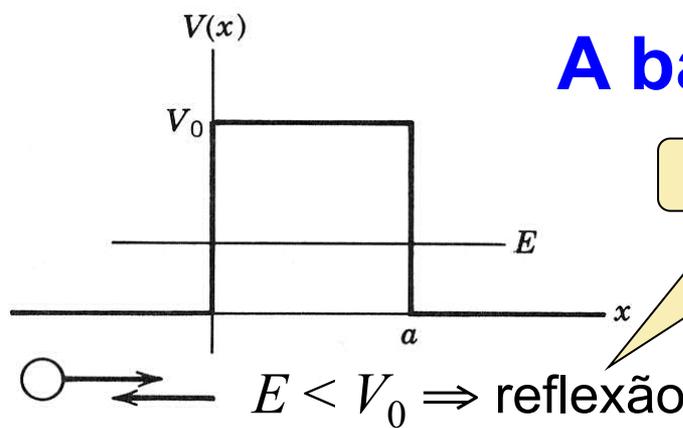
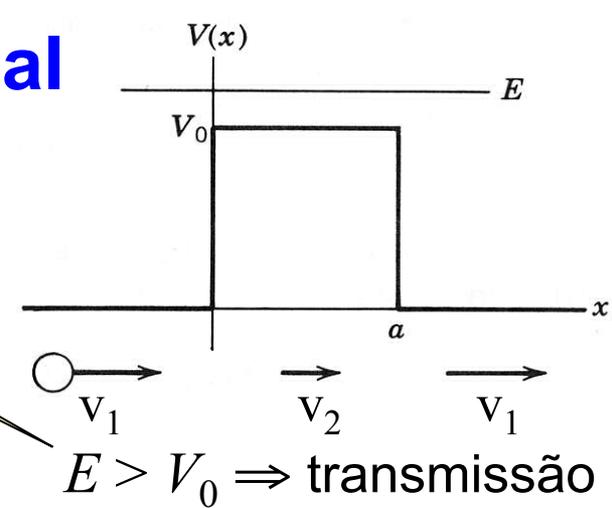


# A barreira de potencial



Classicamente ...

ou



Quântica: caso  $E < V_0$

3 regiões: à esquerda da barreira, na barreira e à direita dela.

Para  $x < 0$ :  $\psi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$

com:  $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{p_1}{\hbar}$

Para  $x > a$ :  $\psi(x) = \hat{A}e^{ik_1x} + \hat{B}e^{-ik_1x}$

Para  $0 < x < a$ :  $\psi(x) = Ce^{-k_2x} + De^{k_2x}$

com:  $k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} = \frac{p_2}{\hbar}$

Se a partícula incide da esquerda  $\Rightarrow \hat{B} = 0$ ; mas não podemos fazer  $D = 0$ , pois  $x$  está limitado.

Condições de continuidade de  $\psi$  e  $d\psi/dx$  em  $x = 0$ :

$$A + B = C + D \text{ de } \psi(0)$$

$$ik_1(A - B) = -k_2(C - D) \text{ de } \psi'(0)$$

$$Ce^{-k_2a} + De^{k_2a} = \hat{A}e^{ik_1a} \text{ de } \psi(a)$$

$$-k_2(Ce^{-k_2a} - De^{k_2a}) = ik_1\hat{A}e^{ik_1a} \text{ de } \psi'(a)$$

Para facilitar a notação, vamos chamar:  $\alpha = \frac{k_2}{k_1}$  e  $\Gamma = \hat{A}e^{ik_1a}$

Das duas últimas equações, temos:

$$Ce^{-k_2a} + De^{k_2a} = \Gamma \quad (1)$$

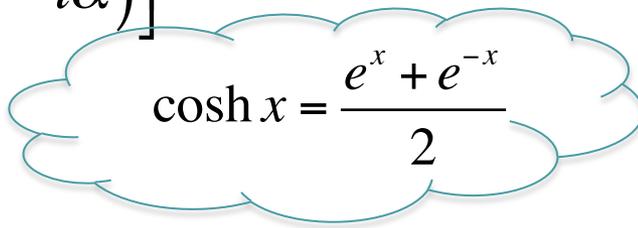
$$\text{e } i\alpha(Ce^{-k_2a} - De^{k_2a}) = \Gamma \Rightarrow Ce^{-k_2a} - De^{k_2a} = \frac{\Gamma}{i\alpha} \quad (2)$$

$$\therefore (1) + (2) \Rightarrow Ce^{-k_2a} = \Gamma \frac{1+i\alpha}{2i\alpha} \quad \text{e } (1) - (2) \Rightarrow De^{k_2a} = -\Gamma \frac{1-i\alpha}{2i\alpha}$$

De  $A + B = C + D$ , vem:

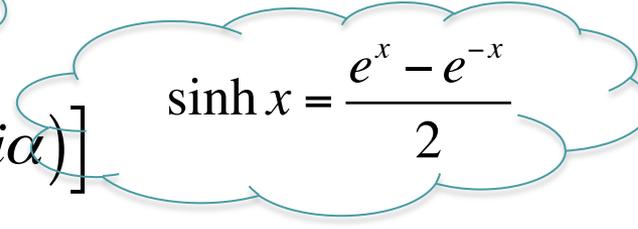
$$A + B = C + D = \frac{\Gamma}{2i\alpha} \left[ e^{k_2 a} (1 + i\alpha) - e^{-k_2 a} (1 - i\alpha) \right]$$

$$\therefore A + B = \Gamma \left( \cosh k_2 a - \frac{i}{\alpha} \sinh k_2 a \right)$$


$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

De  $A - B = i\alpha(C - D)$ , vem:

$$A - B = i\alpha(C - D) = \frac{\Gamma}{2} \left[ e^{k_2 a} (1 + i\alpha) + e^{-k_2 a} (1 - i\alpha) \right]$$


$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\therefore A - B = \Gamma (\cosh k_2 a + i\alpha \sinh k_2 a)$$

Podemos resolver para  $A$  e  $B$ , obtendo:

$$A = \Gamma \left[ \cosh k_2 a + \frac{i}{2} \left( \alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \sinh k_2 a \right]$$

$$B = -\frac{i}{2} \Gamma \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \sinh k_2 a$$

Lembrando que  $|\Gamma|^2 = |\hat{A}|^2$ , temos:

$$\left| \frac{A}{\hat{A}} \right|^2 = \cosh^2 k_2 a + \frac{1}{4} \left( \alpha - \frac{1}{\alpha} \right)^2 \sinh^2 k_2 a = 1 + \frac{1}{4} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 \sinh^2 k_2 a$$

$$\left| \frac{B}{\hat{A}} \right|^2 = \frac{1}{4} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 \sinh^2 k_2 a$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } x < 0: \psi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \\ \text{Para } x > a: \psi(x) = \hat{A}e^{ik_1x} \end{array} \right\} \Rightarrow \psi(x) = \begin{cases} \psi_{inc} + \psi_{refl}, & \text{se } x < 0 \\ \psi_{trans}, & \text{se } x > a \end{cases}$$

$$\text{com } k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{p_1}{\hbar}$$

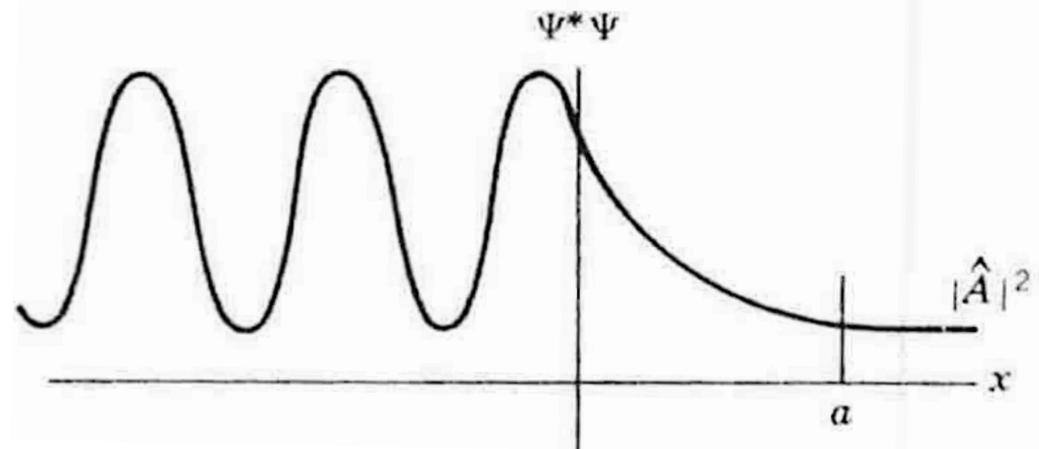
Então vamos ter que o coeficiente de reflexão:

$$\left. \begin{aligned} J_{inc} &= \frac{\hbar k_1}{m} |A|^2 \\ J_{refl} &= \frac{\hbar k_1}{m} |B|^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R = \left| \frac{J_{refl}}{J_{inc}} \right| = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{|B|^2}{|\hat{A}|^2} \frac{|\hat{A}|^2}{|A|^2} = \frac{\frac{1}{4} \left( \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \sinh^2 k_2 a}{1 + \frac{1}{4} \left( \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \sinh^2 k_2 a}$$

