SÉRIES

Dada uma sequência numérica $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, podemos associar a ela uma série, que é a sequência de somas parciais

$$a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ a_1+a_2+a_3+a_4,\ \ldots$$

Essas somas parciais são denotadas por

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

A questão que devemos decidir é se a sequência s_n converge ou não.
Se $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$, dizemos que a série (denotada por) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e sua soma é S.

<u>Linearidade</u>: Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries convergentes e α e β são números. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$

converge e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

<u>Prova</u>: Sejam A_n e B_n as somas parciais de $\sum a_n$ e $\sum b_n$, isto é,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{e} \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Como estamos supondo que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são somáveis, existem os limites

$$\lim_{n \to \infty} A_n = A \quad \text{e} \quad \lim_{n \to \infty} B_n = B$$

Mas as somas parciais

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha a_k = \alpha A_n \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n} \beta b_n = \beta B_k$$

e portanto,

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha A_n + \beta B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha A + \beta B .$$

Isso mostra que as somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ convergem, isto é, que a série é somável, com soma

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \blacksquare$$

<u>Corolário</u>: Se $\sum a_n$ converge e $\sum b_n$ diverge, então $\sum (a_n + b_n)$ diverge.

<u>Prova</u>:

$$\sum b_n = \sum \left[(a_n + b_n) - a_n \right]$$

Se $\sum a_n$ e $\sum (a_n + b_n)$ convergem, então $\sum b_n$ converge. $\blacksquare$

Vimos que $\sum 1/n$, a série harmônica, diverge. Vimos também que a soma geométrica $\sum 1/2^n$ converge. Do contrário, segue que

$$\sum \left(1/n - 1/2^n\right) \quad \text{diverge.}$$

Teorema Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ converge se e somente se $|\lambda| < 1$.

Prova:

$$S_n = \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n$$

$$S_{n+1} = \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n + \lambda^{n+1} = S_n + \lambda^{n+1}$$

$$= \lambda + \lambda(\lambda + \cdots + \lambda^n) = \lambda + \lambda S_n$$

Portanto

$$S_n + \lambda^{n+1} = \lambda + \lambda S_n \implies (1-\lambda) S_n = \lambda - \lambda^{n+1}$$

Supondo que $\lambda \neq 1$, segue que

$$\boxed{S_n = \frac{\lambda - \lambda^{n+1}}{1-\lambda}}$$

Se $|\lambda| < 1$, então $\lambda^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e portanto

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Se $|\lambda| > 1$, então λ^n diverge para $n \to \infty$ e segue que S_n diverge.
O caso $|\lambda| = 1$ fica como exercício. $\blacksquare$

Acabamos de provar que, para $|\lambda| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

Somando 1 a ambos os lados, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots = \frac{1}{1-\lambda}$$

Em geral, pensamos em λ como uma variável:

Teorema Se $|x|<1$, então

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n}$$

Dessa igualdade, podemos concluir várias outras: supondo sempre que $|x|<1$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-+\cdots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots$$

$$\frac{1}{1+x^3} = 1-x^3+x^6-x^9+x^{12}-+\cdots$$

Se $|x|<1/2 \implies |2x|<1 \implies$

$$\frac{1}{1-4x^2} = \frac{1}{1-(2x)^2} = 1+4x^2+16x^4+\cdots+(4x^2)^n+\cdots$$

Séries telescópicas: Suponha que as sequências a_n e b_n satisfazem

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

A série associada a a_n é

$$\sum a_n = \sum (b_n - b_{n+1})$$

cujas somas parciais são

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = (b_1 - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + \dots + (\cancel{b_{n-2}} - \cancel{b_{n-1}}) + (\cancel{b_{n-1}} - b_n)$$

$$= b_1 - b_n$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (b_1 - b_n)$$

e supondo que $\lim_{n\to\infty} b_n = L$, segue que $\lim_{n\to\infty} s_n = b_1 - L$.

