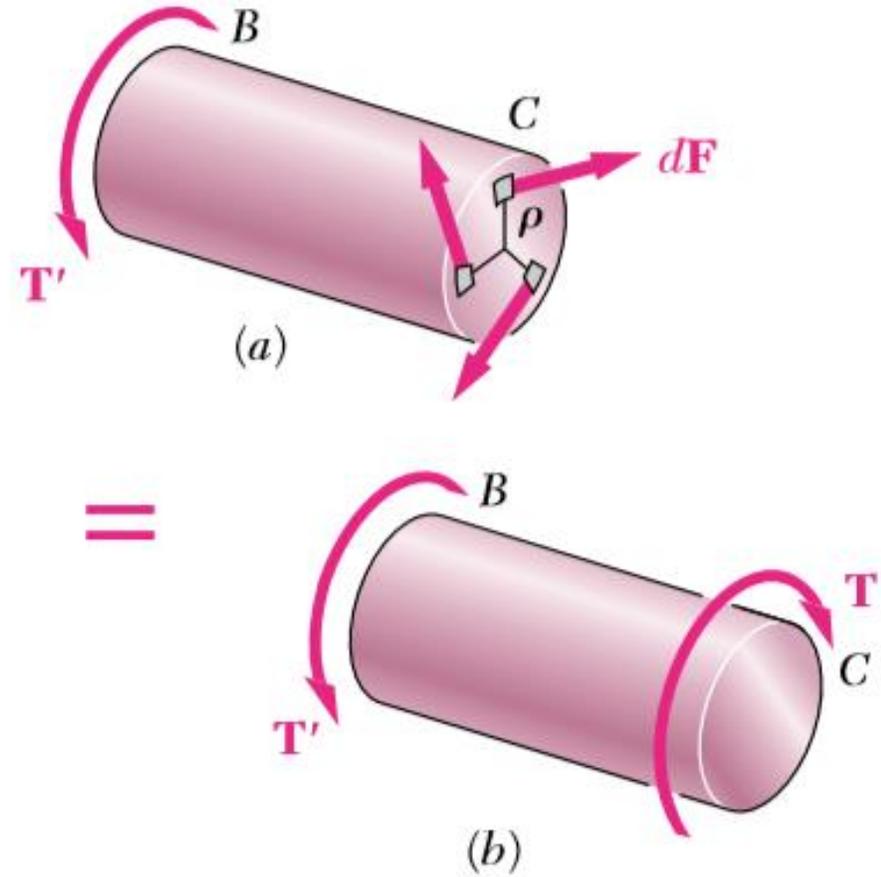
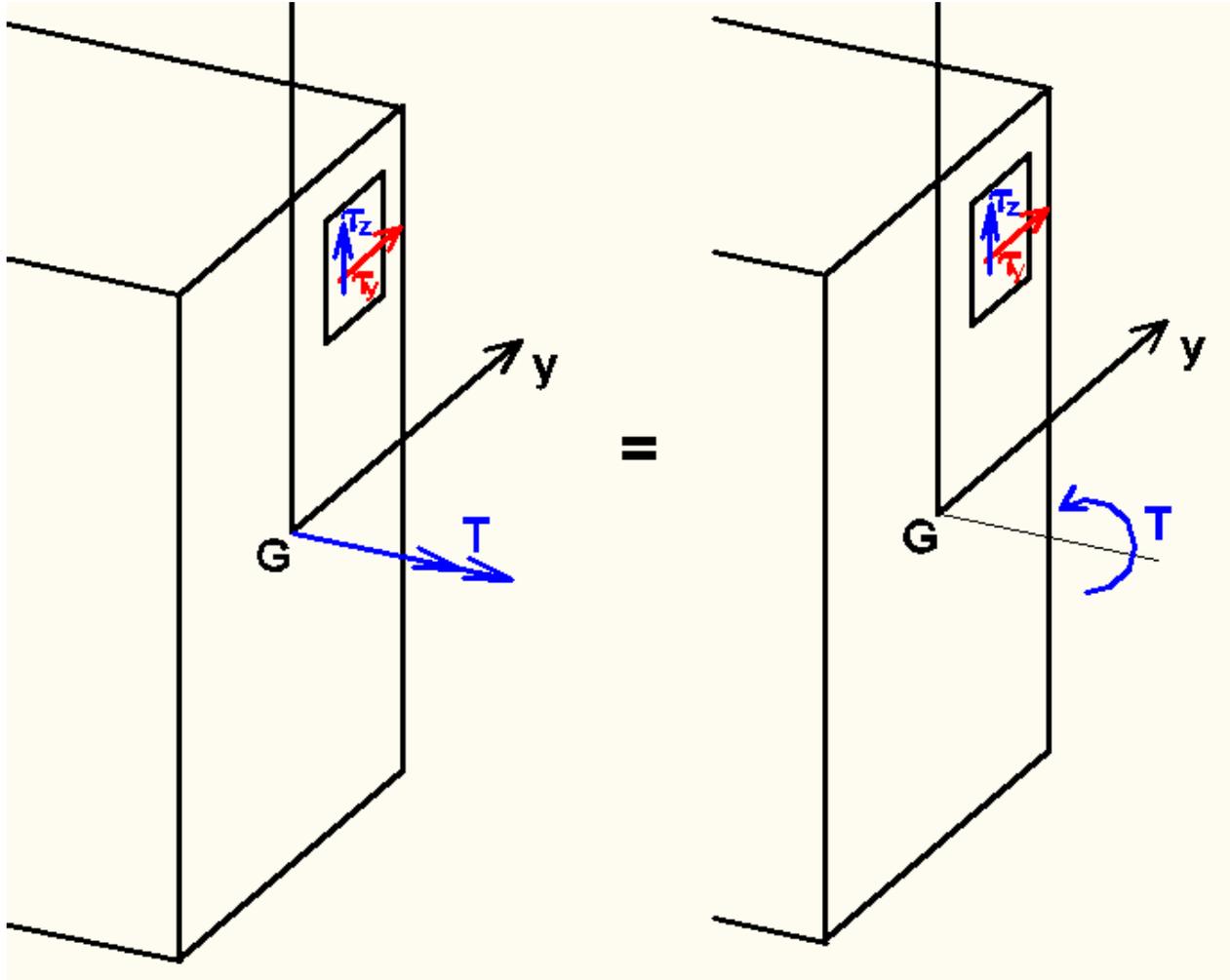




TORÇÃO EM EIXOS CIRCULARES

Valério S. Almeida
Maio/2021

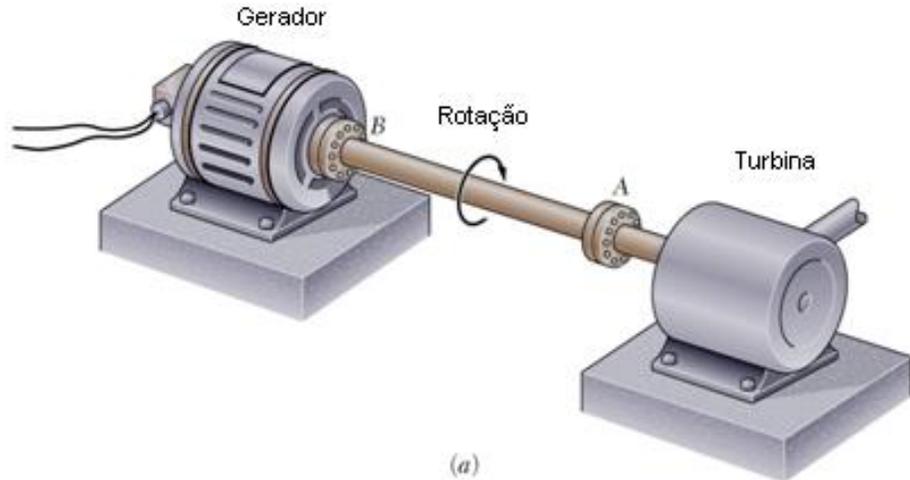
TORÇÃO EM EIXOS CIRCULARES



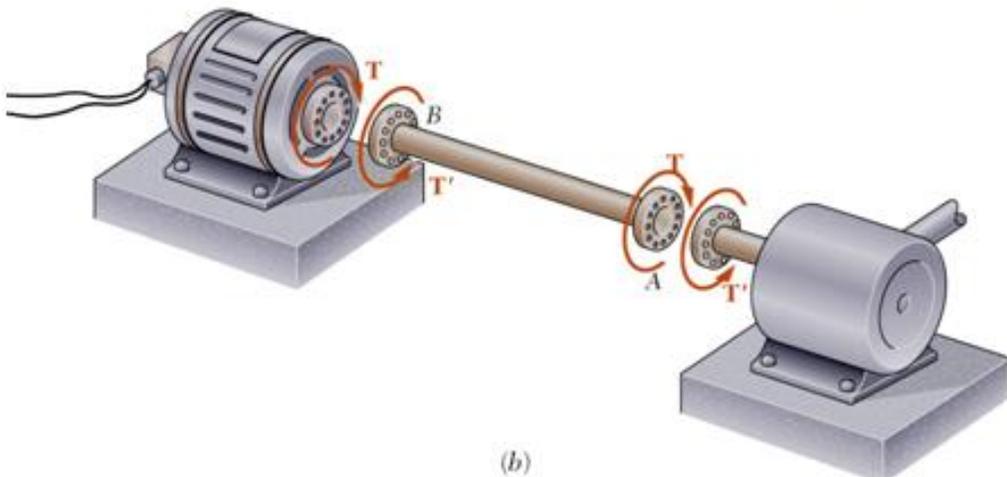
TORÇÃO EM EIXOS CIRCULARES

Hipóteses:

- seções planas permanecem planas ao eixo longitudinal;
- não há deformação longitudinal, não há o fenômeno de empenamento;
- as ações produzem uma rotação das seções transversais no eixo longitudinal (x);
- toda seção sofre uma rotação constante e de pequenos valores;

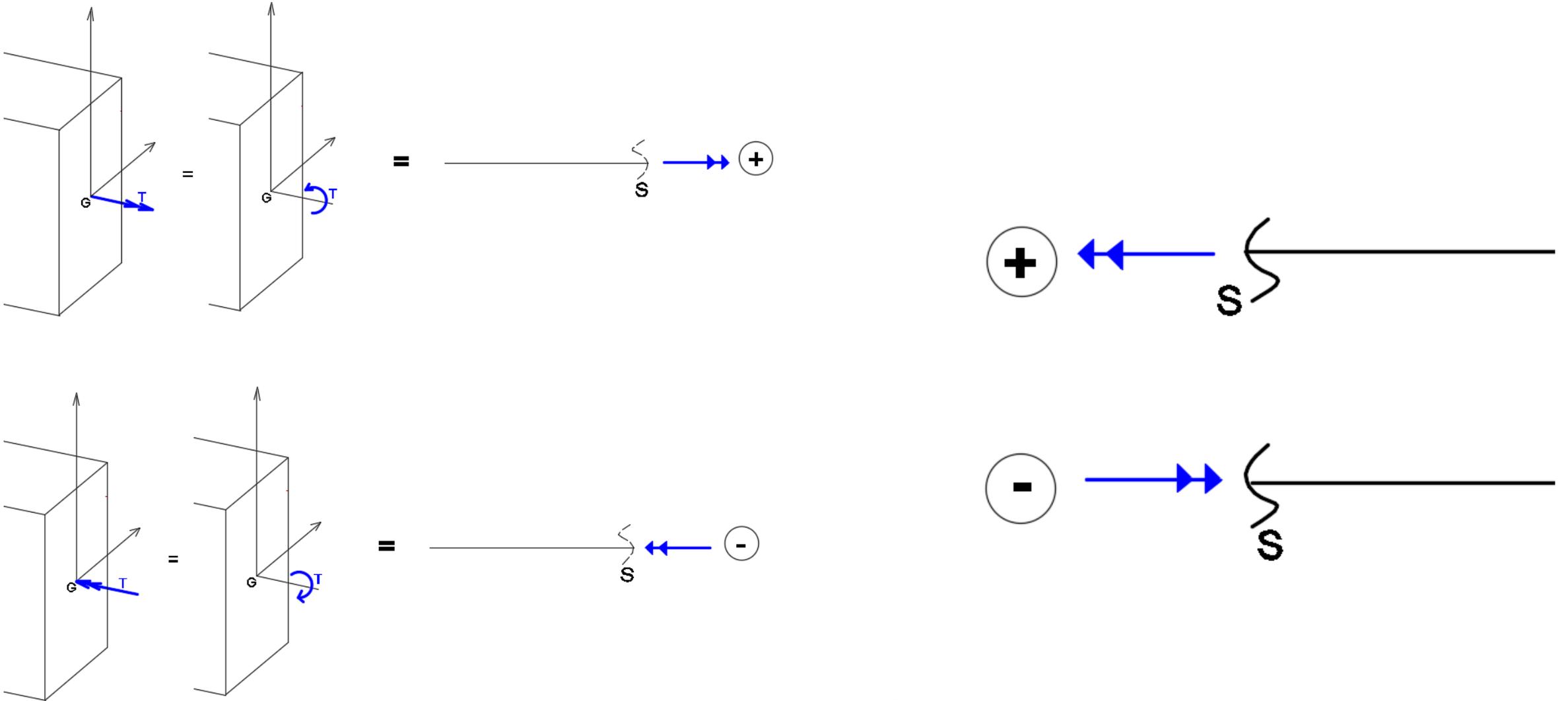


(a)



