Aulas 13 e 14: Quociente

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1^o **Semestre de 2023 - Curso de Topologia**

Quociente

Vamos apresentar a topologia quociente.

A ideia é começar com uma família $\mathcal{F}$ de funções cujos domínios são espaços topológicos e o contradomínio é um mesmo conjunto X.

Daí definimos uma topologia sobre X de forma que todas essas funções sejam contínuas. Além disso, pedimos que essa topologia seja maximal com relação a tal propriedade.

Lembrar do outro caso, da topologia (menor) sobre X induzida por uma família de funções $f_\alpha : X \to (X, \tau_\alpha)$, $\alpha \in A$.

Quociente

Definição 1

Considere $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ uma família de funções, onde cada $f_i : Y_i \to X$, onde (Y_i, τ_i) é um espaço topológico. Chamamos de topologia forte em X induzida por $\mathcal{F}$ a maior topologia sobre X tal que cada f_i é contínua.

Primeiramente, note que não é tão claro que tal topologia existe de fato, uma vez que uniões de topologias não é necessariamente uma topologia.

Isso é resolvido com o próximo resultado - nele exibimos uma topologia (descrevendo quem são os abertos) e provamos que ela (é a única que) tem a propriedade acima.

Proposição 2

Seja $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ uma família de funções da forma $f_i : Y_i \to X$ onde cada (Y_i, τ_i) é um espaço topológico. Então $\tau = \{V \subset X : f_i^{-1}(V) \in \tau_i$ para todo $i \in I\}$ é a topologia forte sobre X.

Demonstração. Note que, de fato, τ é uma topologia sobre X. Note também que com relação a τ, toda f_i é contínua. Além disso, se ρ é uma topologia tal que cada f_i é contínua, então $\rho \subset \tau$.

Proposição 3

Seja $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ uma família de funções da forma $f_i : Y_i \to X$ onde cada (Y_i, τ_i) é um espaço topológico. Seja τ uma topologia sobre X. Então τ é a topologia forte induzida por $\mathcal{F}$ se, e somente se, vale o seguinte critério: dada $g : X \to Z$, onde Z é um espaço topológico, g é contínua se, e somente se, cada $g \circ f_i : Y_i \to Z$ é contínua.

$$\begin{tikzcd}
Y_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g \circ f_i"'] & X \arrow[d, "g"] \\
& Z
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Suponha τ a topologia forte. Vamos provar que vale o critério. Seja $g : X \to Z$. Se g é contínua, então $g \circ f_i$ é contínua simplesmente por composição de funções contínuas.

Agora suponha que cada $g \circ f_i$ é contínua. Vamos mostrar que g é contínua. Seja V aberto em Z. Então, por continuidade, $(g \circ f_i)^{-1}(V)$ é aberto em Y_i para todo $i \in I$. Ou seja, $f_i^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)$ é aberto para todo $i \in I$. Pelo resultado anterior, obtemos que $g^{-1}(V)$ é aberto, como queríamos.

Agora suponha que o critério é verdadeiro. Vamos mostrar que τ é a topologia forte.

Note que $Id : X \to X$ é uma função contínua. Logo, pelo critério, cada $f_i = Id \circ f_i$ é contínua. Pela maximalidade, temos que τ está contida na topologia forte. Considere novamente a função $Id : X \to X$, mas considere no X da imagem a topologia forte. Assim, cada $f_i = Id \circ f_i$ é contínua. Logo, pelo critério, Id é contínua. Desta forma, a topologia forte está contida em τ como queríamos.

A aula 13 terminou aqui!

Uma aplicação dessa técnica é a topologia quociente.

Definição 4

Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\sim$ uma relação de equivalência (reflexiva, simétrica, transitiva) sobre X. Chamamos de topologia quociente sobre $X/\sim$ a topologia forte induzida pela família $\{\pi\}$ onde $\pi : X \to X/\sim$ é a função projeção - isto é, $\pi(x) = \tilde{x}$, onde $\tilde{x} = \{y \in X : x \sim y\}$.

Automaticamente, pelos resultados anteriores, obtemos:

Corolário 5

Sejam (X, τ) espaço topológico e $\sim$ uma relação de equivalência sobre X. Então a topologia quociente sobre $X/\sim$ é o conjunto $\left\{V \subset X/\sim \ : \ \pi^{-1}(V) \in \tau\right\}$.