Teorema Se $\{b_n\}$ é uma sequência tal que $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ e $\{a_n = b_n - b_{n+1}\}$ então a série $\sum a_n$ é somável e

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - L. \qquad \blacksquare$$

Exemplo $1/n \longrightarrow 0$, portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1}$$

TESTES DE CONVERGÊNCIA

Teorema: Se $\sum a_n$ converge, então $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Dito de outra forma, se $a_n \not\to 0$ então a série $\sum a_n$ é divergente.

Prova:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ , \quad s_{n-1} = s_n - a_n \quad \Longrightarrow \quad a_n = s_n - s_{n-1}$$

Se $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$, então $s_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ e portanto (por teorema sobre limites que provamos no semestre passado),

$$a_n = s_n - s_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} L - L = 0 \qquad \blacksquare$$

Este critério certamente não serve para garantir convergência ($\sum 1/n$ diverge, afinal), mas é útil para descartá-la.

Comparações

Teorema: Se $a_n \geq 0$, $\sum a_n$ converge $\iff$ as somas parciais são (uniformemente) limitadas, isto é, se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $s_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Prova: As somas parciais s_n formam uma sequência crescente, já que $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$, pois estamos supondo que $a_{n+1} \geq 0$. Vimos que sequências monótonas são convergentes $\iff$ são limitadas. $\blacksquare$

Ex: $\sum \frac{1}{n!}$ converge.

$$s_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 2.$$

Teste de Comparação: Suponha que $a_n, b_n \geq 0$, $\forall n$, e que existe um número $c > 0$ tal que

$$a_n \leq c b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ também converge.

Prova $A_n = a_1 + \dots + a_n$, $B_n = b_1 + \dots + b_n \implies A_n \leq c B_n$. Se B_n converge, como B_n é monótona, B_n é limitada por algum $M \in \mathbb{R}$. Segue que $A_n \leq cM$. Como A_n também é monótona, segue do teste anterior que A_n converge. ∎

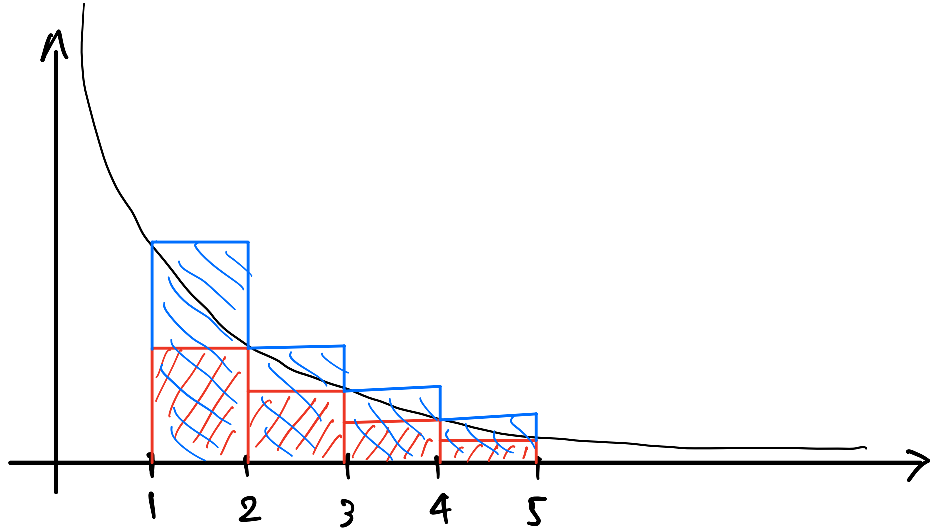
TESTE DA INTEGRAL: Seja $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ uma função positiva e decrescente, e sejam

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} f(k) \qquad e \qquad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$

Então as sequências $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ ambas convergem ou ambas divergem.

Prova

$$0\le \underset{\substack{\| \\ s_n-f(1)}}{\sum_{k=2}^{n} f(n)} \le \underset{\substack{\| \\ t_n}}{\int_1^n f(s)\,ds} \le \underset{\substack{\| \\ s_{n-1}}}{\sum_{k=1}^{n-1} f(n)}$$



Como todas essas sequências são crescentes, s_n e t_n são ou ambas limitadas ou ambas ilimitadas e, portanto, são ou ambas convergentes ou ambas divergentes. ∎

Exemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ é somável para $s > 1$.