(b)

Diagramas de esforços - Convenção de sinais



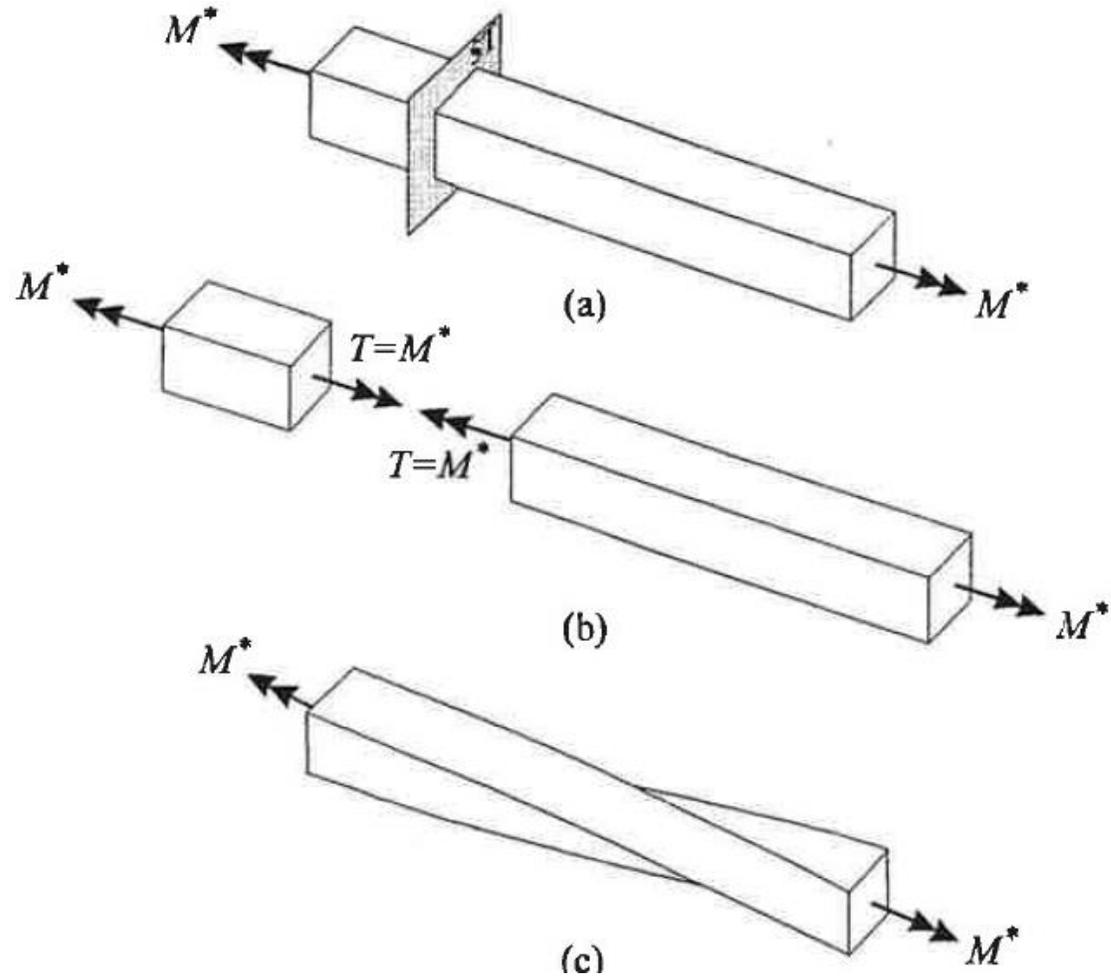
Momento de torção²

O vetor momento tem o sentido da normal externa à seção transversal em que atua

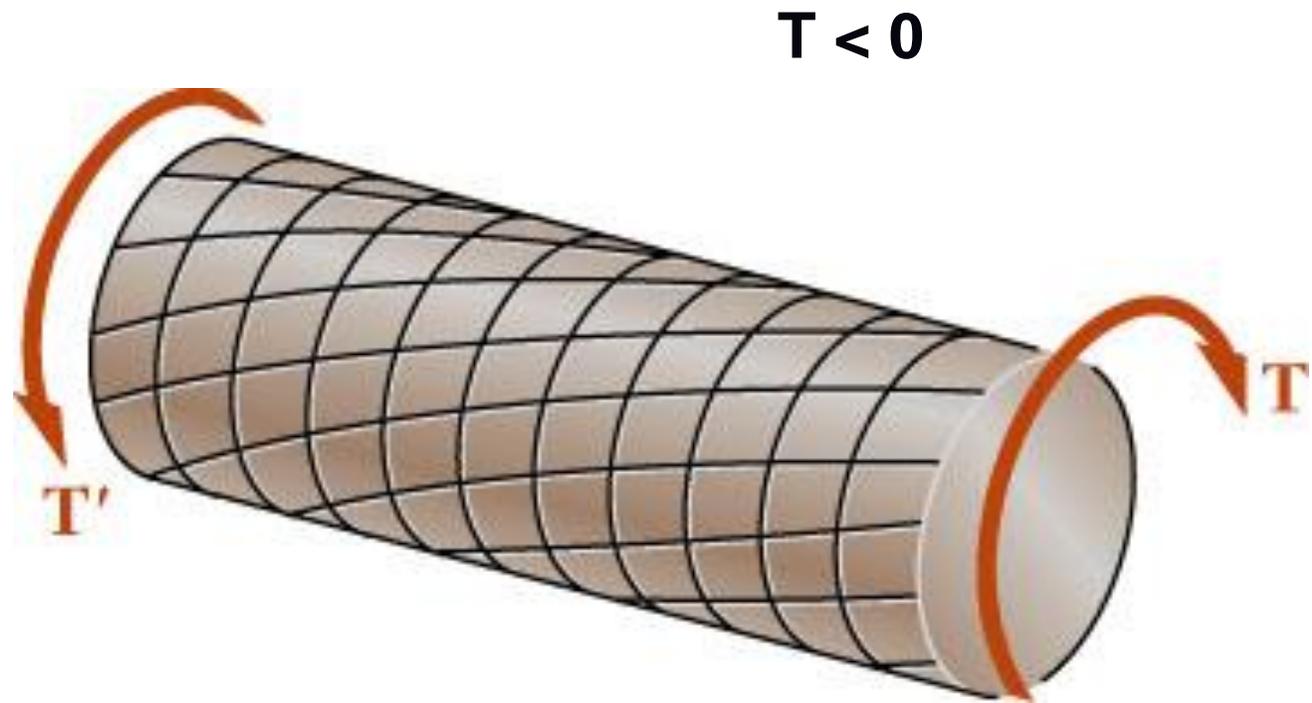
O vetor momento tem sentido contrário ao da normal externa à seção transversal em que atua

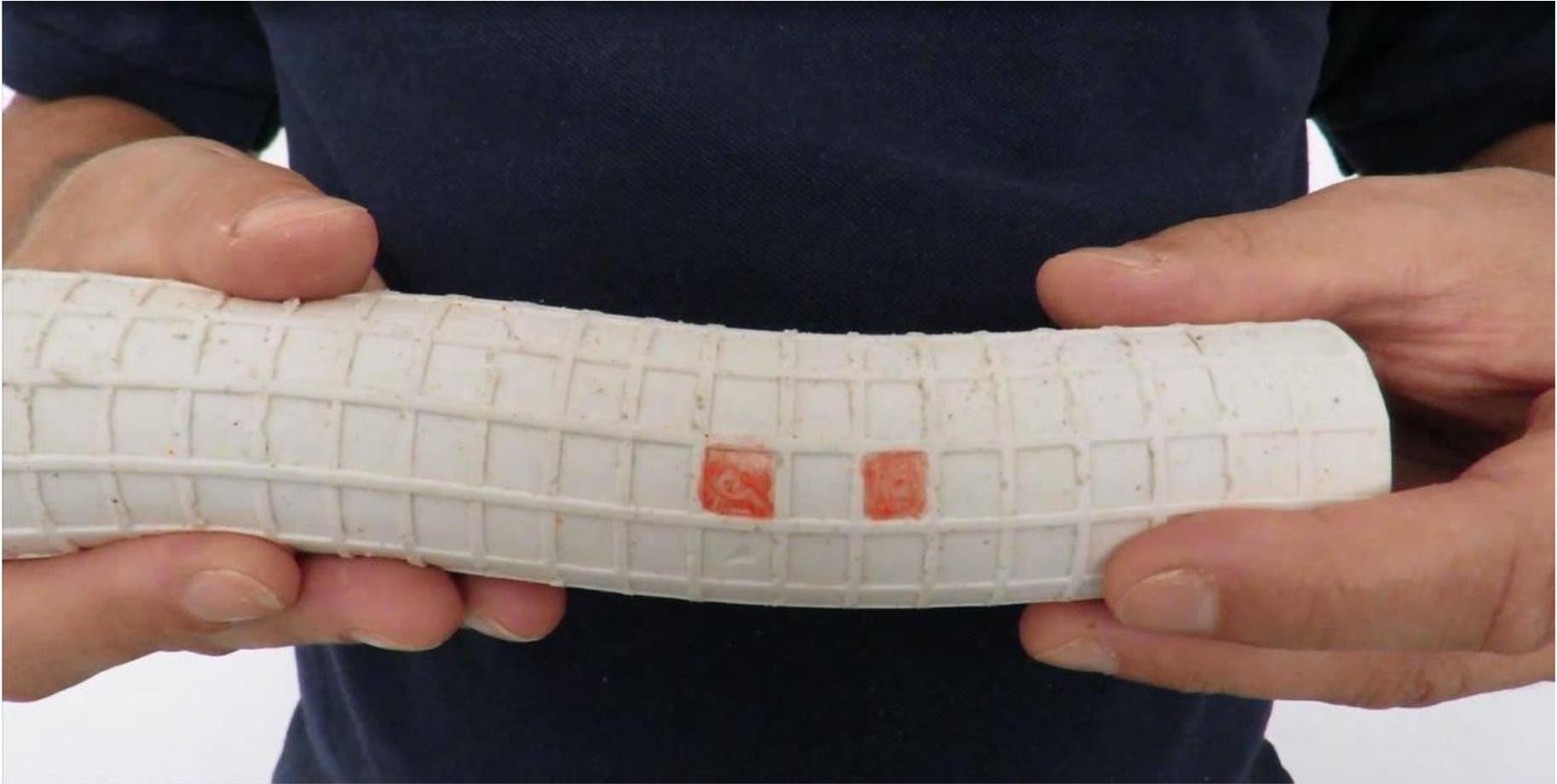
Rotacionar a seção no sentido anti-horário ($T > 0$)