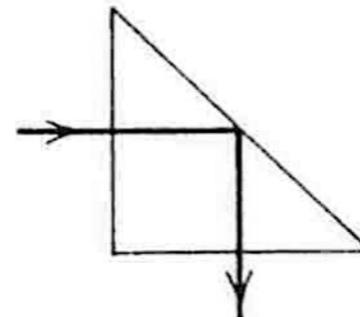
E o de transmissão:

$$\left. \begin{aligned} J_{inc} &= \frac{\hbar k_1}{m} |A|^2 \\ J_{trans} &= \frac{\hbar k_1}{m} |\hat{A}|^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = \left| \frac{J_{trans}}{J_{inc}} \right| = \frac{|\hat{A}|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left( \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \sinh^2 k_2 a}$$

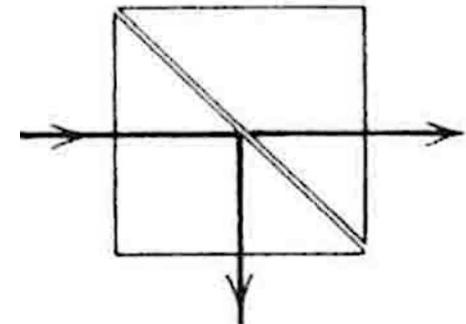
Densidade de probabilidade para partícula com  $E < V_0$  e barreira com largura  $a$ :



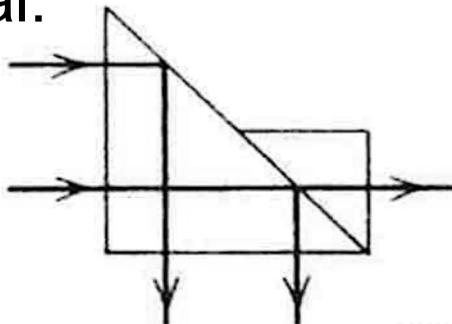
Estranho? Vejamos o caso de um prisma com reflexão total:



E se aproximarmos um outro prisma?

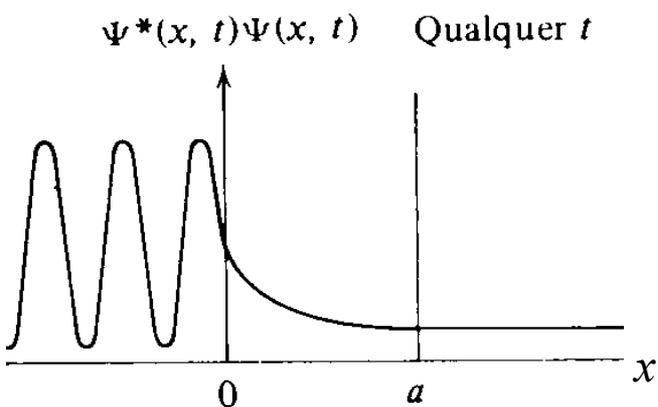
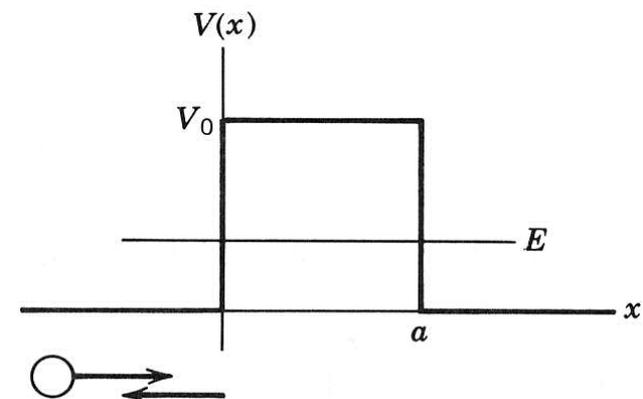


Em geral:



# A barreira de potencial: resultados e aplicações

Caso  $E < V_0$



Na situação em que  $k_2 a \gg 1$ :

$$T \approx 16 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right) e^{-2k_2 a}$$

Para  $x < 0$ :  $\psi(x) = Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x}$

Para  $x > a$ :  $\psi(x) = \hat{A}e^{ik_1 x}$

Para  $0 < x < a$ :  $\psi(x) = Ce^{-k_2 x} + De^{k_2 x}$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{p_1}{\hbar} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} = \frac{p_2}{\hbar}$$

$$T = \left| \frac{J_{trans}}{J_{inc}} \right| = \frac{|\hat{A}|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left( \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \sinh^2 k_2 a}$$

$$R = \frac{|B|^2}{|\hat{A}|^2} \frac{|\hat{A}|^2}{|A|^2} = \frac{\frac{1}{4} \left( \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \sinh^2 k_2 a}{1 + \frac{1}{4} \left( \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \sinh^2 k_2 a}$$

## Exemplo

Elétron com  $E_K = 2$  eV incidindo sobre barreira com  $V_0 = 10$  eV e 0,1 nm de espessura. Vamos usar as duas fórmulas, a exata e a aproximada.

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{p_1}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mc^2E}}{\hbar c} = \frac{\sqrt{2 \cdot 0,5 \cdot 10^5 \cdot 2} \text{ eV}}{197 \text{ eV} \cdot \text{nm}} = 7,3 \text{ nm}^{-1}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} = \frac{p_2}{\hbar} = \sqrt{\frac{V_0 - E}{E}} k_1 = 2k_1$$

Portanto  $k_2 a = 2 \times (7,3 \text{ nm}^{-1}) \times 0,1 \text{ nm} = 1,45$ . Que não é propriamente muito maior do que 1. Mas vamos, assim mesmo, usar este resultado para determinar os seguintes fatores:

$$e^{k_2 a} = 4,26 ; \quad e^{-k_2 a} = 0,235 ; \quad e \sinh k_2 a = \frac{1}{2} (e^{k_2 a} - e^{-k_2 a}) = 2,01$$

Agora, então, podemos calcular os coeficientes de transmissão:

## Exemplo

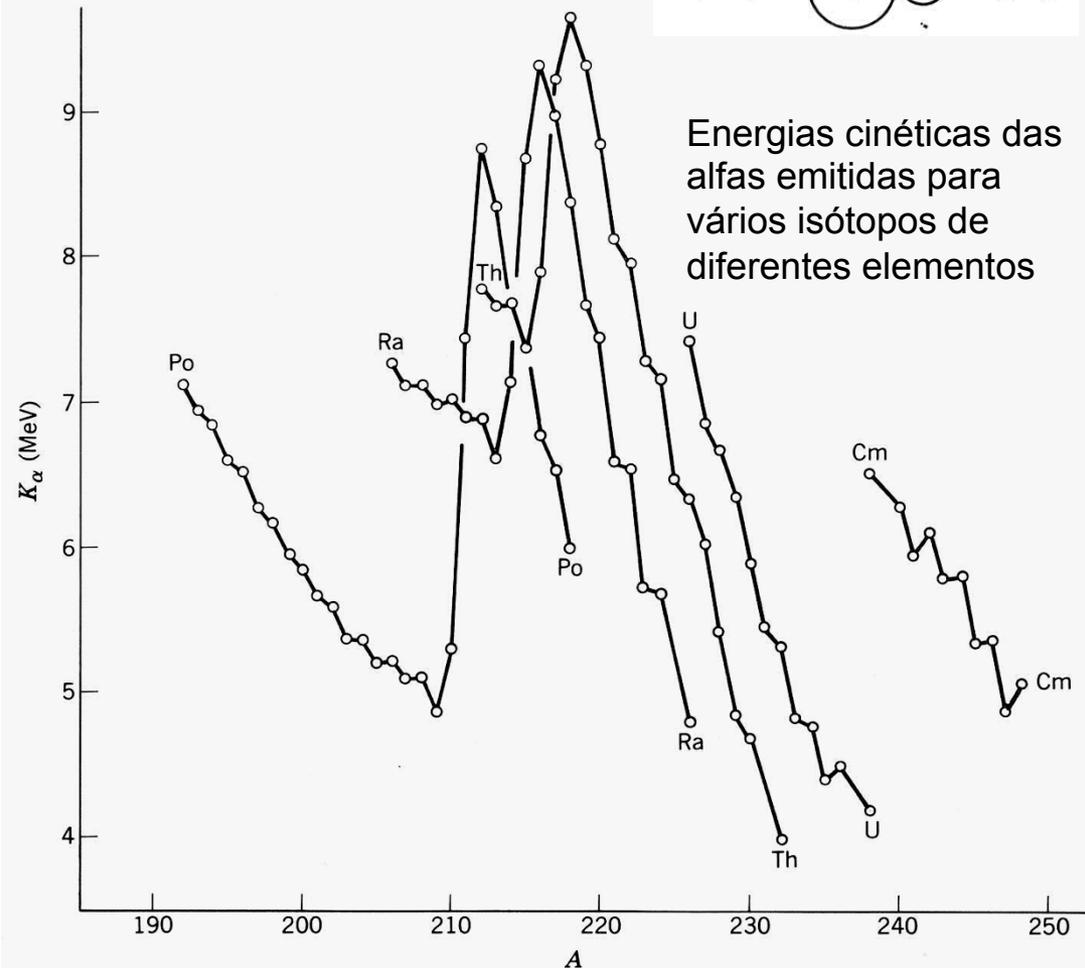
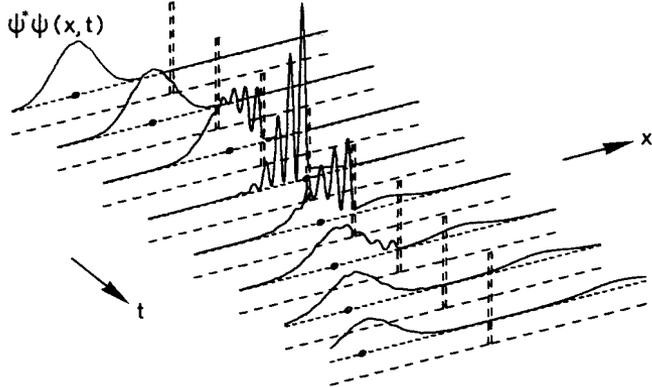
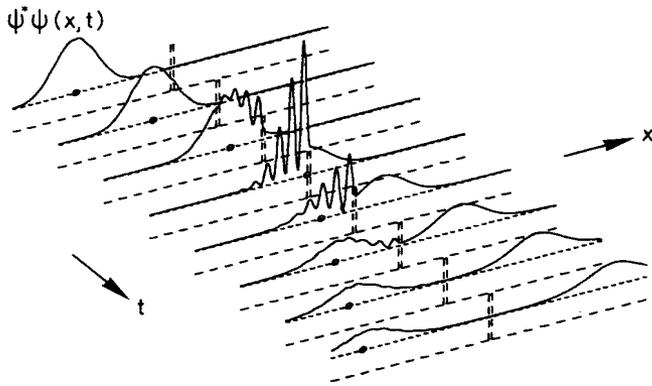
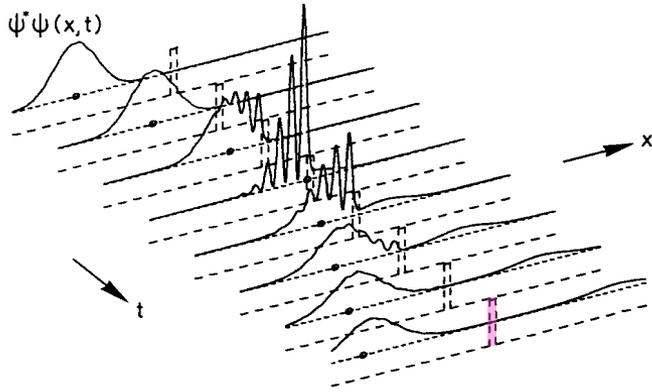
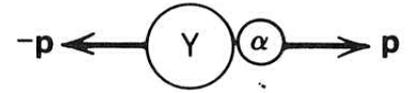
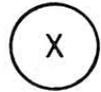
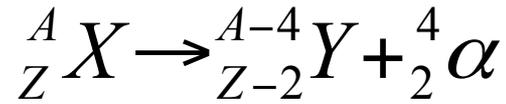
$$T_{exato} = \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \sinh^2 k_2 a \right]^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} (2,5)^2 (2,01)^2} = 0,137$$

$$T_{aprox.} = 16 \frac{E}{V_0} \left( 1 - \frac{E}{V_0} \right) e^{-2k_2 a} = 16 \left( \frac{2}{10} \right) \left( \frac{8}{10} \right) (0,235)^2 = 0,141$$

Portanto  $T_{aprox.} \cong T_{exato}$ .

$T_{aprox.} \div T_{exato} \cong 1,03$  o que é bastante bom para nossa aproximação, ainda mais considerando que  $k_2 a$  nem era muito maior que 1.

# Decaimento $\alpha$



# Gamow, Condon & Gurney, 1928: decaimento $\alpha \Rightarrow$ tunelamento

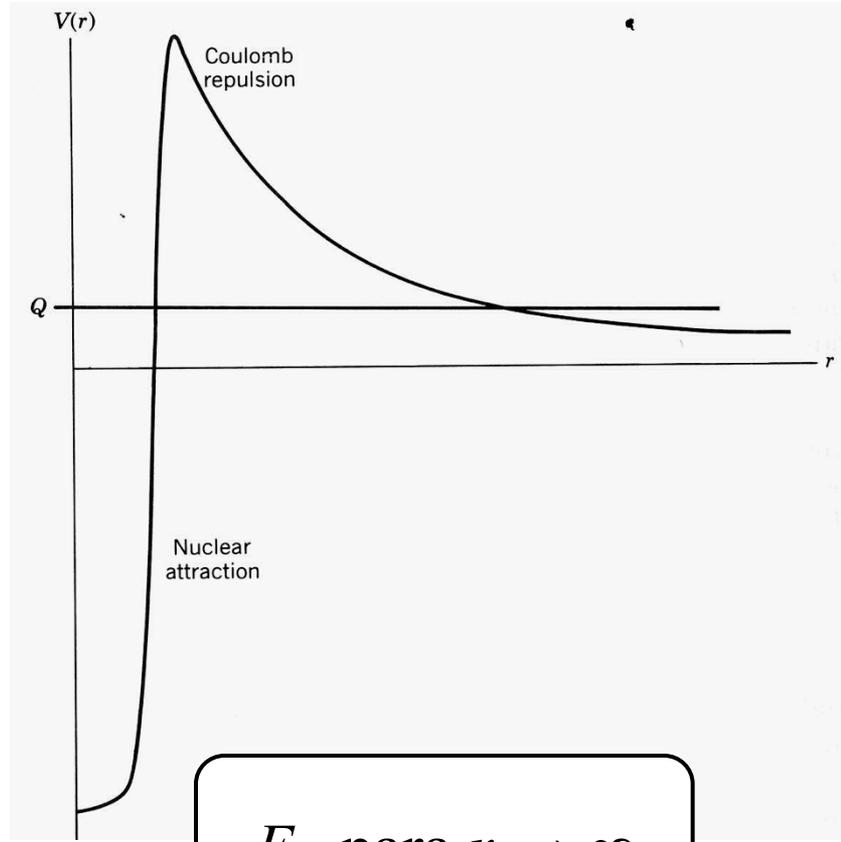
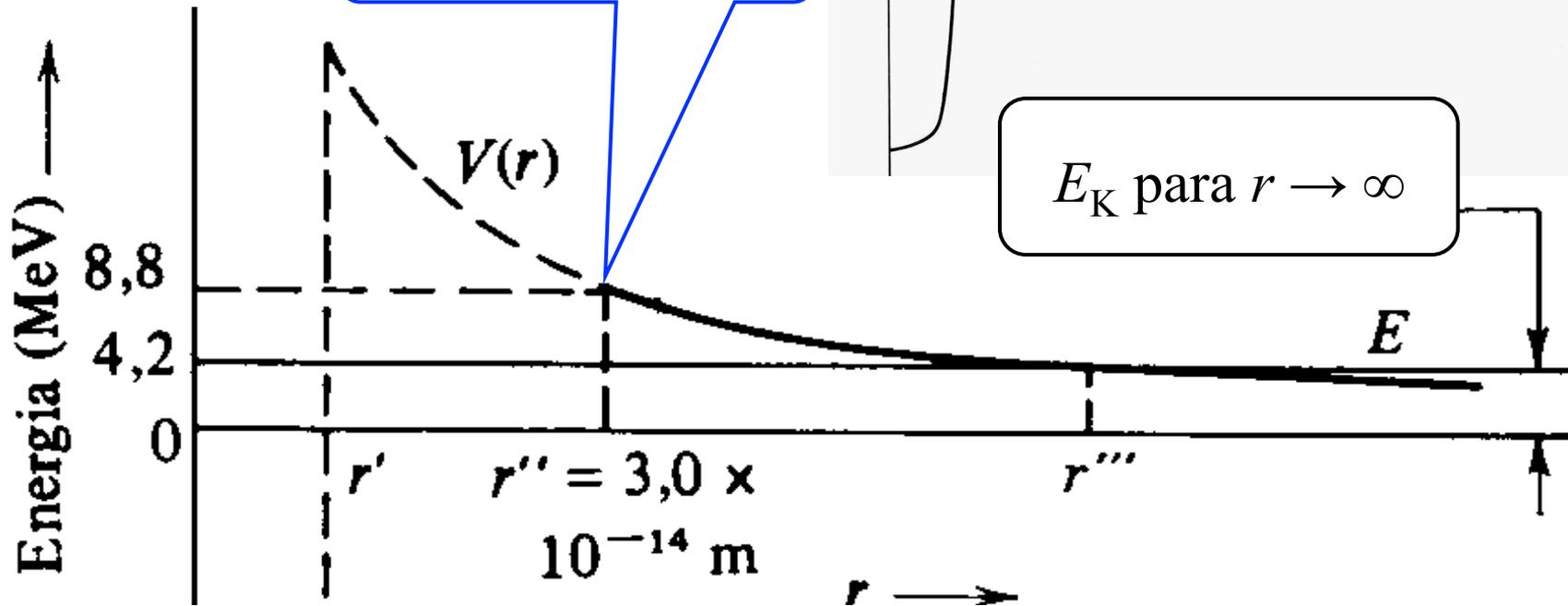
Probabilidade de transmissão:

$$T \approx e^{-2k_2 a} = e^{-2\sqrt{2m(V_0 - E)}a/\hbar}$$

$$T \approx e^{-2k_2 a} = e^{-2 \int_{r'}^{r''} (\sqrt{2m[V(r) - E]})/ \hbar dr}$$

Caso do  $^{238}\text{U}$

Região mapeada por espalhamento de  $\alpha$ s



Taxa de decaimento,  $R = P_{\text{transmissão}} \times \text{Frequência de tentativas}$

$$N = \frac{v}{2r'}$$

$$R \approx \frac{v}{2r'} e^{-2 \int_{r'}^{r''} (\sqrt{2m[V(r)-E]})/\hbar dr}$$

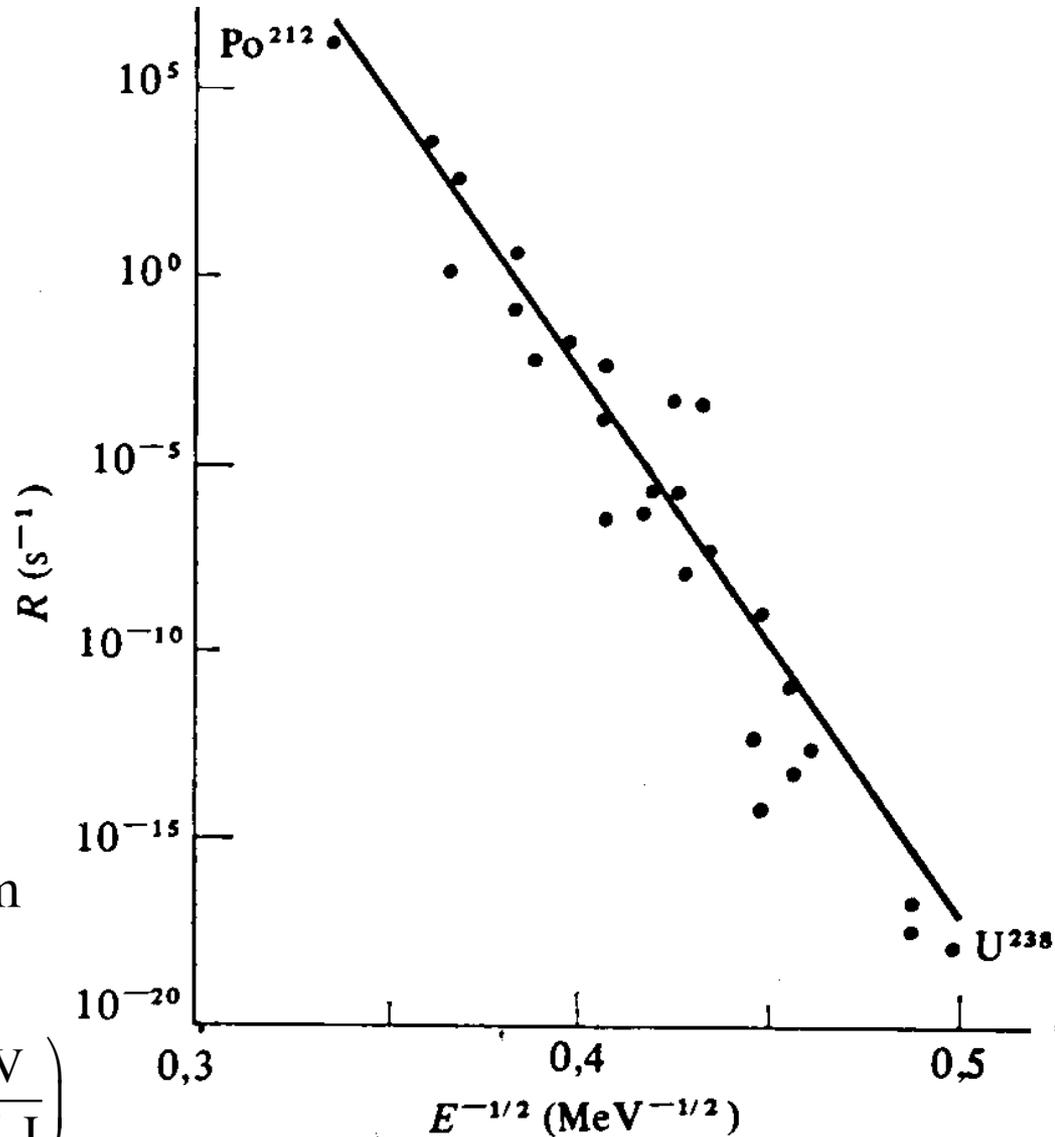
$$r' = 7 \times 10^{-15} \text{ m} \Rightarrow$$

$$V_{\text{max}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r'} = 37 \text{ MeV}$$

$$4,2 \text{ MeV} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r''} \Rightarrow$$

$$r'' = \frac{37 \text{ MeV}}{4,2 \text{ MeV}} r' \Rightarrow r'' = 6,2 \times 10^{-14} \text{ m}$$

$$V_{\text{max}} = \frac{2(90)(1,6 \times 10^{-19})^2 (9 \times 10^9)}{7 \times 10^{-15}} \left( \frac{10^{-6} \text{ MeV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \right)$$



$$k_2 = \frac{\sqrt{2mc^2(E - V_0)}}{\hbar c} = \frac{\sqrt{2(3727 \text{ MeV})(37 - 4,2) \text{ MeV}}}{197 \text{ MeV}\cdot\text{fm}} = 2,5 \text{ fm}^{-1}$$

$$a = r''' - r' = 62 - 7 = 55 \text{ fm}$$

$$\therefore k_2 a = 2,5 \times 10^{15} \times 55 \times 10^{-15} = 137,5 \gg 1$$

$$\therefore T = 16 \frac{4,2}{37} \left(1 - \frac{4,2}{37}\right) e^{-275} = 1,6 e^{-275} = 6 \times 10^{-120}$$

Que é muito pequeno. Uma aproximação mais realista seria tomar uma barreira retangular com metade da altura máxima e metade da largura:  $V_0 = 18 \text{ MeV}$  e  $a = 28 \text{ fm}$ . Assim:

$$\therefore k_2 a = 1,7 \times 10^{15} \times 28 \times 10^{-15} = 47,5 \gg 1$$

$$\therefore T = 16 \frac{4,2}{18} \left(1 - \frac{4,2}{18}\right) e^{-95} = 2,9 e^{-95} = 1,6 \times 10^{-41}$$

Precisamos avaliar o número de tentativas por unidade de tempo:

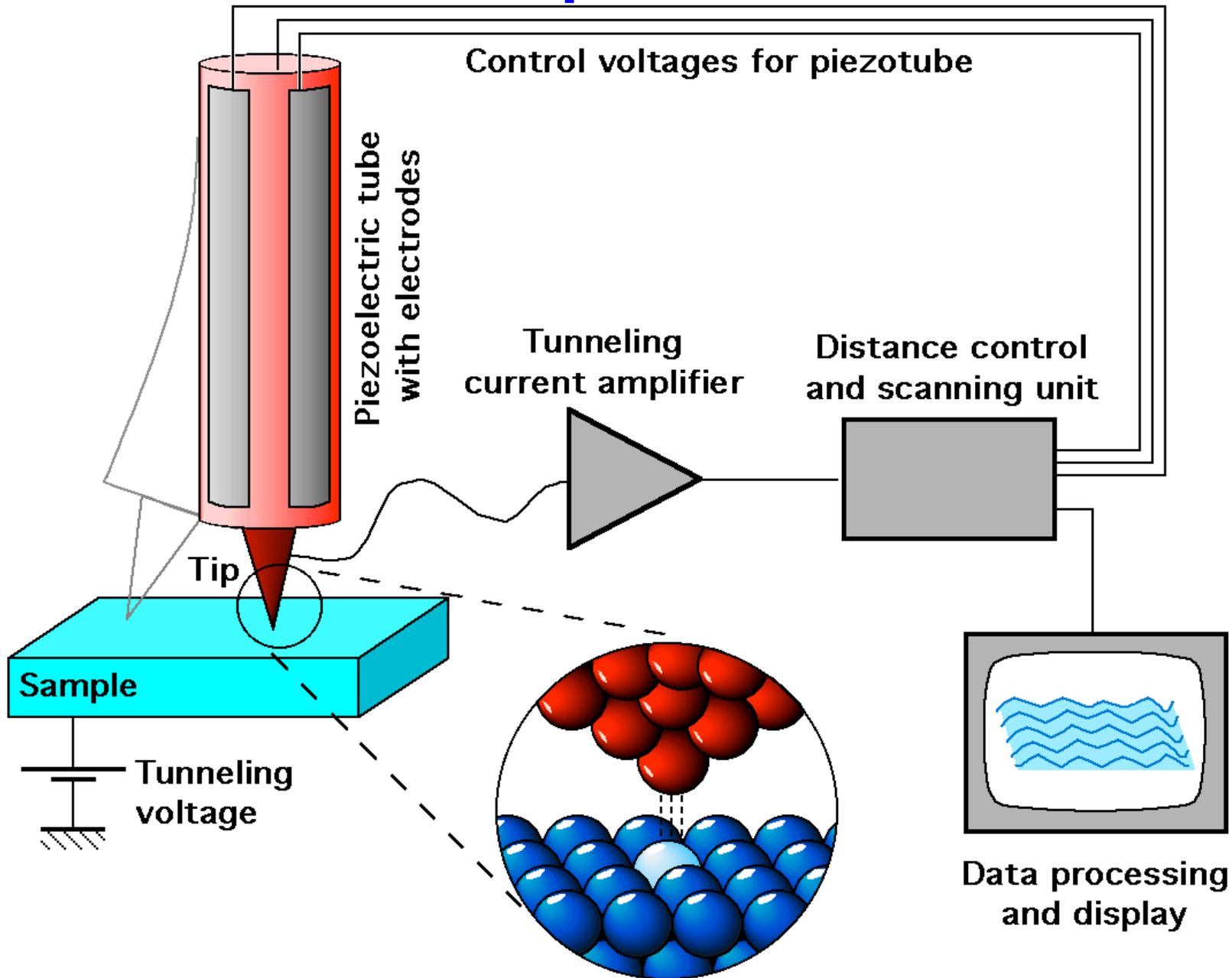
$$v = \sqrt{\frac{2E_K}{m}} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2E_K}{mc^2}} = \sqrt{\frac{2(4,2 \text{ MeV})}{3727 \text{ MeV}}} = 0,047 \Rightarrow v = 1,4 \times 10^7 \text{ m/s}$$

$$R = \frac{v}{2r'} T = \frac{1,4 \times 10^7}{2 \times 7 \times 10^{-15}} 1,6 \times 10^{-41} = 1,6 \times 10^{-20} \text{ s}^{-1}$$

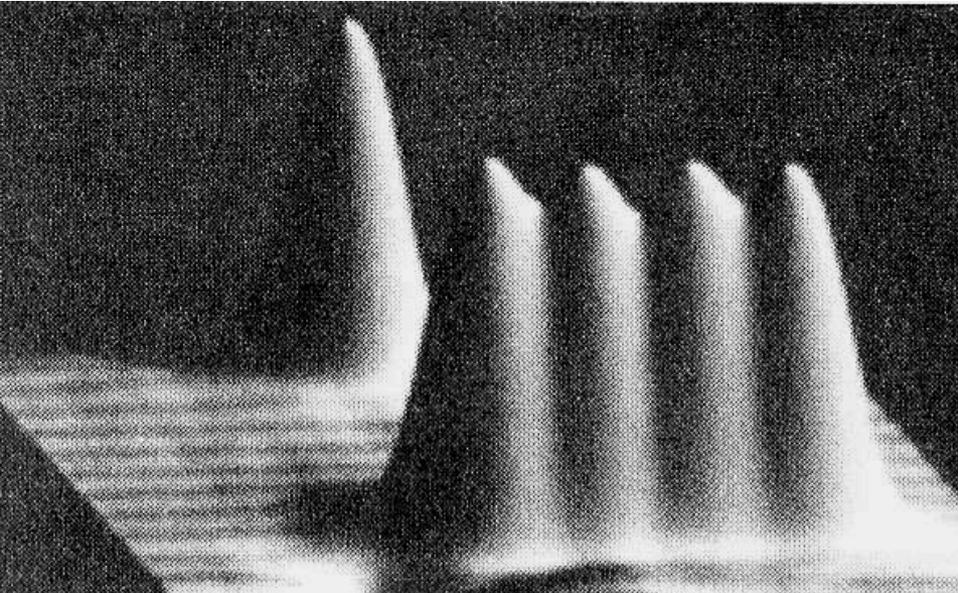
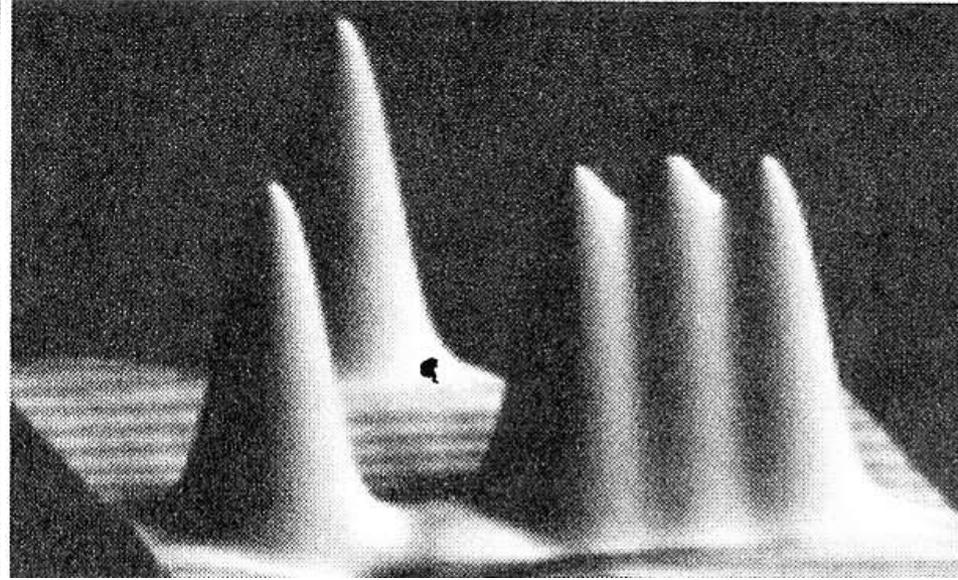
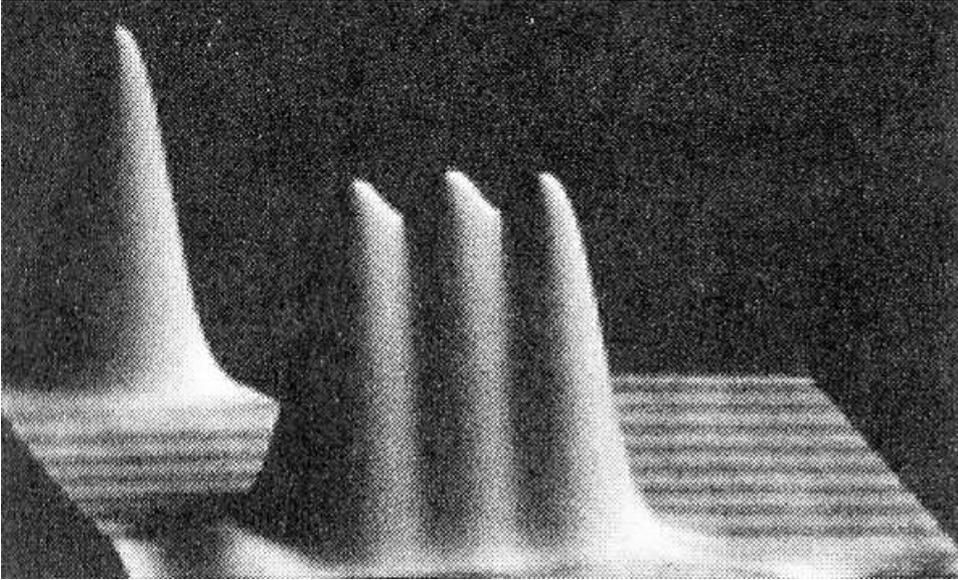
$$\therefore t_{1/2} = R^{-1} \ln 2 = 0,693 \times 6 \times 10^{19} = 4 \times 10^{19} \text{ s} = \frac{4 \times 10^{19} \text{ s}}{\pi \times 10^7 \text{ s/ano}} \approx 10^{12} \text{ anos}$$