Prova: $$\int_1^n \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{x^{1-s}}{1-s}\Bigg|_1^n = \frac{n^{1-s}-1}{1-s} = \frac{1-\frac{1}{n^{s-1}}}{s-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{s-1}$$

supondo $s > 1$

Como a integral converge, segue do teste anterior que a série também converge.

Exercício: Prove que se $s < 1$ então a série diverge.

O caso $s = 1$ é tratado a seguir.

Exemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$. Assim o teorema anterior mostra que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} \le \int_1^n \frac{dx}{x} \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}$$

Denotando por s_n a n-ésima soma parcial de $\sum 1/n$, as desigualdades acima são

$$s_n - 1 \le \ln n \le s_{n-1} = s_n - 1/n.$$

Como sabemos que $\ln x$ é uma função ilimitada, segue que s_n também o é e, portanto, a série harmônica é divergente. Note ainda que dividindo ambos os lados por s_n e usando que $s_n \uparrow \infty$ (s_n é ilimitada) segue que

$$1 - \frac{1}{s_n} \le \frac{\ln n}{s_n} \le 1 - \frac{1}{n s_n}$$

e, tomando $n \to \infty$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\left(\sum_{k=1}^{n} 1/k\right)} = 1$$

Dizemos que as sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são ASSINTOTICAMENTE IGUAIS se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

O que acabamos de provar é que $\{\ln n\}$ e $\left\{\sum_{1}^{n} 1/k\right\}$ são assintoticamente iguais.

Teorema: Suponha que $a_n, b_n > 0$ e que as sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são assintoticamente iguais (isto é, $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$). Então $\sum a_n$ converge se e somente se $\sum_n b_n$ converge.

Prova: Se $\lim a_n/b_n = 1$, é possível escolher $N \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq N$

$$\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} \implies \frac{1}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} b_n$$

O resultado agora segue do Teste de Comparação.

(Só para lembrar, se A_n e B_n são as somas parciais de $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ as desigualdades acima implicam que

$$\frac{1}{2} B_n < A_n < \frac{3}{2} B_n$$

Como $a_n, b_n > 0$, as séries são crescentes e, pelas desigualdades acima, A_n é limitada $\Leftrightarrow$ B_n é limitada. Pelo teorema sobre sequências monótonas, segue que A_n é convergente $\Leftrightarrow$ B_n é convergente.) $\blacksquare$

Exemplo: $\sum \operatorname{sen} 1/n$ diverge. Isto porque

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \longrightarrow 1 \text{ para } x \to 0 \iff \frac{\operatorname{sen} 1/y}{1/y} \longrightarrow 1 \text{ para } y \to \infty$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} 1/n}{1/n} \longrightarrow 1 \text{ para } n \to \infty,$$

isto é, $\operatorname{sen} 1/n$ e $1/n$ são assintoticamente iguais.

Observação: O conceito de sequências assintoticamente iguais é interessante, mas o que ele implica talvez não seja totalmente óbvio. Por exemplo, $a_n = n^2 + n$ e $b_n = n^2$ são assintoticamente iguais, mas

$$|a_n - b_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

É possível provar que $\sum_{k=1}^{n} a_k$ e $\ln n$ são tais que $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \ln n\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

O TESTE DA RAIZ: Vimos que $\sum x^n$ converge se (e somente se) $|x| < 1$. Assim, se $0 \leq a_n \leq x^n$, a série $\sum a_n$ também converge. As desigualdades acima são equivalentes a

$$0 \leq a_n^{1/n} \leq x \; (< 1)$$

Teorema: Suponha que $a_n \geq 0$ e que $a_n^{1/n} \longrightarrow R$, quando $n \to \infty$. Então valem as seguintes afirmações sobre a série $\sum a_n$:

(i) A série é convergente se $R < 1$.

(ii) A série é divergente se $R > 1$.

(iii) Nada se pode afirmar se $R = 1$.