Diagramas de esforços - Convenção de sinais

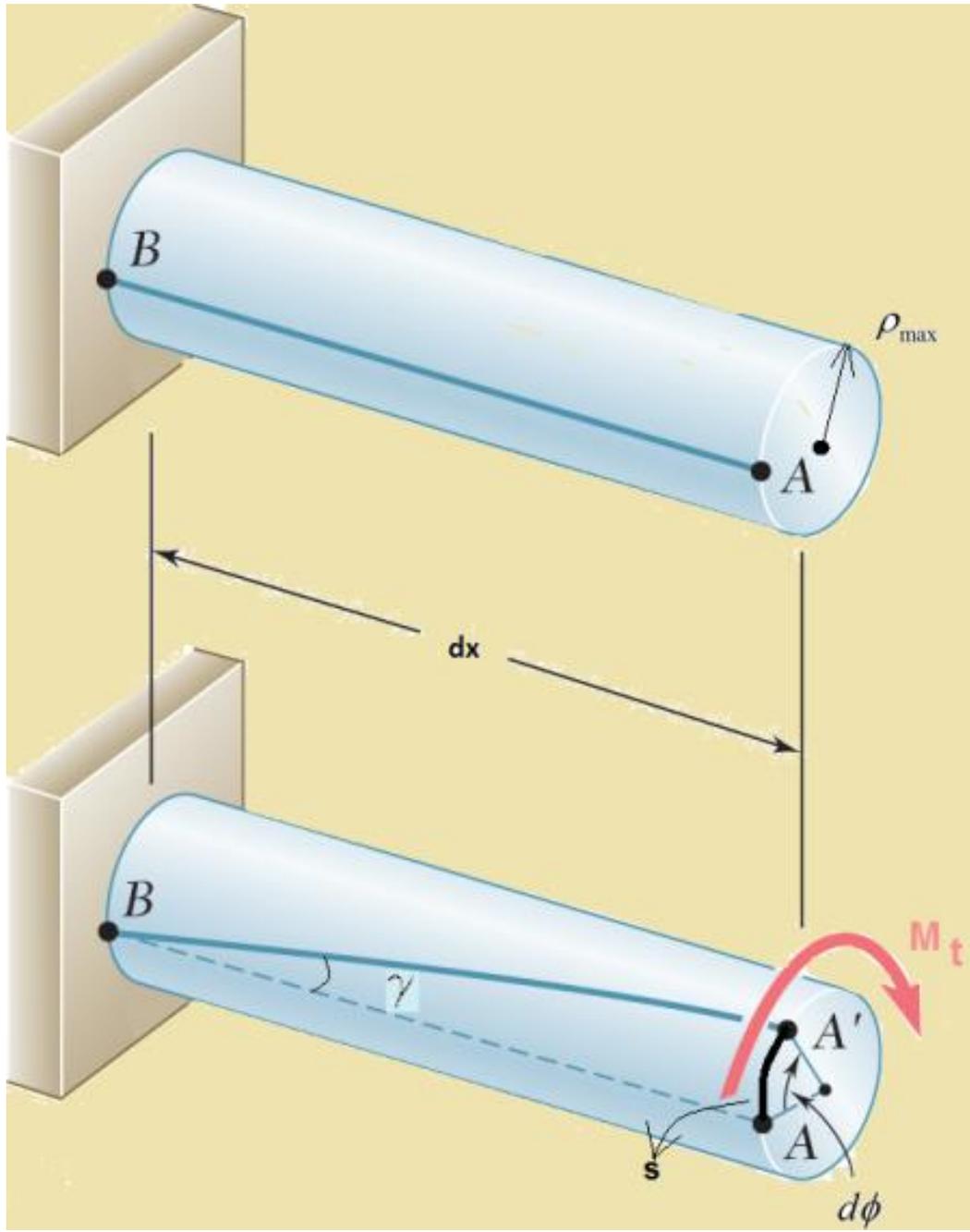


$T > 0$





Torção – Relação cisalhamento-ângulo



$$s = \gamma \cdot dx$$

$$s = \rho \cdot d\phi$$

$$\rho \cdot d\phi = \gamma \cdot dx \rightarrow \gamma = \frac{\rho \cdot d\phi}{dx}$$

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \frac{\rho \cdot d\phi}{dx}$$

ρ : distância radial da fibra

ϕ : rotação da seção

s : comprimento do arco

Torção – Cisalhamento-momento torçor

$$dM_t = \tau \cdot \rho \cdot dA$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = G \cdot \gamma = G \cdot \frac{\rho \cdot d\phi}{dx} \\ \rho \cdot d\phi = \gamma \cdot dx \rightarrow \gamma = \frac{\rho \cdot d\phi}{dx} \end{array} \right. \quad \frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma}{\rho}$$

$$M_t = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA = \int_A G \cdot \rho \cdot \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \rho \cdot dA = G \cdot \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \int_A \rho^2 \cdot dA$$

$$M_t = G \cdot \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \cdot J$$

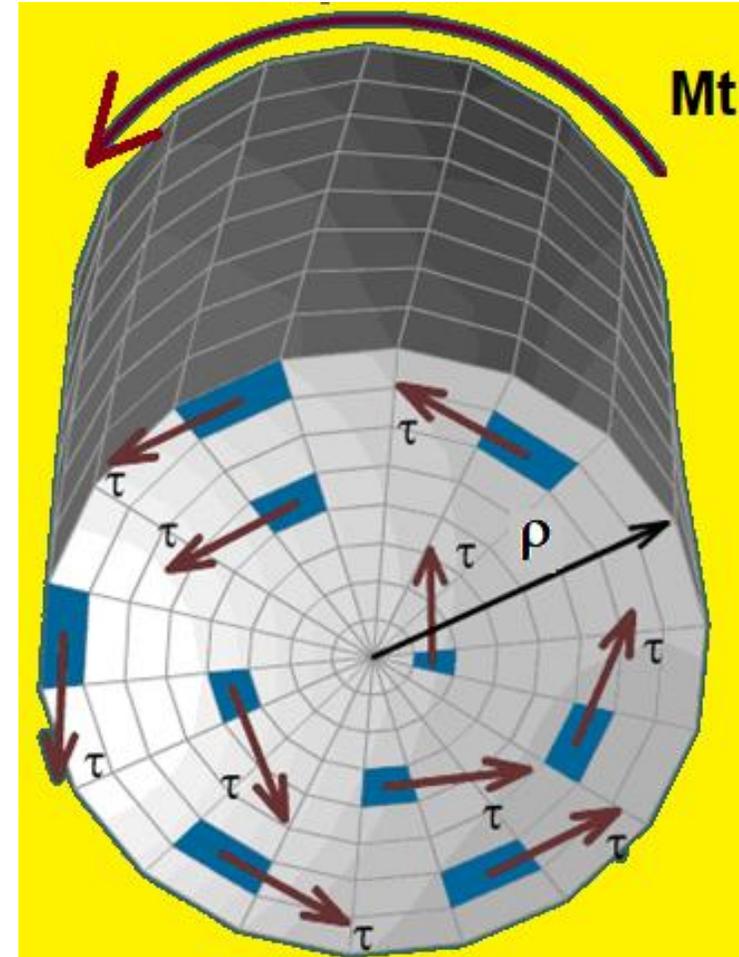


$$\tau = \frac{M}{J} \cdot \rho$$

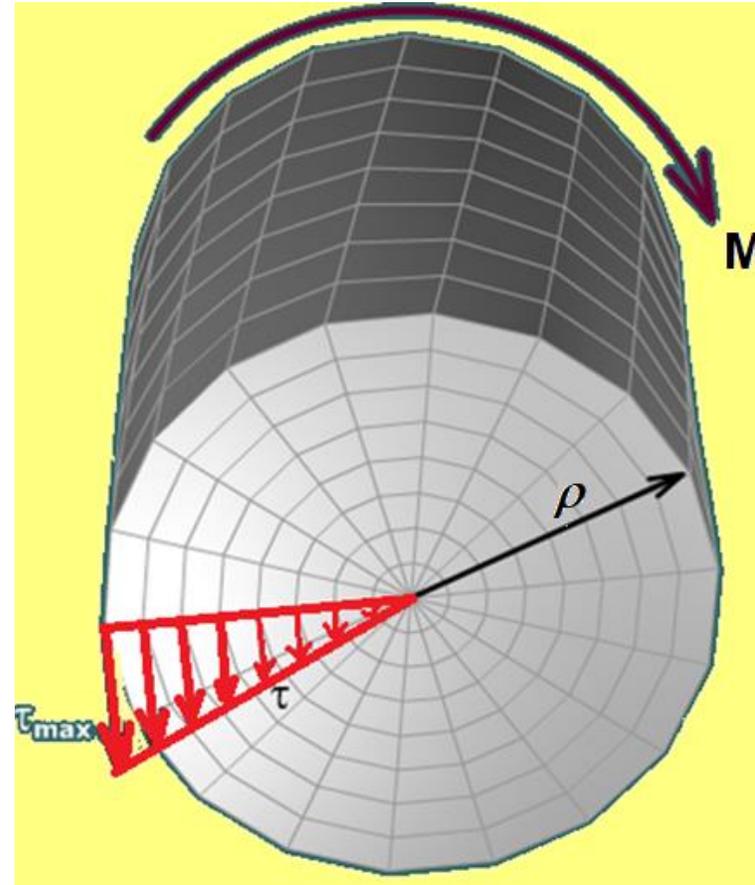
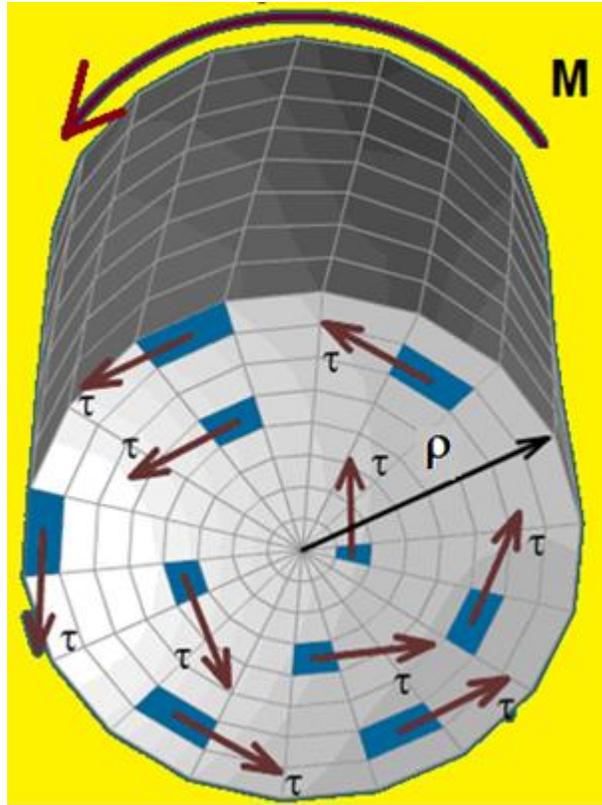
J : momento polar de inércia (propriedade geométrica da seção)

$$J = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

ρ : distância radial da fibra



Torção – Distribuição Cisalhamento



$$\tau = \frac{M}{J} \cdot \rho$$

Distribuição linear da tensão cisalhante

Tensão cisalhante máxima: fibras na borda da seção

$$\tau_{\max} = \frac{M}{J} \cdot \rho_{\max}$$

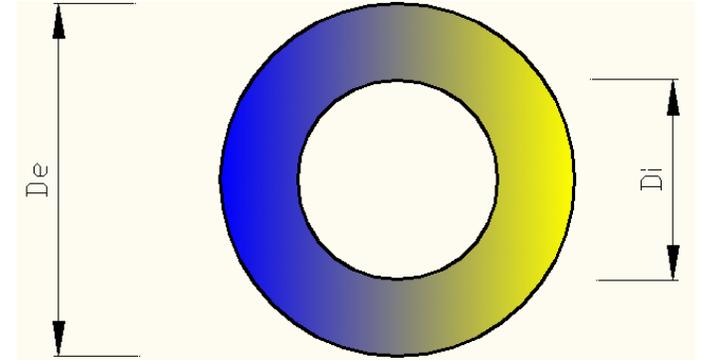
Torção – Momento Polar de Inércia (J)