Corolário 6

Sejam (X,τ) *espaço topológico e* $\sim$ *uma relação de equivalência sobre* X*. Seja* ρ *uma topologia sobre* $X/\sim$*. Então* ρ *é a topologia quociente se, e somente se, vale o seguinte critério:* $g : X/\sim \to Z, g$ *é contínua se, e somente se,* $g \circ \pi$ *é contínua.*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "g \circ \pi"'] & X/\sim \arrow[d, "g"] \\
& Z
\end{tikzcd}
$$

Exemplo 7

Considere (X, τ) *espaço topológico. Defina* $x \sim y$ *para* $x, y \in X$ *se, para todo* $V \in \tau$

$$x \in V \text{ se, e somente se, } y \in V.$$

Note que, de fato, $\sim$ *é uma relação de equivalência sobre* X*.*

Vejamos que $X/\sim$ é um espaço T_0.

Passo 1: A projeção π é uma aplicação aberta.

Lembrar: uma aplicação é aberta se leva abertos em abertos.

Note que para isso é suficiente mostrar que $\pi^{-1}(\pi(V)) = V$ para todo $V \in \tau$.

Sempre vale $V \subset \pi^{-1}(\pi(V))$.

Para a outra inclusão, seja a tal que $\pi(a) \in \pi(V)$. Ou seja, existe $v \in V$ tal que $a \sim v$. Logo, como $v \in V$, temos que $a \in V$ como queríamos.

$X/\sim$ é um espaço T_0

Sejam $\tilde{x}, \tilde{y} \in X/\sim$ com $\tilde{x} \neq \tilde{y}$. Sem perda de generalidade, existe V aberto tal que $x \in V$ e $y \notin V$. Assim $\pi(V)$ é aberto em $X/\sim$, $\tilde{x} \in \pi(V)$ e $\tilde{y} \notin \pi(V)$ ($\tilde{y} = \pi(z) = \tilde{z}$ para algum z em V implicaria $y \in V$).

Podemos identificar quando um espaço pode ser visto como quociente de outro espaço.

Proposição 8

Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos e $f : X \to Y$ sobrejetora. Se, para cada $V \subset Y$, vale $V \in \rho$ se, e somente se, $f^{-1}(V) \in \tau$, então existe uma relação de equivalência $\sim$ sobre X e $\varphi : Y \to X/\sim$ homeomorfismo tal que $\pi = \varphi \circ f$.

Demonstração. Defina $a \sim b$ se $f(a) = f(b)$. Note que isso é uma relação de equivalência sobre X. Daí basta tomar φ dada por $\varphi(y) = \tilde{x}_y$ onde $x_y \in X$ é tal que $f(x_y) = y$.

Note que $\varphi(y) = f^{-1}(y)$.

Quociente

- φ está bem definida (pois f é sobrejetora e da relação de $\sim$)
- φ é sobrejetora (dada $\tilde{x}$, considere $y = f(x)$)
- φ é injetora (note que $\varphi(y) = f^{-1}(y)$ e $y_1 \neq y_2$ implica $f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) = \emptyset$)
- $\varphi^{-1} : X/\sim \to Y$ é continua, pois $\varphi^{-1} \circ \pi = f$ é contínua. (Corolário 6)
- φ é contínua

  Dado $W \subset X/\sim$ aberto, devemos provar que $\varphi^{-1}(W) \subset Y \in \rho$. Pela hipótese sobre f, basta mostrar que $f^{-1}\big(\varphi^{-1}(W)\big) \in \tau$. Mas isto segue do fato que π é contínua, $\pi = \varphi \circ f$ e, portanto $f^{-1}\big(\varphi^{-1}(W)\big) = \pi^{-1}(W) \in \tau$.

Exemplo 9

Considere $[0,1]$ *com a topologia usual. Considere a relação que identifica* $0 \sim 1$*, deixando os outros pontos não identificados. Note que* $[0,1]/\sim$ *é homeomorfo a* $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ *com a topologia induzida de* $\mathbb{R}^2$*.*

Argumento: Considere $f : [0,1] \to Y$ dada por $f(\theta) = \big(\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta)\big)$ e use a Proposição 8.

Exemplo 10 (Uma patologia)

Considere

$$X = \left\{ \left(n, \frac{1}{k} \right) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(n,0) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

com a topologia usual de $\mathbb{R}^2$*. Considere também a seguinte relação de equivalência sobre* X *:* $x \sim y$ *se, e somente se,*

$$x = y \text{ ou } x = (n,0) \text{ e } y = (m,0) \text{ para algum } m,n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Vamos chamar de F o espaço $X/\sim$ com a topologia quociente. Este exemplo é conhecido como espaço do ventilador (fan space).

Note que este espaço é enumerável.

Vamos mostrar que o ponto $\widetilde{(0,0)}$ não admite uma base local enumerável.