Prova: Suponha que $R < 1$ e tome $R < x < 1$. Como $a_n^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} R$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq N$, $a_n^{1/n} < x$ ($= R + \varepsilon$, onde $\varepsilon = x - R$). Isto é, $0 \leq a_n < x^n$, $\forall n \geq N$. Isso implica, pelo Teste da Comparação, que $\sum_N^\infty a_n \leq \sum_N^\infty x^n = \frac{x^N}{1-x}$. Portanto $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge.

Exercício: Prove (ii).

Prova de (iii)

Vimos anteriormente

$$\cdot\ n^{-1/n} = e^{-\frac{1}{n}\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^0 = 1 \quad e \quad \sum \frac{1}{n} \text{ diverge.}$$

$$\cdot\ (n^{-2})^{1/n} = e^{-\frac{2}{n}\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad e \quad \sum 1/n^2 \text{ converge.} \qquad \blacksquare$$

Exemplo: $\displaystyle\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = e^{-n\ln(1+1/n)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right]^{1/n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} < 1.$$

Exercícios recomendados (o que nós quer dizer que vocês nós devam fazer outros também!)

Seção 10.9, pp. 391-392: 4, 5, 8, 10, 11, 15, 16, 22.

Seção 10.14, pp. 398-399: 2, 7, 16, 18.

Seção 10.16, pp. 402-403: 2, 4, 7, 9, 12, 16.

O TESTE DA RAZÃO

Teorema: Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos e suponha que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow L \quad \text{para } n \to \infty$$

Então

(i) se $L < 1$, a série converge,

(ii) se $L > 1$, a série diverge,

(iii) se $L = 1$, nada se pode afirmar.

Prova: Suponha que $L < 1$ e tome (como na prova do teste da raiz) $L < x < 1$. Para N grande o bastante, e $\forall n \geq N$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < x \implies \frac{a_{n+1}}{x^{n+1}} < \frac{a_n}{x^n}$$

Mas isso quer dizer que, a partir de $n = N$, a sequência a_n/x^n é decrescente. Em particular, $\forall n \geq N$,

$$\frac{a_n}{x^n} \leq \frac{a_N}{x^N} = c$$

uma constante

que implica que $a_n \leq c x^n$. Como sabemos que $\sum x^n$ converge, segue do teste da comparação que $\sum_N^\infty a_n$ converge e, portanto, que $\sum a_n$ converge.

Suponha agora que $L > 1$. Como acima, isso implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq N$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies a_{n+1} > a_n > 0.$$

Mas isso quer dizer que a sequência a_n é crescente a partir de $n = N$ e, como $a_N > 0$, $a_n \not\to 0$, o que impede a convergência de $\sum a_n$.

Se $L = 1$ temos:

- $\sum 1/n$ diverge e $\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \dfrac{n}{n+1} \nearrow 1$.

- $\sum 1/n^2$ converge e $\dfrac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 \nearrow 1$. $\blacksquare$

<u>Exemplo</u>: $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge.

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$

Note que isso mostra, em particular, que $\dfrac{n!}{n^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Exemplo: $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge para qualquer escolha de $x \geq 0$.

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

O mesmo vale para as séries $\sum (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n!}$ e $\sum (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

Embora isso ainda não nos permita relacionar a soma dessas séries às funções $\exp(x)$, $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, pelo menos sabemos que convergem as séries que escrevemos tantas vezes no quadro, pelo menos para $x > 0$. Já já veremos que o mesmo vale para qualquer $x \in \mathbb{C}$.

Séries Alternadas Uma série da forma

$$\sum (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - + \cdots$$

onde $a_n > 0$ é chamada uma série alternada.