Propriedade geométrica da seção: $J = \int_A \rho^2 \cdot dA$

Unidade: m^4, cm^4, mm^4

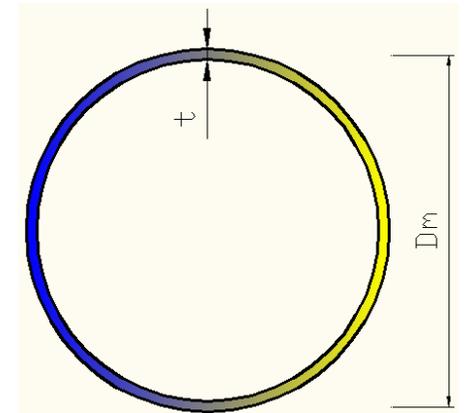
Seção vazada:

$$J = \frac{\pi \cdot (D_e^4 - D_i^4)}{32}$$



Tubo de parede fina, um cano, por exemplo:

$$t \ll D_m \rightarrow J = \frac{\pi \cdot D_m^3 \cdot t}{4}$$



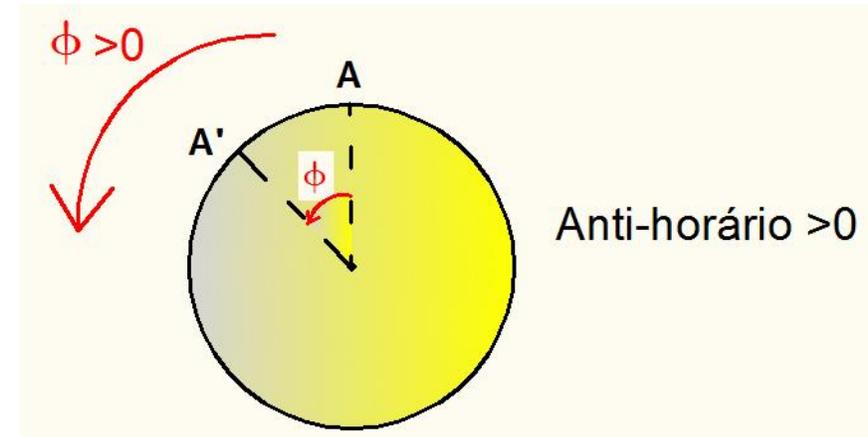
D_e e D_i : diâmetro externo e interno

D_m : diâmetro médio do tubo

t : espessura do cano

Torção – Equação da Rotação

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = \frac{M_t(x)}{G \cdot J} \xrightarrow{\int} \int_{x_0}^{x_1} \partial \phi(x) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{M_t}{G \cdot J} dx$$
$$\longrightarrow \phi(x_1) - \phi(x_0) = \frac{M_t \cdot (x_1 - x_0)}{G \cdot J} = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot J}$$
$$\longrightarrow \phi(x_1) = \phi(x_0) + \frac{M_t \cdot L}{G \cdot J}$$



$$\phi(x_j) = \phi(x_0) + \sum_{i=1}^j \frac{M_i \cdot L_i}{G_i \cdot J_i}$$

ϕ em radianos (adimensional)

Onde j é o número de trechos da peça estrutural onde M_i , G_i e J_i são constantes em cada trecho de comprimento L_i

M_t ou M_i : trecho do diagrama de torção, **com sinal**.

Torção – Projeto de eixos

Critério para dimensionar ou verificar o eixo:

$$\max(\tau_j) \leq \tau_{adm.} \longrightarrow \text{Critério de segurança}$$

$$\max(\phi_j) \leq \phi_{adm.} \longrightarrow \text{Critério de serviço}$$

τ : tensão solicitante,
depende das cargas,
geometria da seção

τ_{adm} : tensão admissível, propriedade
resistente do material

Unidades:

τ em MPa, kPa

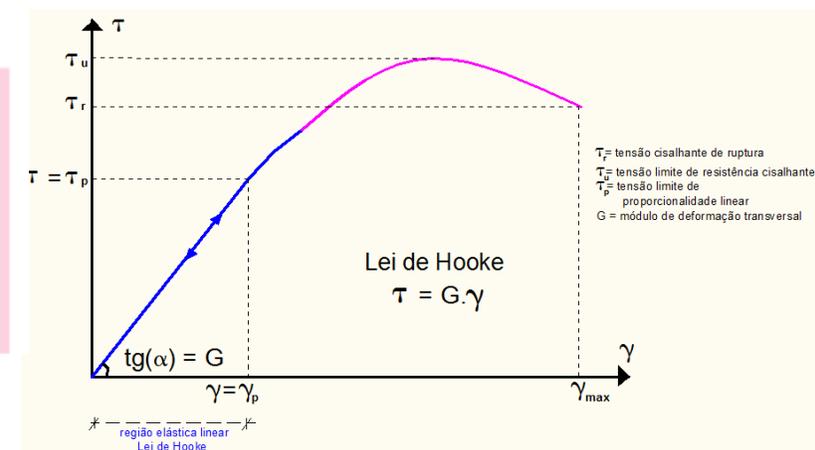
ϕ em radianos (adimensional)

Material	Densidade kg/m ³	Limite de resistência			Tensão de escoamento ³		Módulo de elasticidade, GPa	Módulo de elasticidade transversal, GPa	Coeficiente de expansão térmica, 10 ⁻⁶ /°F	Ductilidade, porcentagem de alongamento em 50 mm
		Tração, MPa	Compressão ² , MPa	Cisalhamento, MPa	Tração, MPa	Cisalhamento, MPa				
Aço										
Estrutural (ASTM-A36)	7860	400			250	145	200	77,2	11,7	21
Baixa liga e alta resistência										
ASTM-A709 Classe 345	7860	450				345	200	77,2	11,7	21
ASTM-A913 Classe 450	7860	550				450	200	77,2	11,7	17
ASTM-A992 Classe 345	7860	450				345	200	77,2	11,7	21
Temperado e revenido ASTM-A709 Classe 690	7860	760				690	200	77,2	11,7	18
Inoxidável, AISI 302										
Laminado a frio	7920	860	520				190	75	17,3	12
Recozido	7920	655	260			150	190	75	17,3	50
Aço de Reforço										
Média resistência	7860	480	275	200	77	11,7				
Alta resistência	7860	620	415	200	77	11,7				
Ferro fundido										
Ferro fundido cinzento 4,5% C, ASTM A-48	7200	170	655	240			69	28	12,1	0,5
Ferro fundido maleável 2% C, 1% Si, ASTM A-47	7300	345	620	330	230		165	65	12,1	10
Alumínio										
Liga 1100-H14 (99% Al)	2710	110		70	95	55	70	26	23,6	9
Liga 2014-T6	2800	455		275	400	230	75	27	23,0	13
Liga 2024-T4	2800	470		280	325		73		23,2	19
Liga 5456-H116	2630	315		185	230	130	72		23,9	16
Liga 6061-T6	2710	260		165	240	140	70	26	23,6	17
Liga 7075-T6	2800	570		330	500		72	28	23,6	11

 $\tau_{\text{escoamento}}$
 G

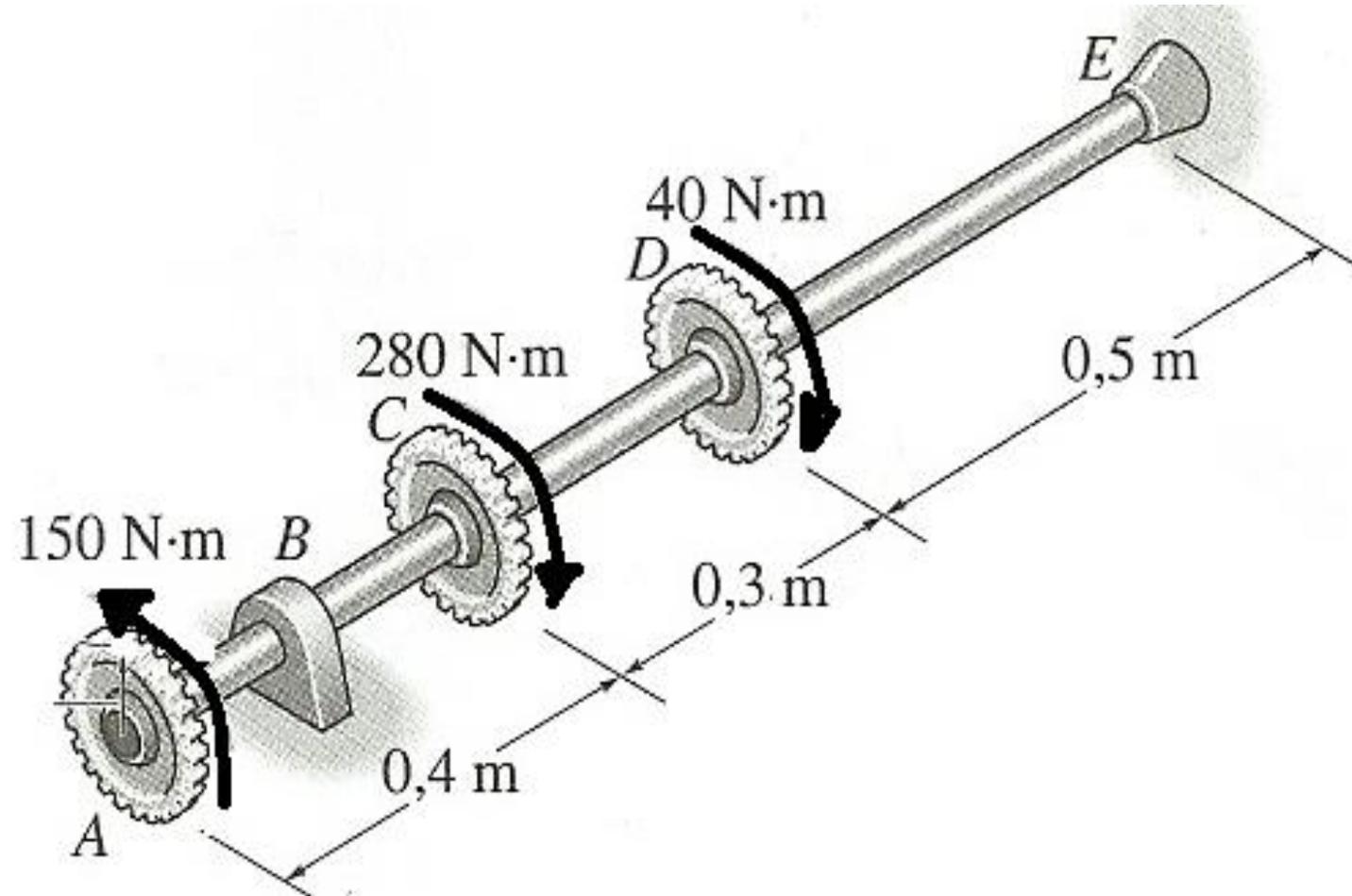
$$\tau_{\text{adm}} = \tau_{\text{escoamento}} / s$$

$\tau_{\text{escoamento}}$: propriedade resistente do material

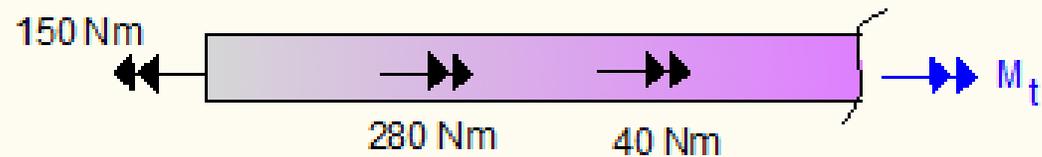
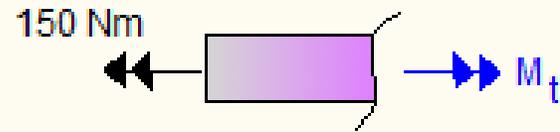
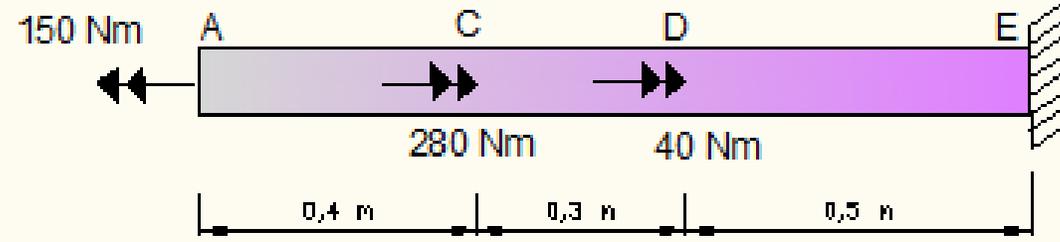


EXEMPLO 1

Engrenagens acopladas ao eixo de aço com a extremidade **E** fixa sujeitas aos torques mostrados. Adote $G = 80 \text{ GPa}$ e diâmetro de 14 mm . Determinar a máxima tensão cisalhante da estrutura e a rotação do eixo em **A**. O eixo gira livremente dentro do mancal em **B**.