Note que para cada $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, o seguinte conjunto é uma vizinhança aberta de $\widetilde{(0,0)}$

$$A_f = \{\widetilde{(0,0)}\} \cup \left\{ \widetilde{\left(n, \frac{1}{k}\right)} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k > f(n) \right\}.$$

Note também que $\{A_f \mid f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ é uma base local para $\widetilde{(0,0)}$. (Exercício)

Suponha $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base para $\widetilde{(0,0)}$. Então existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{A_{f_n} : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base para $\widetilde{(0,0)}$.

Considere $g : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ dada por

$$g(0) = 1 \qquad \text{e} \qquad g(k) = \max\{f_i(k) : i \leq k\} + 1.$$

Quociente

Para obter uma contradição, vamos mostrar que que $\{A_{f_n} : n \in \mathbb{N}\}$ não é base para $\widetilde{(0,0)}$.

Para isto, basta mostrar que $A_{f_n} \not\subset A_g$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por sua vez, isto é equivalente a $A_{f_n} \backslash A_g \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, seja $n \in \mathbb{N}$. Note que $(\widetilde{n, \frac{1}{f_n(n)+1}}) \in A_{f_n} \backslash A_g$.

Exercícios - Quociente

1. Seja (X, d) espaço métrico. Para cada $x \in X$, considere $f_x : X \to \mathbb{R}$ dada por $f_x(a) = d(x, a)$.
   (a) Note que cada f_x é contínua.
   (b) Mostre que a topologia induzida pela métrica d coincide com a topologia fraca induzida por $\{f_x : x \in X\}$.
2. Mostre a seguinte generalização (recíproca) do Teorema 5 da Aula 12. Seja $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ família de funções da forma $f_i : X \to X_i$ onde cada (X_i, τ_i) é um espaço topológico. Seja τ uma topologia sobre X. Então τ é a topologia fraca induzida por $\mathcal{F}$ se, e somente se, vale o seguinte critério: dada $g : Z \to X$, onde Z é um espaço topológico, g é contínua se, e somente se, cada $f_i \circ g : Z \to X_i$ é contínua.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i \circ g"'] & X \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

Exercícios - Espaço Quociente

3. Mostre que o espaço do ventilador não é metrizável.
4. O espaço do ventilador tem sequências convergentes não triviais?
5. Dê um exemplo de um espaço quociente $X/\sim$ tal que existe $V \subset X$ aberto tal que $\pi(V)$ não seja aberto ($\pi : X \to X/\sim$ é a projeção).

   Para o exercício a seguir: Espaços onde as sequências convergentes caracterizam os pontos aderentes são conhecidos como Frechét-Urysohn.
6. Dizemos que (X, τ) é um espaço sequencial se, para todo $F \subset X$ não fechado, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de pontos de F tal que $x_n \to x$ e $x \notin F$.
   (a) Note que todo espaço Frechét-Urysohn é sequencial.
   (b) Seja (X, τ) espaço topológico. Considere N o espaço da sequência convergente e seja $\mathcal{F} = \{f : N \to X \mid f \text{ contínua }\}$. Seja ρ a topologia forte em X induzida por $\mathcal{F}$. Comparando ρ com τ, mostre que uma inclusão é sempre válida enquanto que a outra vale, se e somente, (X, τ) for sequencial.

União disjunta

Vamos apresentar uma última construção, na forma de exercícios - as técnicas são bastante similares às construções anteriores.

A ideia para esta construção parte do seguinte: suponha que $((X_i, \tau_i))_{i \in I}$ é uma família de espaços topológicos.

Queremos construir um novo espaço de forma que cada X_i seja um subespaço aberto no novo espaço.

Se os X_i 's fossem dois a dois disjuntos, isso seria fácil, bastaria se tomar a topologia gerada por $\bigcup_{i \in I} \tau_i$ em $\bigcup_{i \in I} X_i$.

Assim, no geral, simplesmente forçamos cair neste caso particular: em vez de se trabalhar com cada X_i, trabalhos com sua cópia $\{i\} \times X_i$. Assim, temos que os espaços são dois a dois disjuntos. Adotaremos a notação

$$\amalg_{i \in I} X_i$$

para este espaço

Exercícios - União disjunta

1. Seja $V \subset \amalg_{i \in I} X_i$. Mostre que V é aberto se, e somente se, $V \cap X_i$ é aberto para todo $i \in I$.
2. Mostre que $\amalg_{i \in I} X$ (união disjunta de X $|I|$-vezes) é homeomorfo a $I \times X$, considerando em I a topologia discreta.
3. Para cada $i \in I$, considere $f_i : X_i \to \amalg_{i \in I} X_i$ dada por $f_i(x) = (i, x)$.
   (a) Note que cada f_i é contínua.
   (b) Mostre que a topologia que definimos sobre $\amalg_{i \in I} X_i$ é a topologia forte induzida pela família das f_i 's.