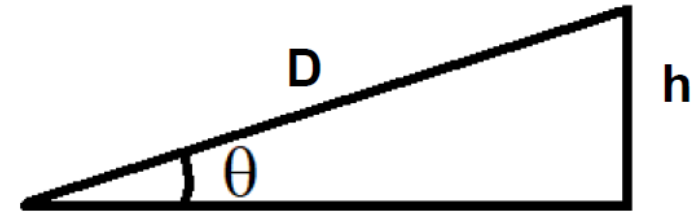
Método dos mínimos quadrados



Plano inclinado

Tabela 2: xxxxxxxx *legenda* xxxxxxxx

i	y (cm)	t (s)	y/t (cm/s)
1	2,5	0,4	X₁
2	5,9	0,6	X₂
3	10,9	0,8	X₃
4	17,4	1,0	X₄
5	25,0	1,2	
6	34,8	1,4	
7	45,6	1,6	
8	58,0	1,8	
9	72,0	2,0	
10	87,5	2,2	



D: Hipotenusa

h: Cateto oposto

Valores medidos:

$$D = (1,600 \pm 0,001) \text{ m}$$

e

$$h = (62,80 \pm 0,05) \text{ mm}$$

Exemplo de aplicação MMQ

$$\text{coeficiente angular: } a = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

i	x_i	y_i
1	139	122
2	126	114
3	90	86
4	144	134
5	163	146

$$x_{\text{médio}} = 132,4$$

$$y_{\text{médio}} = 120,4$$

$$a = \frac{(139-132,4) \times 122 + (126-132,4) \times 114 + (90-132,4) \times 86 + (144-132,4) \times 134 + (163-132,4) \times 146}{(139-132,4)^2 + (126-132,4)^2 + (90-132,4)^2 + (144-132,4)^2 + (163-132,4)^2}$$

$$a = \frac{(805,2) + (-729,6) + (-3646,4) + (1554,4) + (4467,6)}{(43,56) + (40,96) + (1797,76) + (134,56) + (936,36)}$$

$$a = \frac{2451,2}{2953,2}$$

$$a = 0,83$$

$(x_i - \bar{x}) \cdot y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$
805,2	43,56
-729,6	40,96
-3646,4	1797,76
1554,4	134,56
4467,6	936,36

Exemplo de aplicação MMQ

coeficiente linear: $b = \bar{y} - a\bar{x}$

$$b = 120,4 - (0,83 \times 132,4)$$

$$b = 120,4 - 109,892$$

$$b = 10,508$$

i	x_i	y_i
1	139	122
2	126	114
3	90	86
4	144	134
5	163	146

$$x_{\text{médio}} = 132,4$$

$$y_{\text{médio}} = 120,4$$

$$a = 0,83$$

Exemplo de aplicação MMQ

dispersão média do ajuste: $\Delta y = \sqrt{\frac{\sum (ax_i + b - y_i)^2}{N - 2}}$

i	x_i	y_i
1	139	122
2	126	114
3	90	86
4	144	134
5	163	146

$$\begin{aligned} x_{\text{médio}} &= 132,4 \\ y_{\text{médio}} &= 120,4 \\ a &= 0,83 \\ b &= 10,508 \end{aligned}$$

$$\Delta y = \sqrt{\frac{[(0,83 \times 139) + (10,508 - 122)]^2 + [(0,83 \times 126) + (10,508 - 114)]^2 + [(0,83 \times 90) + (10,508 - 86)]^2 + [(0,83 \times 144) + (10,508 - 144)]^2 + [(0,83 \times 163) + (10,508 - 146)]^2}{5 - 2}}$$

$$\Delta y = \sqrt{\frac{15,039 + 1,184 + 0,627 + 15,777 + 0,041}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{32,667}{3}}$$

$$\Delta y = \sqrt{10,889} = 3,299$$