EXEMPLO 1

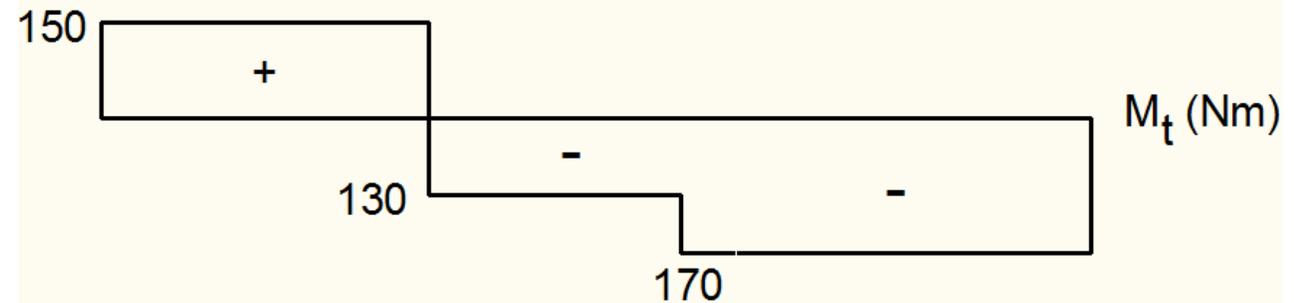


$$\sum M = 0 \longrightarrow M_t - 150 = 0 \rightarrow M_t = 150 Nm$$

$$\sum M = 0 \longrightarrow M_t - 150 + 280 = 0 \rightarrow M_t = -130 Nm$$

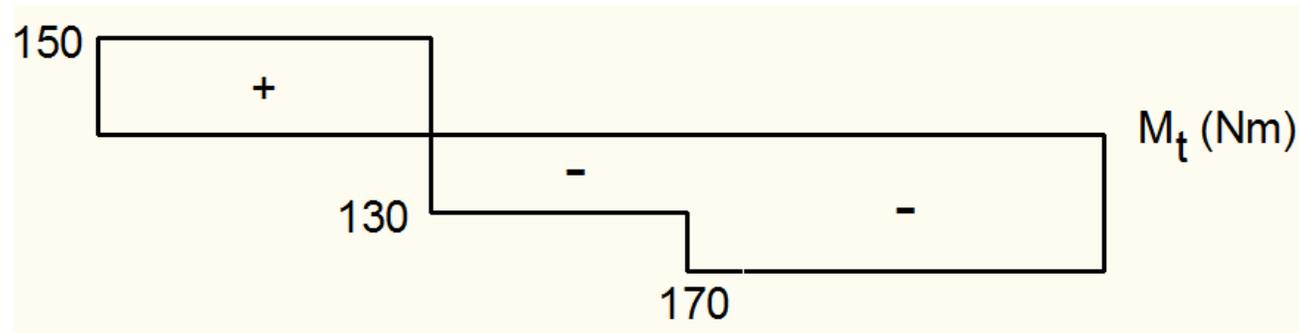
$$\sum M = 0 \longrightarrow M_t - 150 + 280 + 40 = 0 \rightarrow M_t = -170 Nm$$

a) Diagrama de torção



EXEMPLO 1

b) Análise de tensão:

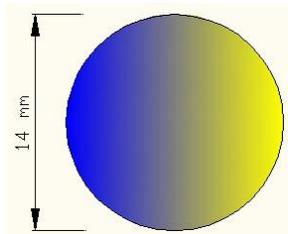


$$\tau_{\max} = \frac{M}{J} \cdot \rho_{\max}$$

$$J = \frac{\pi \cdot (D_e^4 - D_i^4)}{32}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{J} \cdot \rho_{\max} = \frac{170}{\frac{\pi \cdot (0,014)^4}{32}} \cdot \left(\frac{0,014}{2}\right)$$

$$\tau_{\max} = 315.525.834,7 \text{ Pa (N/m}^2\text{)}$$



$$\tau_{\max} = 315,5 \text{ MPa (MN/m}^2\text{)}$$

EXEMPLO 1

c) Cálculo de rotação em A:

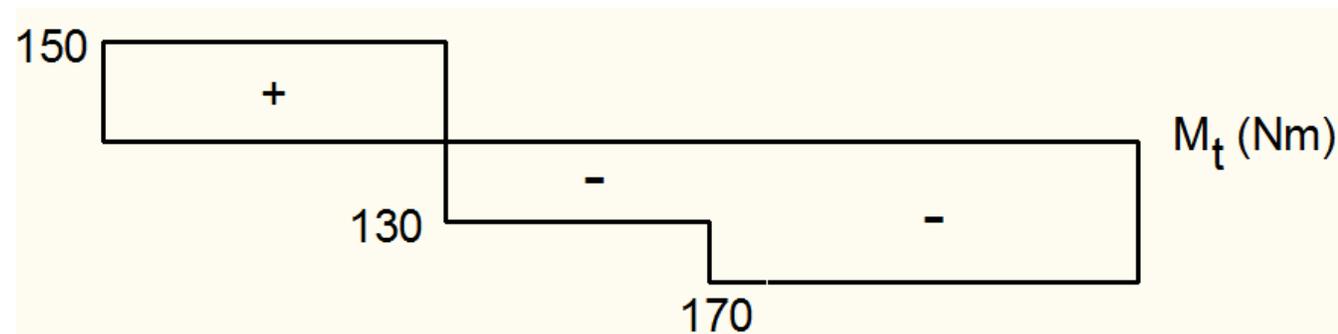
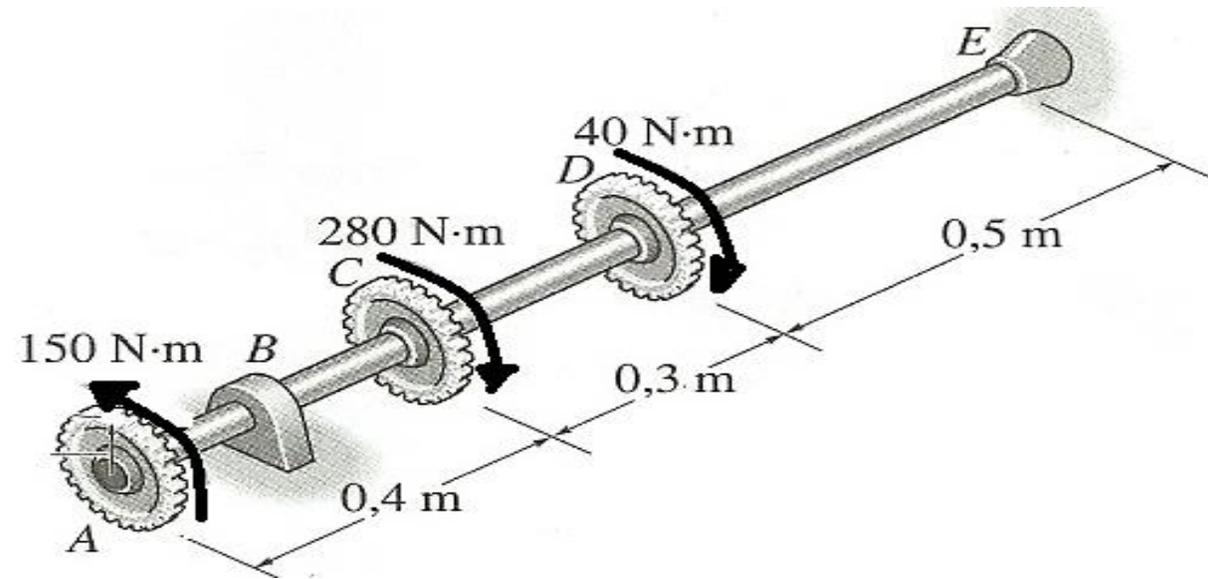
$$\phi(x_j) = \phi(x_0) + \sum_{i=1}^j \frac{M_i \cdot L_i}{G_i \cdot J_i}$$

$$\phi(A) = 0 + \left[\left(\frac{M_t \cdot L}{G \cdot J} \right)_{ED} + \left(\frac{M_t \cdot L}{G \cdot J} \right)_{DC} + \left(\frac{M_t \cdot L}{G \cdot J} \right)_{CA} \right]$$

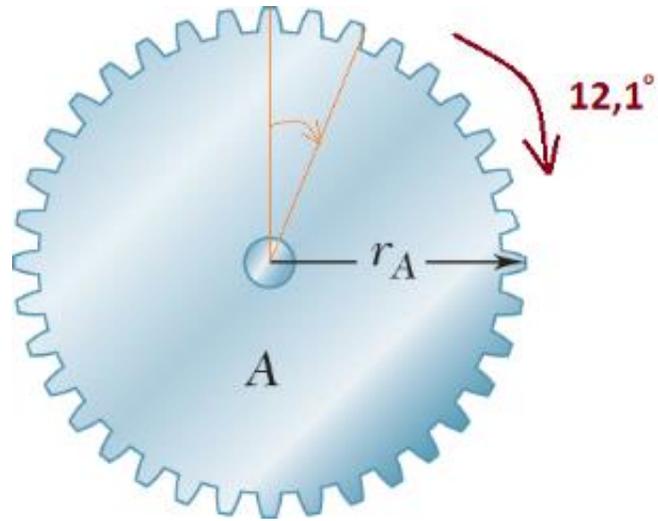
$$\phi(A) = 0 + \frac{1}{G \cdot J} [(M_t \cdot L)_{ED} + (M_t \cdot L)_{DC} + (M_t \cdot L)_{CA}]$$

$$\phi(A) = 0 + \frac{1}{G \cdot J} [(-170 \cdot 0,5)_{ED} + (-130 \cdot 0,3)_{DC} + (150 \cdot 0,4)_{CA}]$$

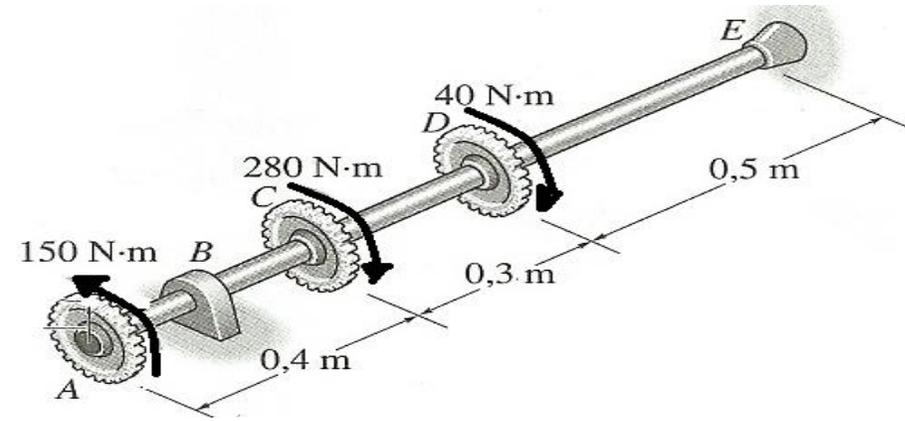
$$\phi(A) = 0 + \frac{-64}{80 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi(0,014)^4}{32}} = -0,21 \text{ rad } (-12,1^\circ)$$