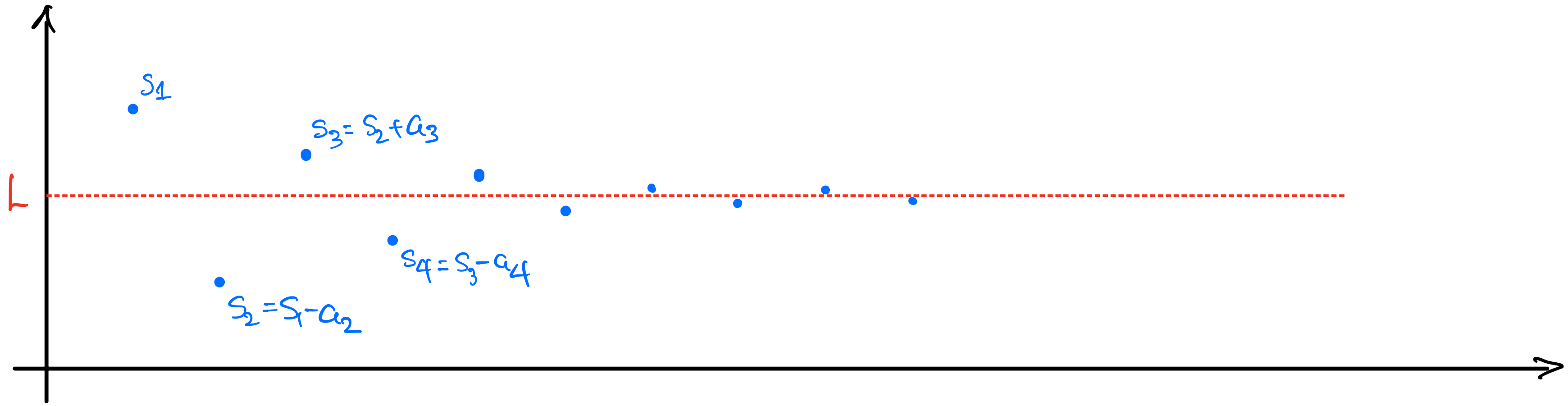
Exemplos $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \cdots = \frac{1}{1+x}$$

Regra de Leibniz: Se $\{a_n\}$ é uma sequência monótona decrescente convergindo para zero, então a série $\sum (-1)^{n-1} a_n$ converge. Além disso, se S é a soma da série e S_n são as somas parciais, vale

$$0 < (-1)^n (S - S_n) < a_{n+1} \quad , \quad \forall n \geq 1 .$$

Prova: A "representação gráfica" da prova é a seguinte:



Para ir de s_1 a s_2, subtraímos a_2. De s_2 a s_3, somamos a_3, que é menor que a_2, de forma que $s_3 < s_1$. De s_3 para s_4, subtraímos a_4, que é menor que s_3, de forma que $s_4 > s_2$. Indutivamente, provamos que $\{s_{2n-1}\}$ é uma sequência decrescente e $\{s_{2n}\}$ é crescente. Além disso, $\{s_{2n-1}\}$ é limitada inferiormente por s_2 (ou qualquer s_{2n}) e $\{s_{2n}\}$ é limitada superiormente por s_1 (ou qualquer s_{2n-1}). Segue que $s_{2n-1} \searrow S'$ e $s_{2n} \nearrow S''$, para $n \to \infty$.

Mas $\quad s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$

$\Leftrightarrow \quad S' = S''$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S .$$

<u>Exercício</u>: Olhe o gráfico acima e prove a estimativa

$$0 < (-1)^n (S - s_n) < a_{n+1} . \qquad \blacksquare$$

<u>Exemplo</u> $\quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \cdots \quad$ converge.

CONVERGÊNCIA ABSOLUTA (E CONDICIONAL): Até aqui falamos bastante de séries com termos positivos ou de séries cujos termos alternam o sinal, mas quase nada de séries mais gerais. Vejamos um teorema que permite tirar conclusões.

Teorema: Seja $\{a_n\}$ uma série de números complexos e suponha que $\sum |a_n| < \infty$. Então a série $\sum a_n$ converge e, além disso,

$$\left|\sum a_n\right| \leq \sum |a_n| .$$

Prova: Suponha, para começar, que $a_n \in \mathbb{R}$. Neste caso, definindo $b_n = a_n + |a_n|$, temos que $b_n = 0$ (se $a_n \leq 0$) ou $b_n = 2|a_n|$ (se $a_n \geq 0$). Portanto $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$ e o teste da comparação implica que $\sum b_n$ converge. Como $a_n = b_n + |a_n|$, segue que $\sum a_n$ também converge. Isso prova o teorema quando $a_n \in \mathbb{R}$.

