

## ALGUNS EXERCÍCIOS RELACIONADOS À OITAVA SEMANA

Todos exercícios abaixo são do Strang.

### 1. OS EXERCÍCIOS ABAIXO SÃO EXTRAS (SOBRE PRODUTO INTERNO)

**Exercício 1.** (Seção 3.4, Problema 21) Qual é a função mais próxima de  $a \cos(x) + b \sin(x)$  da função  $f(x) = \sin(2x)$  no intervalo  $-\pi$  a  $\pi$ . Qual é a linha  $c + dx$  mais próxima? Use  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ .

**Exercício 2.** (Seção 3.3, Problema 40) Se  $W = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , ache o (W-)produto interno de  $x = (2, 3)$  com  $y = (1, 1)$  e o (W-)tamanho de  $x$ . Quais vetores são W-paralelos a  $y$ ?

**Exercício 3.** (Seção 3.3, Problema 41) Ache a solução de MMQs por pesos para  $Ax = b$ , em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cheque que a projeção  $Ax$  é perpendicular (no produto interno de  $W$ ) ao erro  $b - Ax$ .

**Exercício 4.** (Seção 3.3, Problema 15).25. Qual é a linha reta que mais de aproxima da parábola  $y = x^2$ ? Use  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ .

### 2. ABAIXO SEGUEM ALGUNS EXERCÍCIOS DE REVISÃO

**Exercício 5.** (Capítulo 1, exercícios de revisão, Problema 5) Fatore as matrizes abaixo em  $A = LU$  ou  $PA = LU$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Exercício 6.** (Capítulo 1, exercícios de revisão, Problema 17) Ache a fatorização simétrica  $A = LDL^T$  de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

**Exercício 7.** (Capítulo 1, exercícios de revisão, Problema 18) Suponha que  $A$  é a matriz identidade 4 por 4 exceto pelo vetor  $v$  na coluna 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & v_3 & 1 & 0 \\ 0 & v_4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Fatore  $A$  em  $LU$ , assumindo  $v_2 \neq 0$ .

b) Ache  $A^{-1}$ . Observe que tem a mesma forma de  $A$ .

**Exercício 8.** (Capítulo 2, exercícios de revisão, Problema 22) a)  $Ax = b$  tem solução sob quais condições de  $b$  para as seguintes matrizes  $A$  e  $b$ ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

b) Ache uma base para  $N(A)$ .

c) Ache uma solução geral de  $Ax = b$ , quando a solução existe.

d) Ache uma base para  $C(A)$ .

e) Qual é o posto de  $A^T$ ?

**Exercício 9.** (Capítulo 2, exercícios de revisão, Problema 27) Ache bases para os quatro subespaços fundamentais de

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 4].$$

**Exercício 10.** (Capítulo 2, exercícios de revisão, Problema 33) Suponha que as matrizes em  $PA = LU$  sejam dadas abaixo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 9 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Qual é o posto de  $A$ ?
- Ache uma base para o espaço linha de  $A$ .
- Verdadeiro ou falso: As linhas 1, 2 e 3 de  $A$  são L.I.'s.
- Determine uma base para  $C(A)$ .
- Qual é a dimensão de  $N(A^T)$ ?
- Qual é a solução geral de  $Ax = 0$ ?

**Exercício 11.** (Capítulo 3, exercícios de revisão, Problema 33) a) Ache uma base ortonormal para  $C(A)$ , em que

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \\ 5 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

- Escreva  $A = QR$ , em que  $Q$  tem colunas ortonormais e  $R$  é quadrada e triangular superior.
- Ache via  $MMQ$  a solução de  $Ax = b$ , em que  $b = (-3, 7, 1, 0, 4)$ .

**Exercício 12.** (Capítulo 3, exercícios de revisão, Problema 35) Para resolver um sistema retangular  $Ax = b$ , substituímos  $A^{-1}$  (que não existe) por  $(A^T A)^{-1} A^T$  (que existe se as colunas de  $A$  forem L.I.). Mostre que  $B := (A^T A)^{-1} A^T$  é uma inversa à esquerda de  $A$  ( $BA = I$ ), mas não é uma inversa à direita. Na verdade, mostre que  $AB$  é apenas uma projeção ortogonal ( $(AB)^2 = AB$  e  $(AB)^T = (AB)$ ).