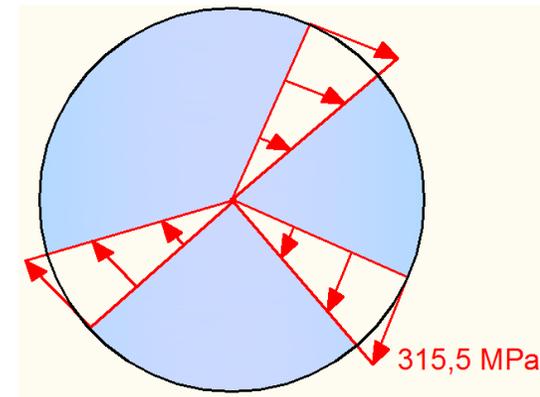
EXEMPLO 1



$$\phi(A) = -0,21 \text{ rad } (-12,1^\circ)$$



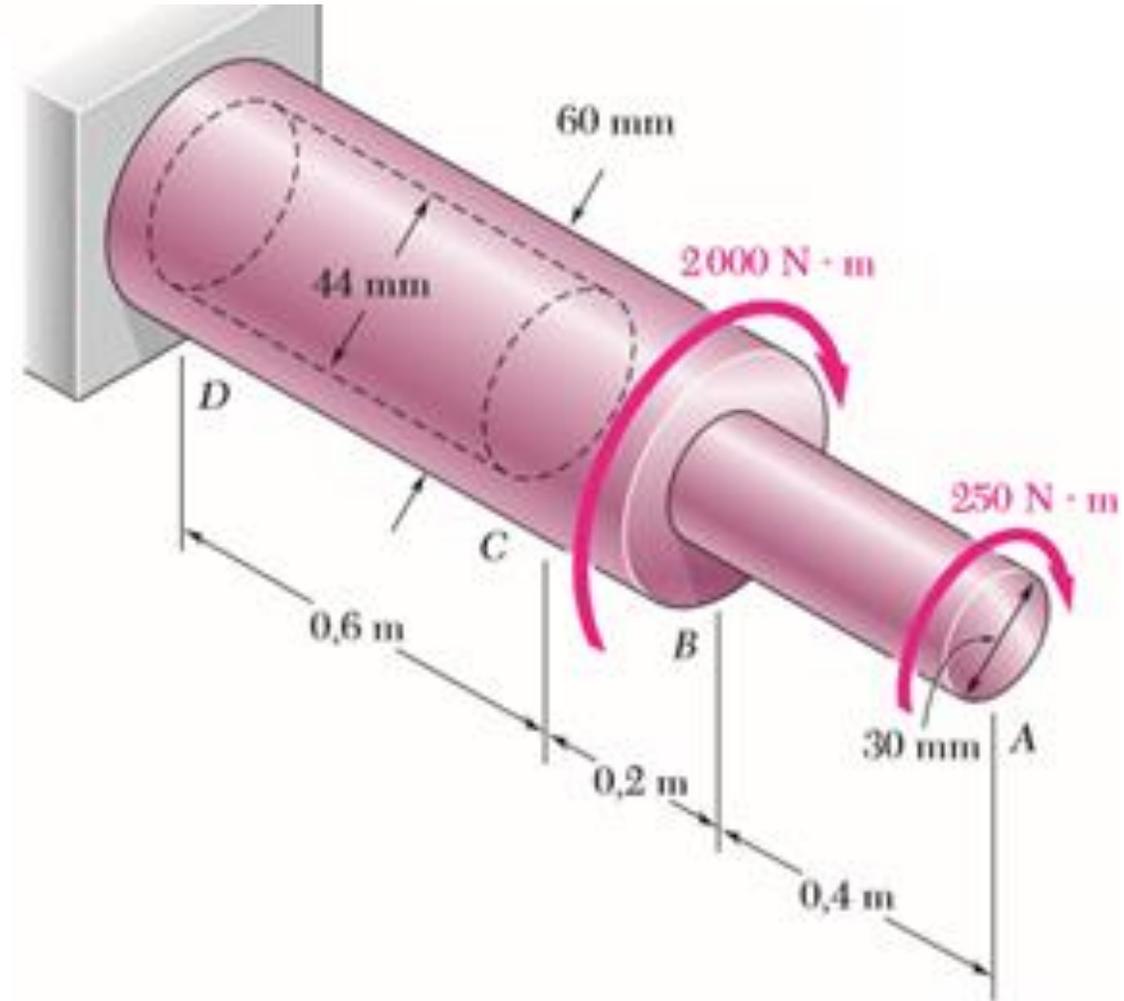
Máxima tensão: trecho DE



$$\tau_{\max} = 315,5 \text{ MPa } (MN/m^2)$$

EXEMPLO 2

O eixo horizontal AD está engastado a uma base rígida em D e submetido aos torques mostrados na figura. Foi feito um furo de 44 mm de diâmetro na parte CD do eixo. Sabendo que o eixo inteiro é feito de aço para o qual $G = 77 \text{ GPa}$, determine o ângulo de torção na extremidade A .



EXEMPLO 2

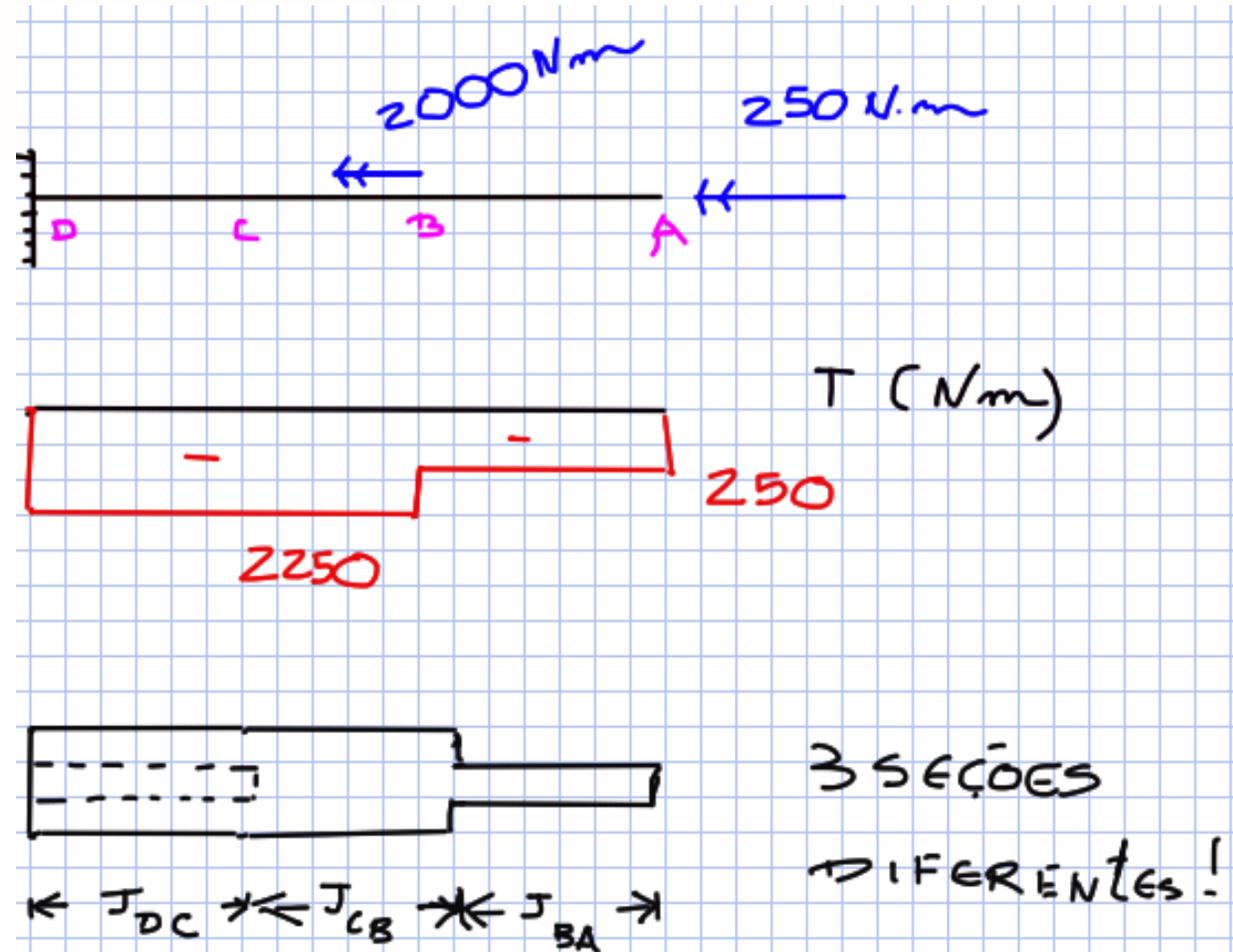
$$\Sigma M_x = 0: (250 \text{ N} \cdot \text{m}) - T_{AB} = 0 \quad T_{AB} = 250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Cortando agora o eixo em uma seção entre B e C , temos

$$\Sigma M_x = 0: (250 \text{ N} \cdot \text{m}) + (2000 \text{ N} \cdot \text{m}) - T_{BC} = 0 \quad T_{BC} = 2250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Como não é aplicado nenhum torque em C ,

$$T_{CD} = T_{BC} = 2250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

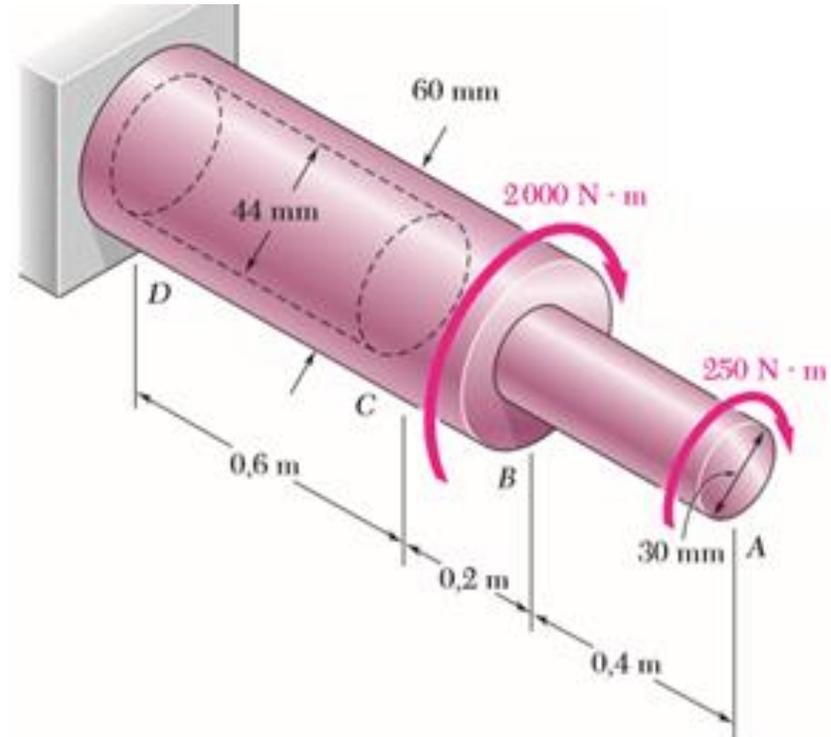


Momentos polares de inércia

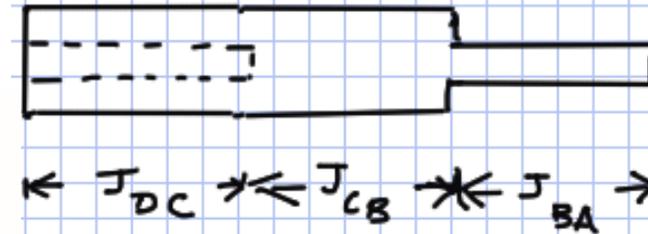
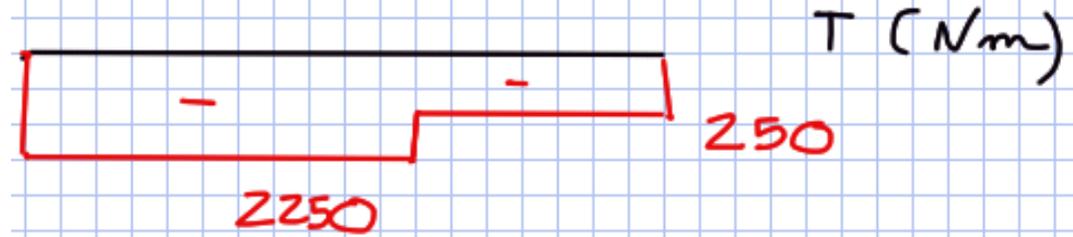
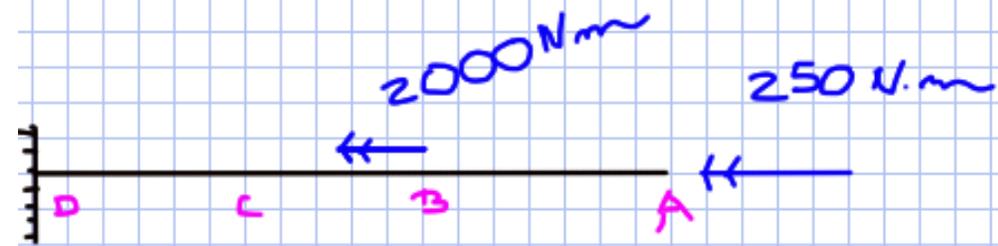
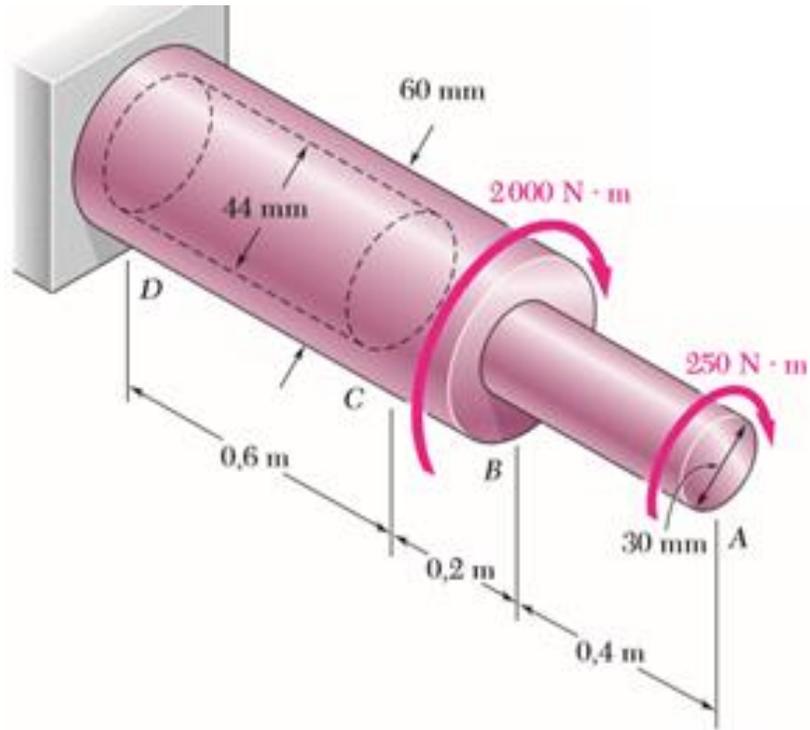
$$J_{AB} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0,015 \text{ m})^4 = 0,0795 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{BC} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0,030 \text{ m})^4 = 1,272 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{CD} = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} [(0,030 \text{ m})^4 - (0,022 \text{ m})^4] = 0,904 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