$$\text{Exp.: } t_{1/2} = 4,5 \times 10^9 \text{ anos}$$

# Microscópio de tunelamento

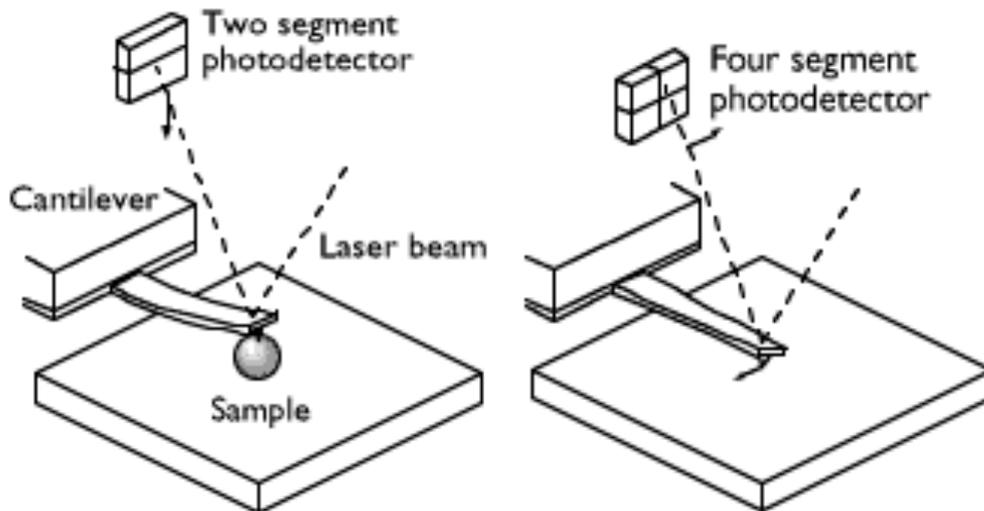
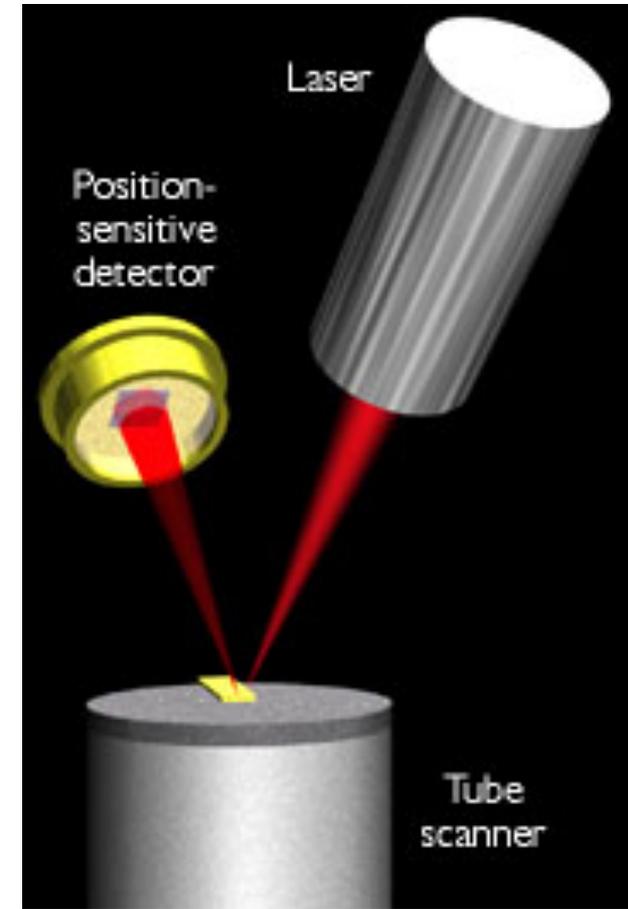
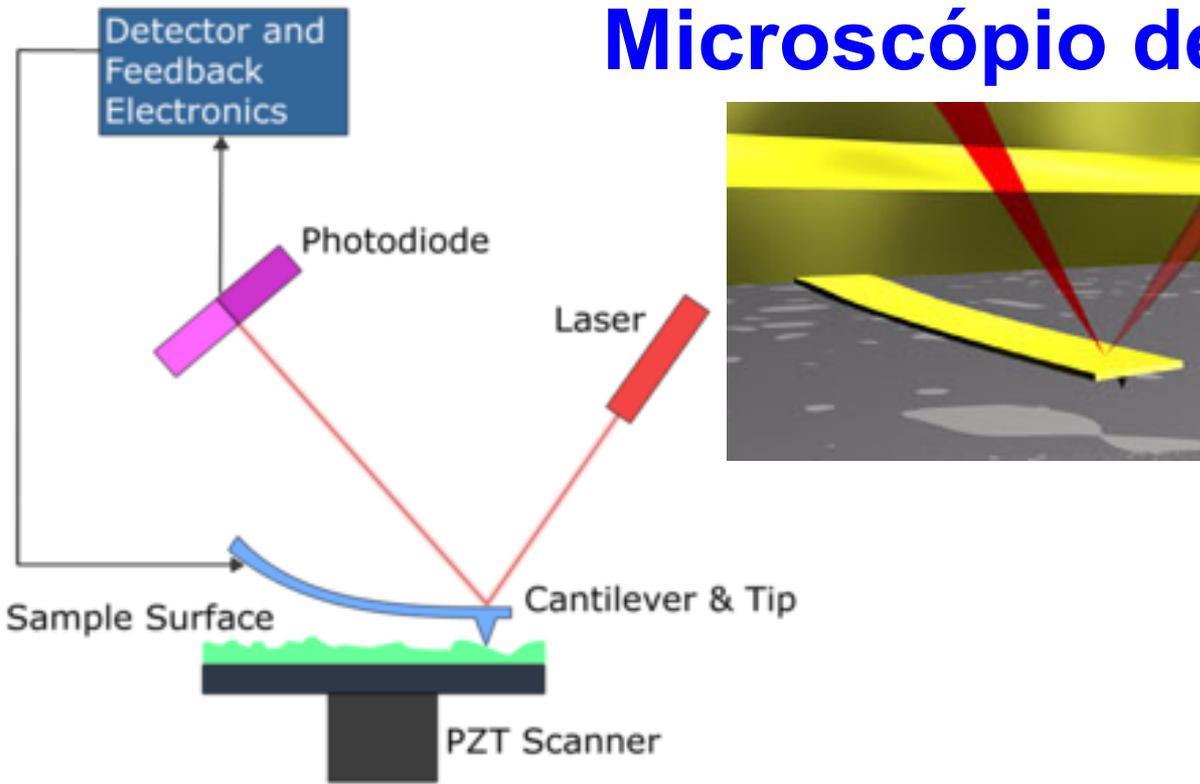