Se $a_n = u_n + i v_n$, então as somas parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (u_k + i v_k) = \sum_{k=1}^{n} u_k + i \sum_{k=1}^{n} v_k .$$

Isso mostra que $\sum a_n$ converge se e somente se as somas parciais

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad e \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

convergem, isto é, se e somente se, as séries $\sum u_n$ e $\sum v_n$ são somáveis.

Como $|a_n| = (u_n^2 + v_n^2)^{1/2} \geq |u_n|, |v_n| \geq 0$, segue do teste da comparação que $\sum |a_n|$ convergente $\Rightarrow$ $\sum |u_n|$ e $\sum |v_n|$ são convergentes. Mas essas duas séries são séries de números reais e, neste caso, já provamos que segue que $\sum u_n$ e $\sum v_n$ são convergentes e, portanto, que $\sum a_n$ é convergente.

Para terminar, a desigualdade triangular implica que

$$0 \leq \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| ,$$

isto é, $0 \leq s_n \leq |s|_n$ (onde $|s|_n$ são as somas parciais de $\sum |a_n|$).
Mas isso então implica, passando ao limite quando $n \to \infty$, que

$$\left| \sum a_n \right| \leq \sum |a_n| \qquad \blacksquare$$

Exercício: Mostre que $|a+b| \leq |a| + |b|$ quando $a, b \in \mathbb{C}$.

Definição: Uma série $\sum a_n$ é ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE se $\sum |a_n|$ é convergente. Se $\sum a_n$ é convergente, mas $\sum |a_n|$ não o é, então $\sum a_n$ é dita CONDICIONALMENTE CONVERGENTE.

Ex: $\sum (-1)^{n-1} 1/n$ é condicionalmente convergente.

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são absolutamente convergentes e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, então $\sum (\alpha a_n + \beta b_n)$ é absolutamente convergente, pela desigualdade triangular novamente

$$\sum_{n=1}^{N} |\alpha a_n + \beta b_n| \leq \sum_{1}^{N} \left(|\alpha||a_n| + |\beta||b_n| \right) \leq |\alpha| \sum_{1}^{N} |a_n| + |\beta| \sum_{1}^{N} |b_n|$$

Isso mostra que as somas parciais de $\sum |\alpha a_n + \beta b_n|$ são limitadas e, portanto, a série de números positivos converge.

TESTES DE ABEL E DIRICHLET

<u>Identidade de Abel</u>: Sejam $\{a_n\}_{n=1}^{N}$ e $\{b_n\}_{n=1}^{N}$ coleções finitas de números complexos. Então vale a seguinte igualdade, para todo $n < N$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}),} \quad \text{onde } A_n = \sum_{k=1}^{n} a_n .$$

<u>Prova</u>: Definindo $A_0 = 0$, $a_k = A_k - A_{k-1}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ e

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} \quad \blacksquare$$

Agora supomos que $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ são sequências infinitas: como podemos usar a igualdade acima para provar algo interessante?

TESTE DE DIRICHLET: Sejam $\sum a_n$ uma série de números complexos cujas somas parciais formam uma sequência limitada e $\{b_n\}$ uma sequência decrescente (de números positivos) convergindo para 0. Então a série $\sum a_n b_n$ converge.

Prova: A identidade de Abel

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1})$$

mostra que $\sum a_n b_n$ é somável $\Leftrightarrow$ $A_n b_{n+1}$ converge e $\sum A_n (b_n - b_{n+1})$ é somável. Como estamos supondo que existe $M > 0$ tal que $|A_n| \leq M$ $\forall n$ e que $b_n \searrow 0$, segue que $A_n b_{n+1} \longrightarrow 0$. Além disso, como b_n é decrescente, $b_n - b_{n+1} \geq 0$ e assim

$$|A_k (b_k - b_{k+1})| \leq M (b_k - b_{k+1})$$

e, como $\sum (b_k - b_{k+1})$ é uma soma telescópica e $b_n \searrow 0$, segue que

$\sum |A_n(b_n - b_{n+1})|$ é somável, isto é, $\sum_n A_n(b_n - b_{n+1})$ é absolutamente convergente, que é o que precisávamos provar. $\blacksquare$

<u>TESTE DE ABEL</u>: Seja $\sum a_n$ uma série convergente de termos complexos e $\{b_n\}$ uma seqüência monótona e convergente de números reais. Então $\sum a_n b_n$ converge.