EXEMPLO 2



3 SEÇÕES
DIFERENTES!

$$\phi_A = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G} = \frac{1}{G} \left(\frac{T_{AB} L_{AB}}{J_{AB}} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{J_{BC}} + \frac{T_{CD} L_{CD}}{J_{CD}} \right)$$

$$\phi_A = \frac{1}{77 \text{ GPa}} \left[\frac{(250 \text{ N} \cdot \text{m})(0,4 \text{ m})}{0,0795 \times 10^{-6} \text{ m}^4} + \frac{(2250)(0,2)}{1,272 \times 10^{-6}} + \frac{(2250)(0,6)}{0,904 \times 10^{-6}} \right]$$

$$= - (0,01634 + 0,00459 + 0,01939) = - 0,0403 \text{ rad}$$

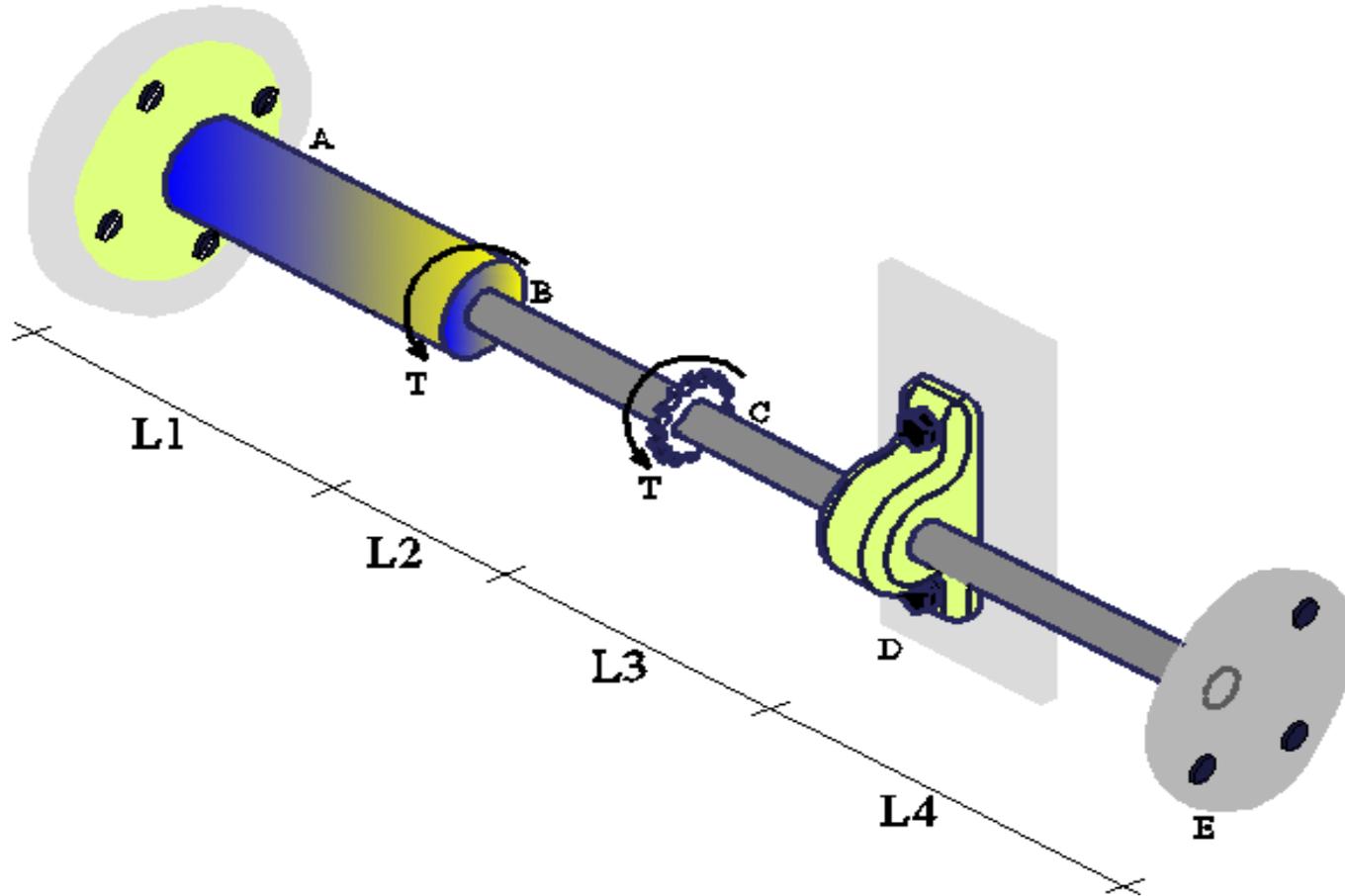
$$\phi_A = - (0,0403 \text{ rad}) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}}$$

$$\phi_A = - 2,31^\circ$$

(sentido horário)

EXEMPLO 3

Um eixo fixo em **A** e **E** com um mancal de giro livre em **D** está submetido aos torques **T** em **B** e na engrenagem **C**. Obtenha o máximo valor de **T** de modo a atender o critério de tensão admissível e limite máximo do ângulo de torção de 5° . Diâmetro do eixo $AB = 44 \text{ mm}$, eixo $BE = 22 \text{ mm}$, $L1 = L4 = 1500 \text{ mm}$, $L2 = L3 = 1000 \text{ mm}$, $\tau_{adm} = 80 \text{ MPa}$ e $G = 60 \text{ GPa}$.

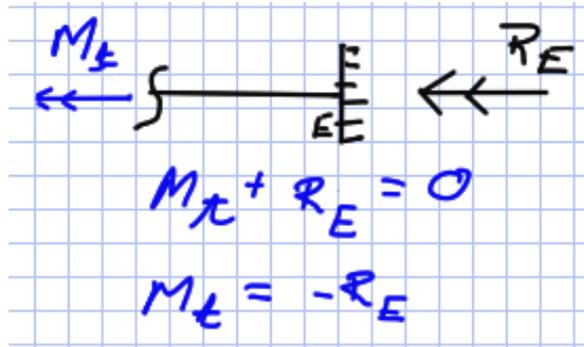


EXEMPLO 3

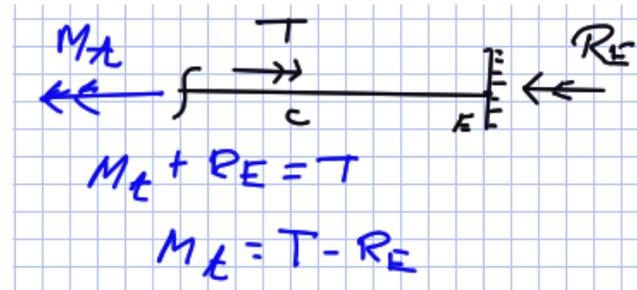
Problema hiperestático, obter diagrama em termos da reação em **E**

Duas incógnitas (R_A e R_E)
Uma equação: $\sum M_t = 0$
 $R_A + R_E = 2T$

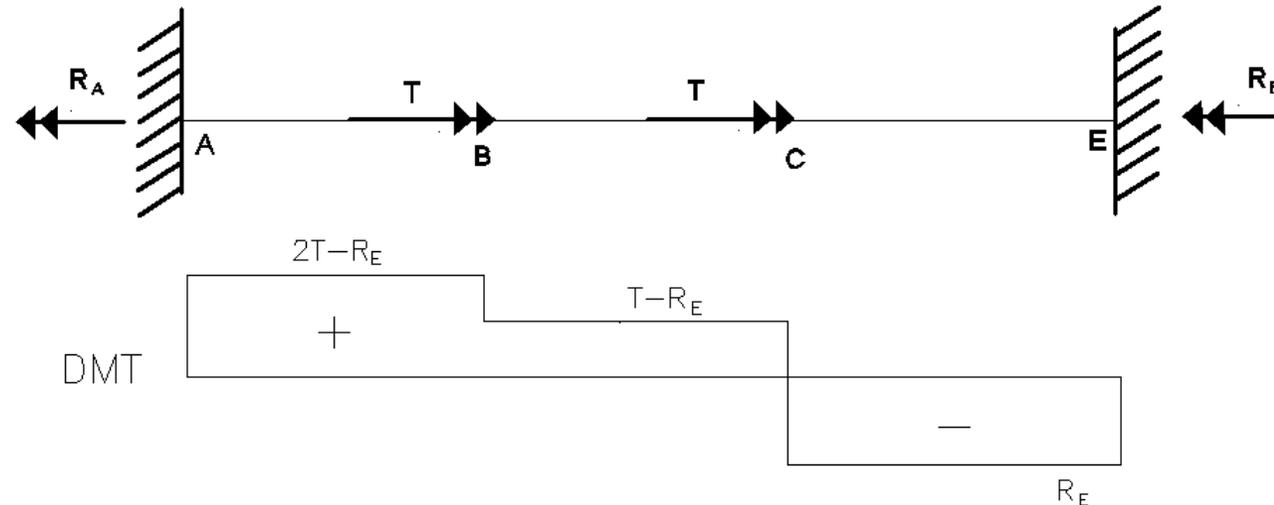
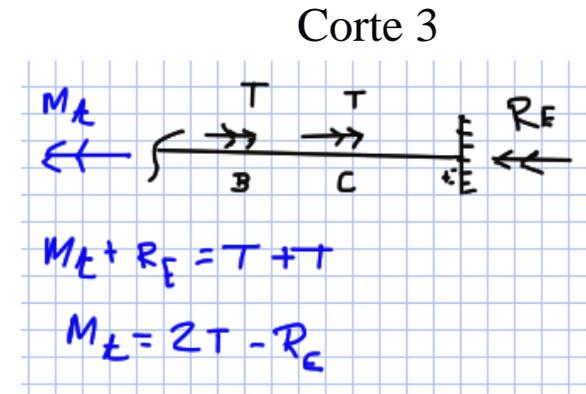
Inicialmente escrever o diagrama em termos da reação em **E**, assim:



Corte 1



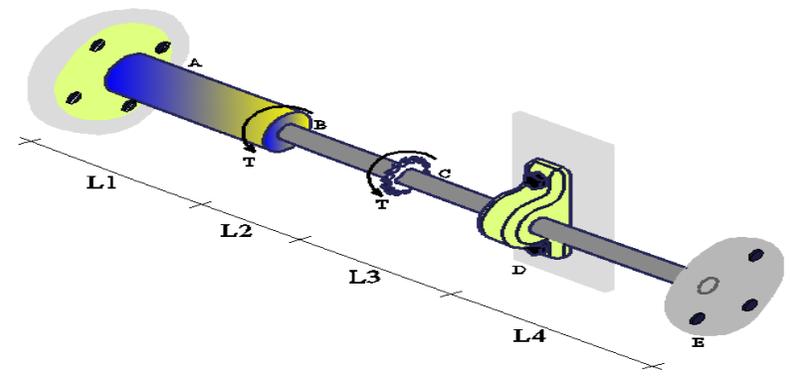
Corte 2



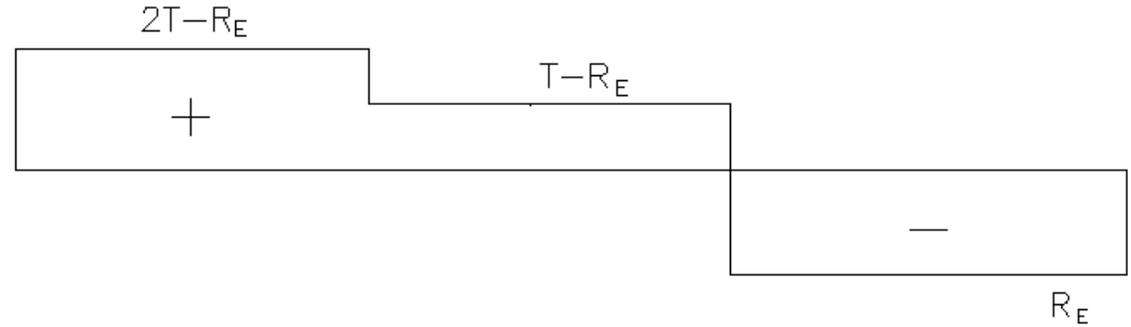
EXEMPLO 3

Necessário outra equação: Equação de coerência de deslocamento (rotação):

