Derivadas
Aula 16

Primeiro Semestre de 2023

Propriedades da Derivada

O teorema a seguir é muito útil para o cálculo de derivadas.

Teorema (Propriedades da Derivada)

Sejam f e g funções diferenciáveis em p e k uma constante. Então

(a) kf será diferenciável em p e

$$(kf)'(p) = kf'(p),$$ **(Multiplicação por constante)**

(b) $f + g$ será derivável em p e

$$(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p),$$ **(Derivada da Soma)**

(c) fg será derivável em p e

$$(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p),$$ **(Derivada do Produto)**

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)$ será derivável em p, se $g(p) \neq 0$ e, neste caso, teremos

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2},$$ **(Derivada do Quociente)**.

Como $\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = f'(p)$ e $\lim_{x\to p}\frac{g(x)-f(p)}{x-p} = g'(p)$, temos

(a) $\lim_{x\to p}\frac{kf(x)-kf(p)}{x-p} = \lim_{x\to p} k\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = k\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = kf'(p).$

(b) $\lim_{x\to p}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(p)}{x-p} = \lim_{x\to p}\frac{(f(x)-f(p)+(g(x)-g(p))}{x-p}$

$= \lim_{x\to p}\frac{(f(x)-f(p)}{x-p} + \lim_{x\to p}\frac{(g(x)-g(p))}{x-p} = f'(p)+g'(p).$

(c) Note que g é contínua em p. Logo $\lim_{x\to p} g(x) = g(p)$ e

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)g(x)-f(p)g(p)}{x-p} = \lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p}g(x) + f(p)\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right)$$

$$= \lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\lim_{x\to p} g(x) + f(p)\lim_{x\to p}\frac{g(x)-g(p)}{x-p}$$

$$= f'(p)g(p)+f(p)g'(p)$$

(d) Como g é contínua em p e $g(p) \neq 0$, $\lim_{x \to p} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(p)}$, e

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to p} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(p)}{g(p)}}{x-p} &= \lim_{x \to p} \left(\frac{f(x)g(p) - f(p)g(x)}{x-p} \frac{1}{g(x)g(p)} \right) \\
&= \lim_{x \to p} \left(\frac{(f(x)-f(p))g(p) - f(p)(g(x)-g(p))}{x-p} \frac{1}{g(x)g(p)} \right) \\
&= \lim_{x \to p} \left(\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p} g(p) - f(p) \frac{g(x)-g(p)}{x-p} \right) \frac{1}{g(x)g(p)} \right) \\
&= \left(\lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} g(p) - f(p) \lim_{x \to p} \frac{g(x)-g(p)}{x-p} \right) \lim_{x \to p} \frac{1}{g(x)g(p)} \\
&= \left(f'(p)g(p) - f(p)g'(p) \right) \frac{1}{g(p)^2}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$f(x) = x^8 + 12x^5 - 6x + 2 \implies f'(x) = 8x^7 + 60x^4 - 6.$$

Exemplo

$$f(x) = x\cos(x) \implies f'(x) = \cos(x) - x\mathrm{sen}(x).$$

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^3 + 6} \implies f'(x) = \frac{2x(x^3 + 6) - (x^2 - 2)3x^2}{(x^3 + 6)^2}.$$

Exemplo

$$f(x) = x^{-n} \implies f'(x) = -n\,x^{-n-1}\,, \quad x \neq 0\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Solução: Note que, se $g(x)=x^n$, $g'(x)=nx^{n-1}$ e $f(x)=\frac{1}{g(x)}$.

Logo

$$f'(x) = \frac{0.g(x) - 1.g'(x)}{g(x)^2} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} = -n\frac{x^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Exemplo

$$f(x) = \log_a x \implies f'(x) = \frac{1}{x \ln a}\,, \quad x > 0.$$

Solução: Segue diretamente do fato que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ e da fórmula de mudança de base

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x.$$

Exemplo

Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ *no ponto* $(1, \frac{e}{2})$.

Solução: Como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x(1+x^2) - e^x 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2},$$

a inclinação da reta tangente em $(1, \frac{e}{2})$ é $\dfrac{dy}{dx}(1) = 0$. Logo a equação da reta tangente é $y = \frac{e}{2}$.

A Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia nos fornece uma maneira de calcular a derivada da função composta $h = f \circ g$ em termos das derivadas de f e de g.

Teorema (Regra da Cadeia)

Sejam f e g diferenciáveis com $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$. Se $h = f \circ g$, então h é diferenciável e

$$\boxed{h'(x) = f'(g(x))g'(x), \quad \textit{para todo } x \in D_g.} \tag{1}$$

De fato: Note que $x \to p \Rightarrow u = g(x) \to g(p) = u_p$. Se $g(x) \neq g(p)$ para todo x próximo a p,

$$\boxed{\lim_{x\to p} \frac{f(g(x)) - f(g(p))}{x-p}} = \lim_{x\to p} \frac{f(\overbrace{g(x)}^{u}) - f(\overbrace{g(p)}^{u_p})}{g(x)-g(p)} \frac{g(x)-g(p)}{x-p}$$

$$= \lim_{u\to u_p} \frac{f(u)-f(u_p)}{u-u_p} \lim_{x\to p} \frac{g(x)-g(p)}{x-p}$$

$$= \boxed{f'(u_p)g'(p) = f'(g(p))g'(p).}$$

Se $g(x) = g(p)$ para valores de x arbitrariamente próximos a p, então $g'(p) = 0$ e $(f \circ g)'(p) = 0$ e a igualdade segue.