<u>Prova</u>: Exercício: use novamente a Identidade de Abel.

<u>Exemplo</u>: Seja $\{b_n\}$ uma seqüência decrescente convergindo para 0. Por exemplo, tome $b_n = n^{-\alpha}$, para qualquer $\alpha > 0$. Então já sabíamos que $\sum (-1)^n b_n$ converge pelo teorema de Leibniz, mas o teste de Dirichlet dá outra prova disso, já que a soma $|\sum (-1)^n|$ é limitada por 1.

$$-1, \quad -1 + (-1)^2 = 0, \quad -1 + (-1)^2 + (-1)^3 = -1, \quad -1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 = 0, \ldots$$

Teorema: Seja $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, isto é, seja θ um número real que não é múltiplo de π. Então

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2ik\theta} = \frac{\operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen}\theta} \cdot e^{i(n+1)\theta}$$

Disso segue que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} e^{2ik\theta} \right| \leq \frac{1}{|\operatorname{sen}\theta|} .$$

$\varphi = 2\theta$ $\Longleftrightarrow$

$\varphi \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, isto é, $e^{i\varphi} \neq 1$ $\Longrightarrow$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} e^{ik\varphi} \right| \leq \frac{1}{\left|\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right|}$$

Prova: A identidade

$$x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1} = x \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

vale para qualquer $x \in \mathbb{C}$. Tomando $x = e^{2i\theta}$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2ik\theta} = e^{2i\theta} \cdot \frac{e^{2in\theta} - 1}{e^{2i\theta} - 1} = e^{i(n+1)\theta} \cdot \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = e^{i(n+1)\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

(coloque $\dfrac{e^{in\theta}}{e^{i\theta}}$ em evidência na fração)

$\blacksquare$

Exemplo: Voltando ao exemplo anterior onde $b_n \downarrow 0$, podemos agora usar o teste de Dirichlet para concluir que, para todo $x \in \mathbb{C}$, com $|x| = 1$ e $x \neq 1$, a série $\sum b_n x^n$ converge. Em particular, para qualquer $\alpha > 0$, $\sum n^{-\alpha} x^n$ converge para todo $x \in \mathbb{C}$, $|x| = 1$, $x \neq 1$.

Escrevendo $x = e^{i\theta}$, $x^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$ e assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} = \sum \frac{\cos n\theta}{n^\alpha} + i \sum \frac{\operatorname{sen} n\theta}{n^\alpha}$$

e concluímos que as séries reais convergem para todo $\alpha > 0$. Se $\alpha > 1$, isso é consequência da comparação com $\sum n^{-\alpha}$ e do teste de integral, mas para $0 < \alpha \leq 1$, esse é um novo resultado.

Exercícios: Seção 10.20, pp. 409-411: 1, 4, 7, 11, 15, 33, 38, 44, 52.

Convergência condicional x absoluta

Vamos comentar, sem provas, algumas coisas interessantes sobre séries que convergem condicional, mas não absolutamente.

Teorema: Se $\sum a_n$ converge absolutamente, então qualquer reordenação $\sum b_n$ (de $\sum a_n$) também converge para a mesma soma.

Isto é, se a série $\sum |a_n|$ converge, então não importa a ordem na qual os termos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são somados: a soma sempre converge e o limite é sempre o mesmo.