Seções **A** e **E** são fixas, indica que a rotação da seção em torno de seu eixo é **NULA**:

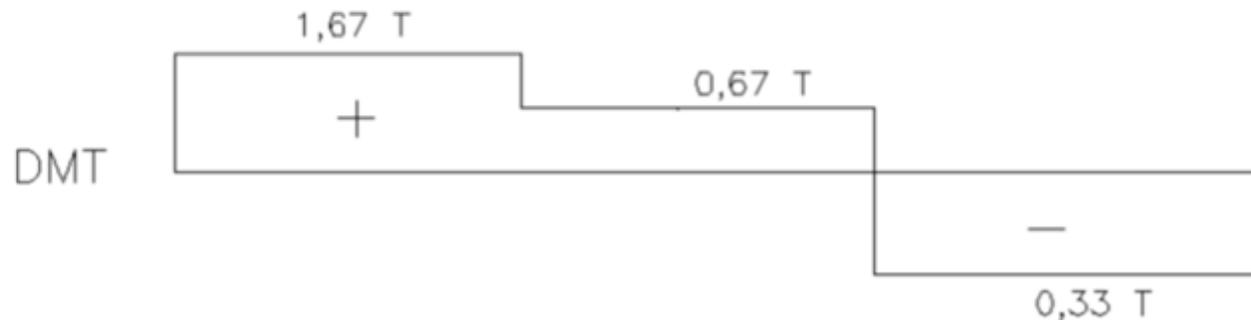


$$\phi_A = 0 \quad \text{e} \quad \phi_E = 0$$



$$\phi_E = \phi_A + \left(\frac{T.L}{G.I_p} \right)_{AB \rightarrow DE} = 0 + \frac{(2T - R_E).1,5}{G \frac{\pi.0,044^4}{32}} + \frac{(T - R_E).1,0}{G \frac{\pi.0,022^4}{32}} + \frac{(-R_E).2,5}{G \frac{\pi.0,022^4}{32}} = 0$$

$$R_E = 0,33.T$$



EXEMPLO 3

A verificação de tensão crítica deve ser feita nos trechos AB e BC:



A verificação de tensão crítica deve ser feita nos trechos AB e BC:

$$\tau_{AB} = \frac{1,67.T.0,022}{\frac{\pi.0,044^4}{32}} \leq \bar{\tau} = 80.10^3 \rightarrow T \leq 0,80 \text{ kN.m} \quad \tau_{BC} = \frac{0,67.T.0,011}{\frac{\pi.0,022^4}{32}} \leq \bar{\tau} = 80.10^3 \rightarrow$$

$$T \leq 0,25 \text{ kN.m}$$

$$\tau_{BC} = \frac{0,67.T.0,011}{\frac{\pi.0,022^4}{32}} \leq \bar{\tau} = 80.10^3 \rightarrow T \leq 0,25 \text{ kN.m}$$

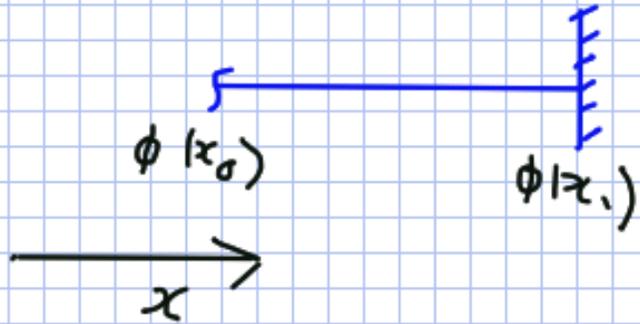
Verificação de rotação máxima.

$$\phi_C = \phi_A + \left(\frac{T.L}{G.I_p} \right)_{AB \rightarrow BC} = 0 + \frac{1,67.T.1,5}{60.10^6 \frac{\pi.0,044^4}{32}} + \frac{0,67.T.1,0}{60.10^6 \frac{\pi.0,022^4}{32}} \leq \frac{5\pi}{180}$$

$$T \leq 0,146 \text{ kN.m}$$

Portanto, $T = 14,6 \text{ kN.cm}$

EXEMPLO 3



$$\int_{x_0}^{x_1} d\phi(x) \rightarrow \phi(x_1) = \phi(x_0) + \frac{T \cdot L}{GJ}$$

$$\phi(x_0) = \phi(x_1) - \frac{T \cdot L}{GJ}$$

$$\phi(x_0 = C) = 0 - \frac{(-0,33T)(2,5)}{60 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{32} \cdot 0,022^4} \leq \frac{5\pi}{180^\circ}$$

$$T \leq 0,146 \text{ kNm}$$

Exercício a ser entregue até dia 10/06

+  Determinação do número de seu exercício a ser entregue até 10/06/21 

+ Vídeos de exercícios resolvidos - Diagramas de esforços solicitantes 

+  Portico Plano engastado - Diagramas 

+  Pórtico Plano com um trecho inclinado 

+  Viga bi apoiada com carga linear 

+ 2) Lista de exercícios de cargas axiais, deformações axiais e tensões em vasos de parede fina 

Exercícios fortemente recomendados para fazer dessa lista:

2;4;9;17;28;30;34;39

+  Lista de cargas axiais, tensões e deformações 

+  Determinação do número de seu exercício a ser entregue até 27/05/21 

+  Exercício de cargas axiais, tensões e deformações e vasos de paredes finas 

+ 3) Lista de exercícios de torção de seção circular 

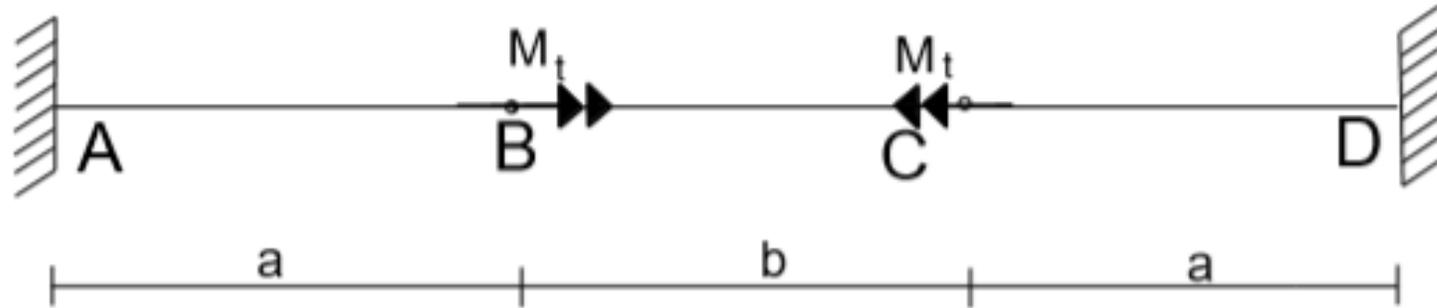
Exercícios fortemente recomendados para fazer dessa lista:

1;5;16;20;27

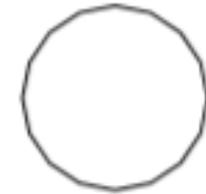
+  Lista de exercícios de torção de seção circular 

EXEMPLO 4

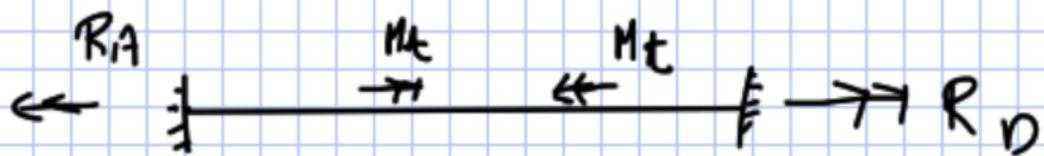
15. Considere-se um eixo biengastado, com momentos torçores M_t aplicados nos pontos B e C, veja figura. Admitindo-se que o valor de $G = 10\,000 \text{ kN/cm}^2$, determinar a relação a/b para que a capacidade do eixo seja máxima. Para a relação a/b obtida e sendo a tensão de cisalhamento admissível igual a 10 kN/cm^2 , determinar o valor de M_t .



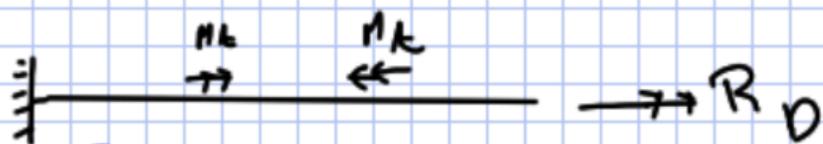
$$d = 8 \text{ cm}$$



EXEMPLO 4



Problema hiperestático: $\sum h.c \quad R_A = R_D$



$$\psi_D = \psi_A + \sum \frac{T_i l_i}{G_i J_i} = 0$$

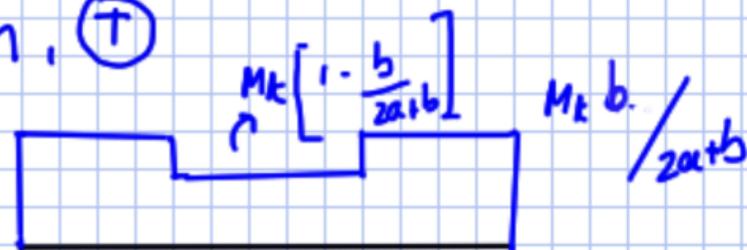
$$\psi_D = 0 + \left[\frac{R_D \cdot a}{GJ} + \frac{(R_D - M_k) \cdot b}{GJ} + \frac{R_D \cdot a}{GJ} \right] = 0$$

$$2R_D \cdot a + R_D \cdot b - M_k \cdot b = 0$$

$$R_D (2a + b) = M_k \cdot b$$

$$R_D = \frac{M_k \cdot b}{2a + b}$$

Assim, (T)



trechos AB e CD: $T = \frac{M_k \cdot b}{2a + b}$

trecho BC: $T = M_k \left[1 - \frac{b}{2a + b} \right]$

EXEMPLO 4

análise de tensões:

$$\tau_{AB} = \frac{T_{AB} \cdot \rho_{AB}}{J_{AB}} = \frac{\left(\frac{M_t \cdot b}{2atb} \right) \cdot D/2}{J} = \tau_{CD}$$

$$\tau_{CD} = \frac{T_{CD} \cdot \rho_{CD}}{J_{CD}} = \frac{M_t \left[1 - \frac{b}{2atb} \right] \cdot D/2}{J}$$

Para capacidade máxima, quer aproveitar ao máximo o material, assim, é ideal que as tensões solicitantes sejam iguais:

$$\tau_{AB} = \tau_{CD} = \tau_{CD}$$

$$\frac{\left(\frac{M_t \cdot b}{2atb} \right) \cdot D/2}{J} = \frac{M_t \left[1 - \frac{b}{2atb} \right] \cdot D/2}{J}$$

$$\frac{b}{2atb} = 1 - \frac{b}{2atb} \rightarrow \frac{b}{2atb} = \frac{2atb - b}{2atb}$$

$$b = 2a$$

$$a/b = 1/2$$

Obter M_t : $D = 8 \text{ cm } (\phi)$

$$\tau_{AB} = \tau_{CD} = \frac{\left(\frac{M_t \cdot b}{2atb} \right) \cdot D/2}{J}$$

$$\tau_{AB} = \left(\frac{M_t \cdot 2a}{2a+2a} \right) \frac{D/2}{J} = \frac{M_t D}{2 \cdot 2J}$$

$$\tau_{AB} = \frac{M_t D}{4J} = \frac{M_t \cdot 8}{4 \cdot \frac{\pi}{32} \cdot 8^4} \leq 10 \text{ kN/cm}^2$$

$$M_t \leq 2010,6 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

$$(M_t)_{\text{MAX}} = 2.010,6 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

Características geométricas