O argumento acima requer cuidado! Não podemos dividir por zero! Isto fica esclarecido com a proposição a seguir.

Proposição

Suponha g *derivável em* p*. Se para cada* $\delta > 0$ *existir* $x_\delta \in D_g$ *com* $0 < |x_\delta - p| < \delta$ *e* $g(x_\delta) = g(p)$*, então* $g'(p) = 0$*.*

Notação alternativa. Nas condições do Teorema 2 temos

$$\begin{cases} y = f(u) & \Longrightarrow \quad \dfrac{dy}{du} = f'(u) \\[2ex] u = g(x) & \Longrightarrow \quad \dfrac{du}{dx} = g'(x). \end{cases} \tag{2}$$

Por outro lado, $h(x) = f(g(x)) = f(u) = y$ ou seja $y = h(x)$.

Portanto

$$\frac{dy}{dx} = h'(x) = f'(g(x))g'(x). \tag{3}$$

Daí, substituindo (2) em (3), obtemos

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}, \quad \text{para todo } x \in D_g\,.}$$

Exemplo

Calcule a derivada de $h(x) = \cos(\sqrt{x})$.

Solução: Fazendo $u = g(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = \cos u$, então

$$h(x) = f(g(x)),\ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ f'(x) = -\mathrm{sen} x.$$

Pela Regra da Cadeia,

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = -\mathrm{sen}(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Observação: Ao aplicar a Regra da Cadeia derivamos primeiro a função de fora f e avaliamos na função de dentro $g(x)$ e então multiplicamos pela derivada da função de dentro.

Exemplo

Calcule a derivada de $h(t) = \ln(4t - 2)$.

Solução: Fazendo $g(t) = 4t - 2$ e $f(x) = \ln x$, então $h(t) = f(g(t))$, $g'(t) = 4$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Pela Regra da Cadeia,

$$h'(t) = f'(g(t))g'(t) = \frac{1}{4t-2}4 = \frac{4}{4t-2}.$$

Exemplo

Calcule a derivada de $f(x) = e^{ax}$.

Solução: $f'(x) = e^{ax} \cdot a$.

Exemplo

Calcule a derivada de $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(e^x))$.

Solução: $f'(x) = \cos(\cos(e^x)) \cdot (-\operatorname{sen}(e^x) \cdot e^x)$.

Exemplo

Seja $a > 0$ uma constante com $a \neq 1$. Então $(a^x)' = a^x \ln a$.

Solução: Escrevemos $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$ e pela Regra da Cadeia

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \frac{d}{dx}(x \ln a) = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Logo

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Exemplo

Se α uma constante e $x > 0$, então $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$.

Solução: Escrevemos $x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ e pela Regra da Cadeia

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \frac{d}{dx}e^{\alpha \ln x} = e^{\alpha \ln x}\frac{d}{dx}(\alpha \ln x) = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Logo

$$(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1} \text{ para todo } x > 0.$$

Regra da Potência combinada com a Regra da Cadeia: para qualquer número α e $g(x)$ diferenciável, temos

$$\frac{d}{dx}\left([g(x)]^{\alpha}\right) = \alpha[g(x)]^{\alpha-1}g'(x).$$

Exemplo

$$(a) \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} \Rightarrow y' = -\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{4}{3}}(2x+1)$$

$$(b) \quad y = \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^4 \Rightarrow y' = 4\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^3\left(\frac{(x^2+1)-(x+1)2x}{(x^2+1)^2}\right).$$

Outras aplicações da Regra da Cadeia: Suponha $g(x)$ derivável. Então

$$(a)\ [e^{g(x)}]' = e^{g(x)}g'(x), \qquad (b)\ [\ln g(x)]' = \frac{g'(x)}{g(x)},$$

$$(c)\ [\cos(g(x))]' = -g'(x)\,\mathrm{sen}(g(x)), \quad (d)\ [\mathrm{sen}(g(x))]' = g'(x)\cos(g(x))$$

Exemplo

$$(a)\ [e^{x^2}]' = e^{x^2}2x, \qquad (b)\ [\ln x^3]' = \frac{3x^2}{x^3},$$

$$(c)\ [\mathrm{sen}(x^5)]' = \cos(x^5)5x^4, \qquad (d)\ [\mathrm{sen}^5(x)]' = 5\mathrm{sen}^4(x)\cos(x).$$

Exemplo

Se f e g são funções deriváveis e $f(x) > 0$. Então $f(x)^{g(x)}$ é derivável e

$$[f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)}[g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x)].$$

Solução: Escrevemos

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Então,

$$[f(x)^{g(x)}]' = e^{g(x)\ln f(x)}[g(x)\ln f(x)]',$$

e portanto,

$$\begin{aligned}[f(x)^{g(x)}]' &= f(x)^{g(x)}[g(x)\ln f(x)]' \\ &= f(x)^{g(x)}[g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x)].\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a derivada de $f(x) = x^x$.

Solução: Escrevemos $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$ e aplicamos a Regra da Cadeia,

$$[x^x]' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x(\ln(x) + 1).$$

Cuidado - Potência & Exponenciais

Seja $a > 0$ e $a \neq 1$ uma constante. Então:

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$
2. $(a^x)' = a^x \ln(a)$
3. $([f(x)]^a)' = a[f(x)]^{a-1} f'(x)$
4. $\left(a^{f(x)}\right)' = \ln(a) a^{f(x)} f'(x)$
5. $[f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)}[g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x)]$