# Átomos de Xe na superfície de Ni 0,16 nm de altura e separação de 0,5 nm

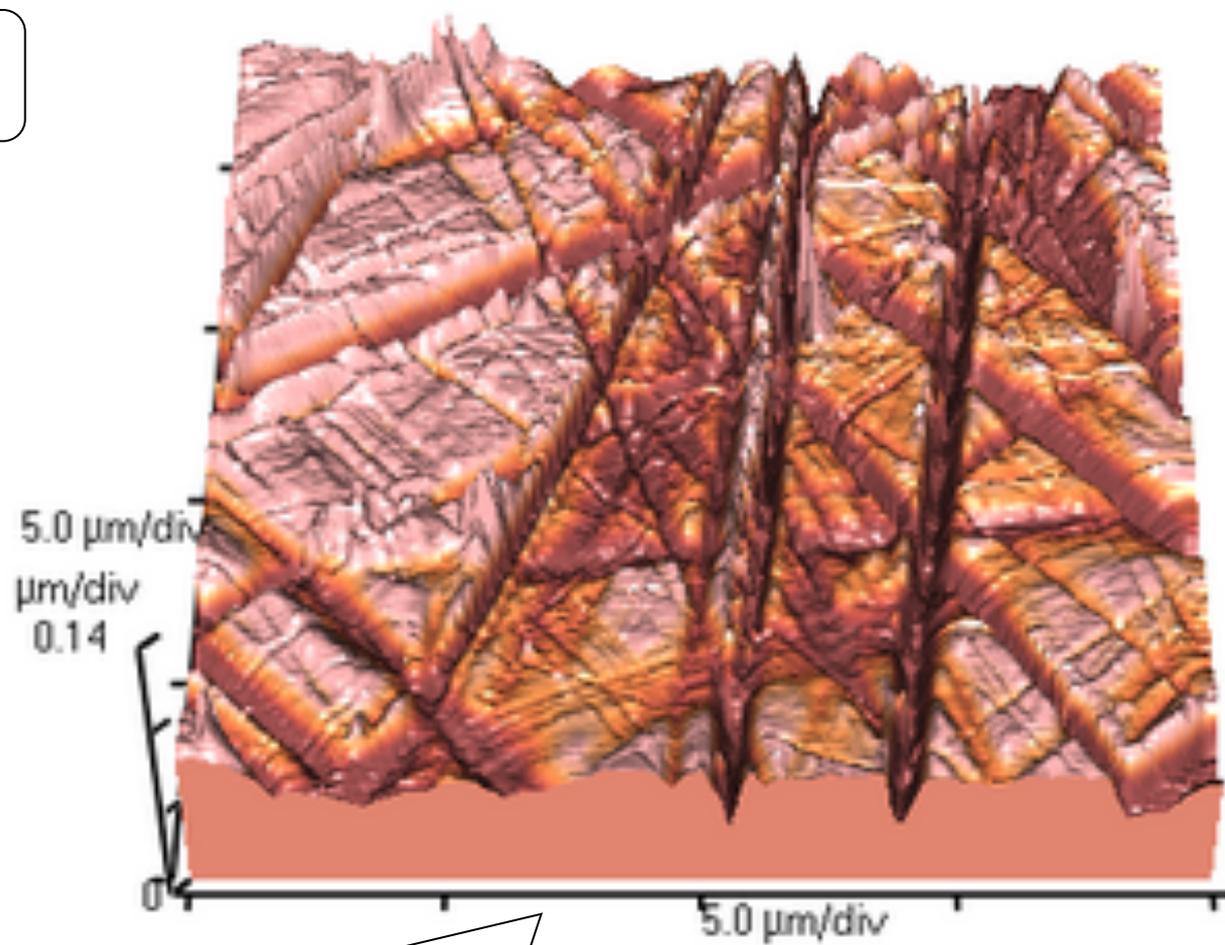
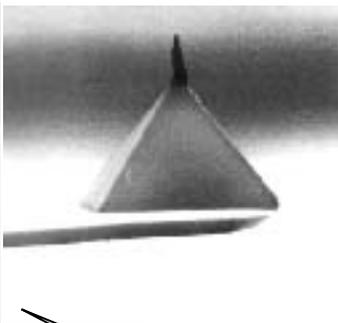
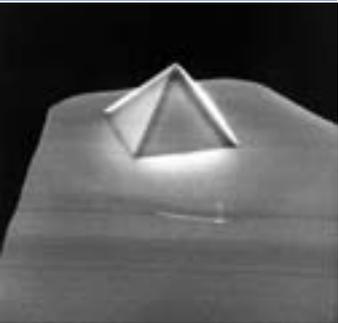


Limitação: amostras devem necessariamente ser condutoras.

# Microscópio de força atômica



Microscópio AFM da Digital



Topografia da superfície de uma amostra de vidro

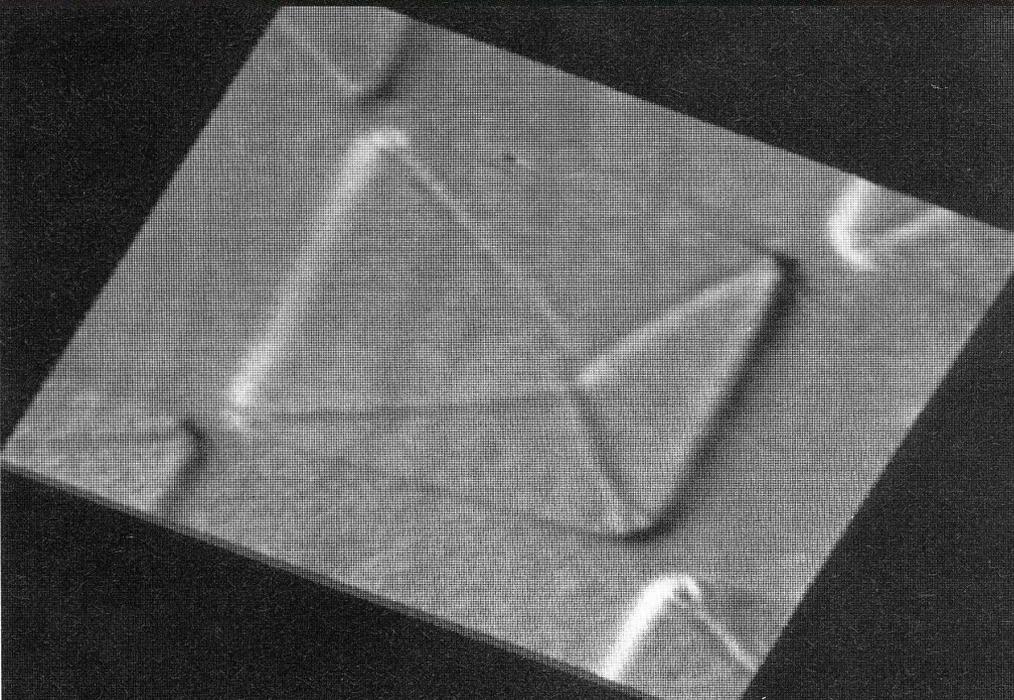
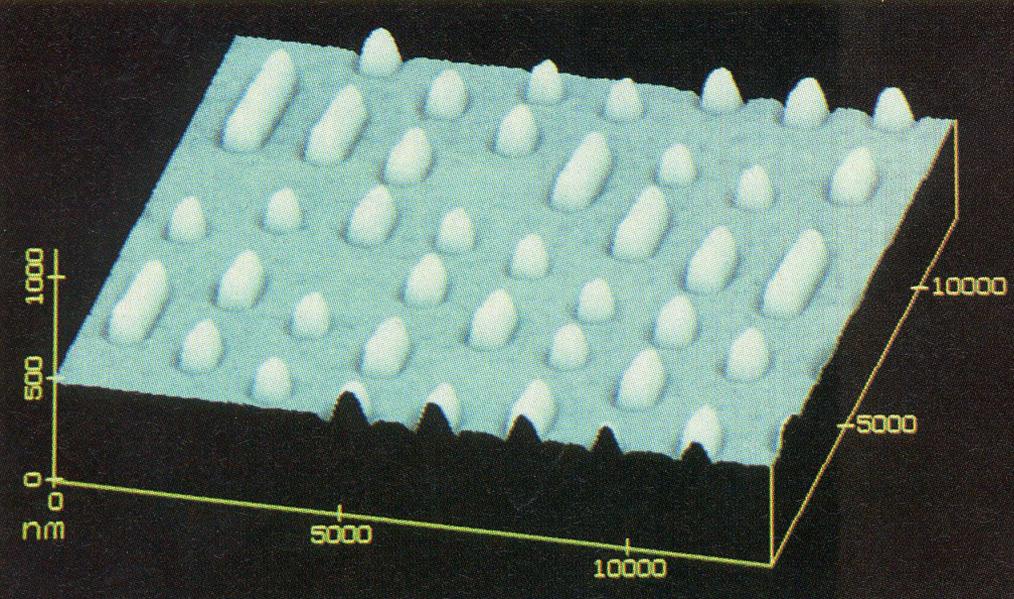
Pontas usadas em AFM

## Exemplos interessantes

Molde para estampar CDs  
As protuberâncias produzem depressões de 60 nm de profundidade no material do CD (poliolefina).

As protuberâncias são alinhadas em pistas separadas por 1,6  $\mu\text{m}$ . (Foto Digital Instrum.)

Imagem por força magnética  
Imagem de peça de permaloy,  $\text{Ni}_{80}\text{Fe}_{20}$ , (material magnético).  
As marcas no quadrado central, que tem 20  $\mu\text{m}$  de lado, são fronteiras de domínios magnéticos naturais. (Imagem IBM Corp.)