Ex: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \cdots$

Isso, no entanto, não é o caso com séries que são apenas relativamente convergentes. Por exemplo, é possível mostrar (veja Apostol) que

- $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \cdots = \ln 2$

- $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots = \frac{3}{2} \ln 2$

Na verdade, algo muito mais radical acontece:

Teorema de Reordenamento de Riemann: Se $\sum a_n$ é uma série de termos reais que é condicionalmente convergente e S é um número real qualquer, então existe um reordenamento $\sum b_n$ de $\sum a_n$ tal que $\sum b_n = S$.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Quando falamos do teste da integral, estivemos a ponto de discutir o que discutimos agora. Por exemplo, se calculamos (supondo $s \neq 1$)

$$\int_1^b \frac{dx}{x^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s}\Big|_1^b = \frac{b^{1-s}-1}{1-s} = \frac{1-b^{1-s}}{s-1}.$$

Como $\begin{cases} \text{se } s>1, \ b^{1-s} \searrow 0 \text{ com } b \to \infty \\ \text{se } s<1, \ b^{1-s} \nearrow \infty \text{ com } b \to \infty \end{cases}$, dá vontade de dizer que

- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$ se $s > 1$,

- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ diverge se $s \leq 1$ (já que para $s=1$ o logaritmo $\nearrow \infty$ para $b \to \infty$).

Da mesma maneira, se calculamos novamente (com $s \neq 1$)

$$\int_a^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} \Big|_a^1 = \frac{1-a^{1-s}}{1-s},$$

como, $\begin{cases} \text{se } s<1, \ a^{1-s} \searrow 0 \text{ com } a \to 0 \\ \text{se } s>1, \ a^{1-s} \nearrow \infty \text{ com } a \to 0 \end{cases}$, dá vontade de dizer

que

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}$ se $s<1$,

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ diverge se $s \geq 1$.

Integrais desse tipo são chamadas integrais IMPRÓPRIAS, já que envolvem um processo de limite de integrais PRÓPRIAS, isto é, integrais de funções limitadas sobre intervalos finitos.

Exemplo: $\int_0^b \operatorname{sen} x \, dx = 1 - \cos b$. Como $\cos b$ não converge para $b \to \infty$, a integral $\int_0^\infty \operatorname{sen} x \, dx$ diverge.

Exemplo: Para $a > 0$,

$$\int_0^b e^{-ax} dx = \frac{e^{-ax}}{-a} \Big|_0^b = \frac{1 - e^{-ab}}{a} \xrightarrow[b \to \infty]{} \frac{1}{a}$$

$$\int_{-b}^0 e^{-a|x|} dx = \int_0^b e^{-ax} dx$$

Obs: O valor absoluto é fundamental aqui, já que $\int_{-\infty}^0 e^{-ax} dx$ diverge.

Portanto, podemos calcular a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-a|x|} dx = \lim_{b \to \infty} \int_{-b}^b e^{-a|x|} dx = \frac{2}{a}$$

Teorema: Sejam f, g funções não negativas e integráveis sobre qualquer intervalo finito. Suponha que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ e que $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge. Então $\int_a^\infty f(x)\,dx$ também converge.

Prova: Exercício. $\blacksquare$

Exemplo: $\int_1^\infty e^{-x} x^s \, dx$ converge para todo $s \in \mathbb{R}$.

- $e^{-x} \cdot x^\ell \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$, para todo $\ell \in \mathbb{R}$: Prove isso!

- Portanto, $e^{-x} x^{s+2} = (e^{-x} \cdot x^s) \cdot x^2 \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$, o que quer dizer que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que, $\forall x \geq a$, $e^{-x} \cdot x^s \leq x^{-2}$. Como $\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge, o teorema acima implica que $\int_a^\infty e^{-x} x^s \, dx$ converge. Como

$$\int_1^\infty e^{-x} x^s \, dx = \int_1^a e^{-x} x^s \, dx + \int_a^\infty e^{-x} x^s \, ds,$$

verificamos a afirmação.

Exemplo: $\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ converge para todo $s > 0$.

Isso porque $\int^\infty e^{-x} x^{s-1}$ converge para qualquer $s \in \mathbb{R}$, como acabamos de verificar e, para $x \downarrow 0$, $e^{-x} \approx 1$ e portanto a parte importante de se verificar e $\int_0 x^{s-1} dx$, que converge $\Leftrightarrow s > 0$.

A função $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ chama-se FUNÇÃO GAMA e tem a seguinte propriedade interessante:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Prova: Integre por partes para provar que $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$, depois use indução.

Exercícios: Seção 10.22, pp. 414-415: 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 13.
Seção 10.24, pp. 420-421: 2, 3, 4, 5, 9, 12, 16.