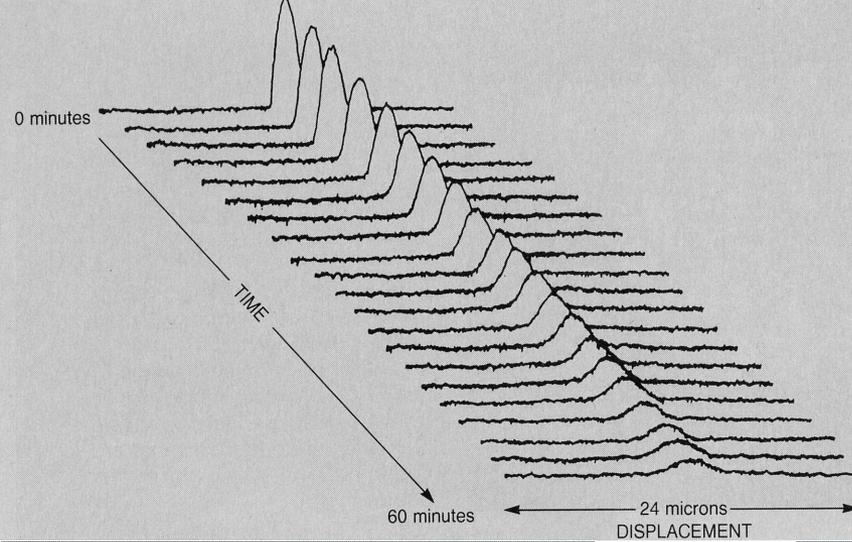
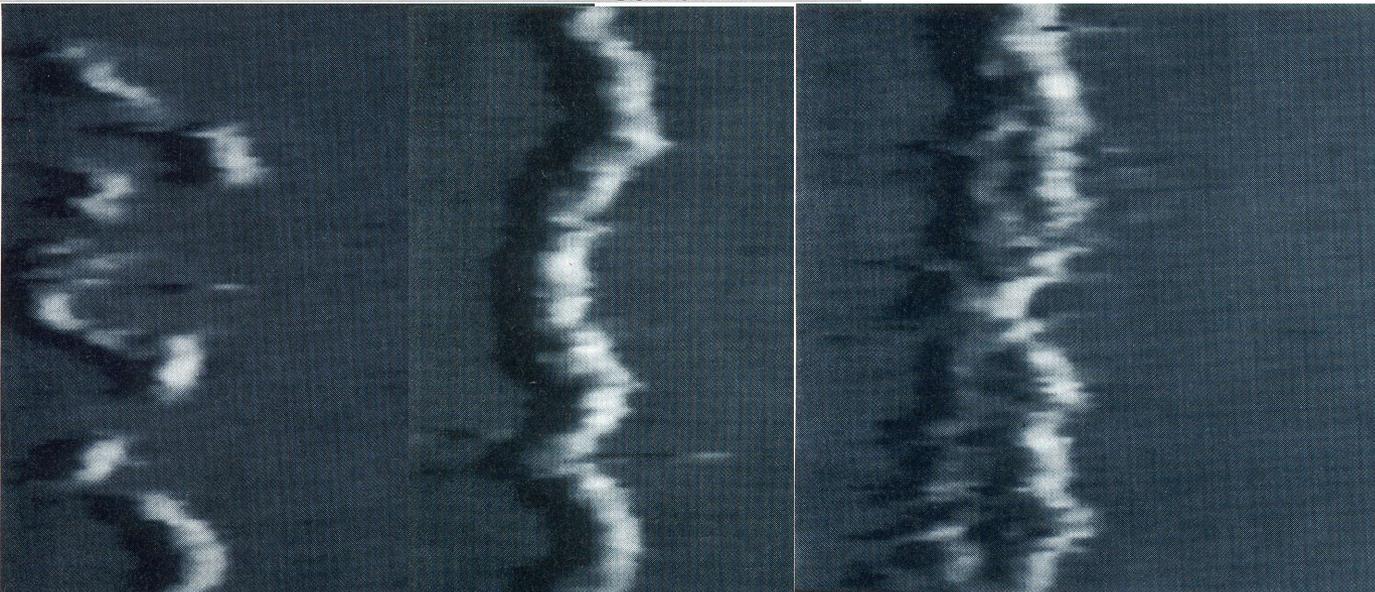


Gráfico de  $Q \times t$  de uma região carregada eletricamente na superfície de um isolante. O gráfico mostra contornos proporcionais à força eletrostática. A área monitorada tinha  $24 \times 5 \mu\text{m}^2$

J. E. Stern *et al.*, Appl. Phys. Lett. **53**(1988)2717 e Phys. Rev. Lett. **63**(1989)2669.



B. Drake *et al.*, Science **243**(1989)1586.

Imagens mostrando o processo de polimerização da proteína fibrina em solução aquosa.

A rede formada pela polimerização da fibrina é responsável pela coagulação do sangue humano. A imagem tem  $450 \times 450 \text{ nm}^2$  e o campo foi inteiramente coberto pela rede em aproximadamente 30 min.

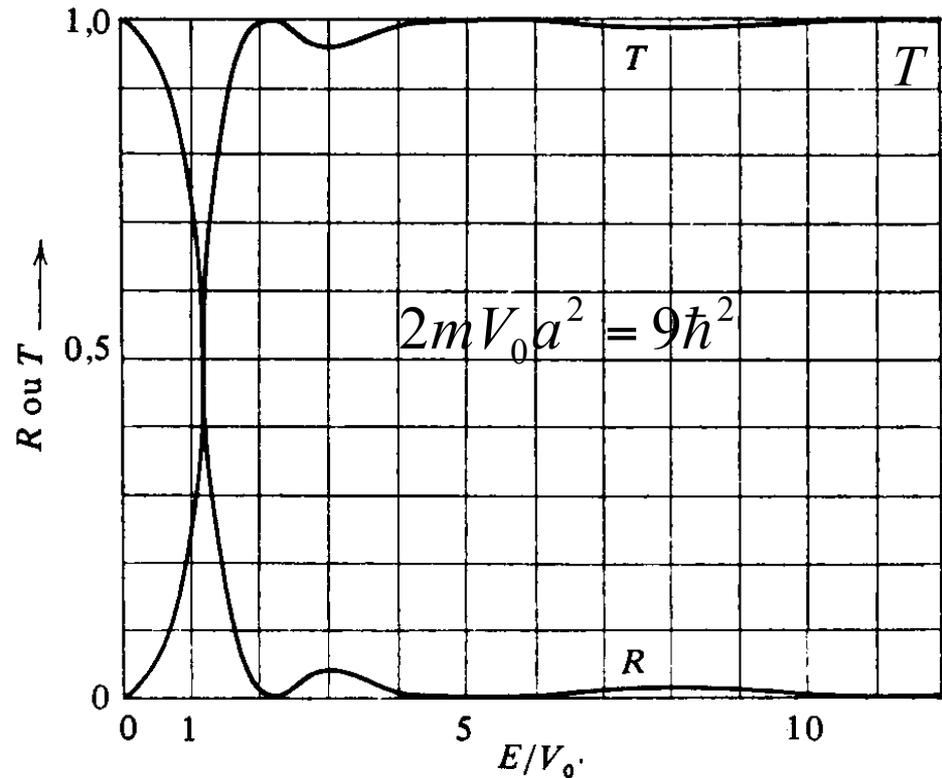
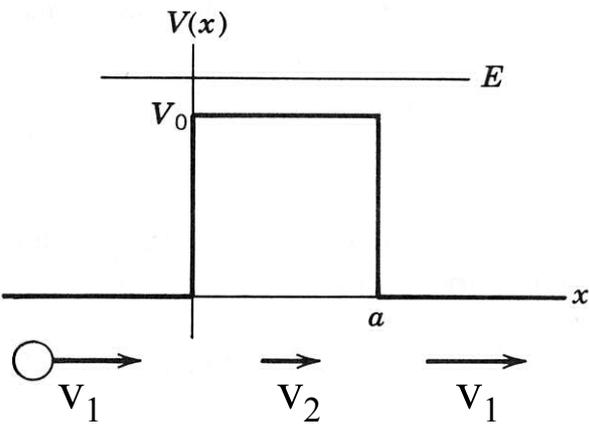
# Caso $E > V_0$

Para  $x < 0$ :  $\psi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$

Para  $x > a$ :  $\psi(x) = \hat{A}e^{ik_1x}$

Para  $0 < x < a$ :  $\psi(x) = Ce^{-ik_2x} + De^{ik_2x}$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{p_1}{\hbar} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} = \frac{p_2}{\hbar}$$



$$T = \left| \frac{J_{trans}}{J_{inc}} \right| = \frac{|\hat{A}|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left( \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \text{sen}^2 k_2 a}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{1 + \frac{\text{sen}^2 k_2 a}{4E(E - V_0)}}$$

$$k_2 a = n\pi \Rightarrow T = 1$$