GABARITO

MAP 2110 – MODELAGEM E MATEMÁTICA **1º. Semestre - 2023**

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

1º PROVA **02/05/2022**

Questão 1 (3.5 pts) – Uma pessoa financia um imóvel de R$ 500.000 reais em 30 anos, a uma taxa de 8,99% ao ano, o que corresponde a uma taxa mensal de 0,72%.

a) (1pt) Qual o valor mensal da prestação?
b) (1pt) Em quanto tempo o valor da dívida será de 75% do valor inicial?
c) (1.5pt) Após 15 anos de financiamento um novo banco desejando atrair clientes oferece uma taxa anual de 7,5 %. Qual seria o valor da prestação, para terminar o financiamento, se o cliente optasse pelo novo banco?

Q1 $r = 0,0072$

a) $a_k = r^k c + \frac{b}{1-r}$; $c = a_0 - a^*$

$a^* = \frac{b}{1-r}$

$k = 30 \text{ ano} \times 12 \frac{\text{meses}}{\text{ano}} = 360$

$a_0 = 500\,000$

$a_k = r^k (a_0 - a^*) + a^*$

$0 = r^k (a_0 - a^*) + a^* = r^k a_0 + (1 - r^k) a^*$

$a^* = \frac{r^k}{(r^k - 1)} a_0$; $r^k = (1,0072)^{360} = 13,23121$

$r^k - 1 = 12,23121$

$a^* = \frac{13,23121}{12,23121} \cdot 500\,000 = 540879$

$a^* = \frac{b}{1-r} \Rightarrow b = a^* \cdot (1-r)$

$= 540\,879 (1 - 1,0072)$

$= -3894,12$

Validação da resposta por implementação no Excel

a0	500000
r	1,0072
b	-3894,12
t	a_n
0	500000
1	499705,7
2	499409,3

....

358	7704,941
359	3866,289
360	-1,3E-08

b) $a_k = 0{,}75\, a_0$

$$a_k = r^k (a_0 - a^*) + a^*$$

$$0{,}75 a_0 = r^k (a_0 - a^*) + a^*$$

$$r^k = \frac{0{,}75\, a_0 - a^*}{(a_0 - a^*)} = \frac{0.75 * 500000 - 540879}{(500000 - 540879)}$$

$$r^k = 4{,}057803$$

$$\log r^k = \log(4{,}057803)$$

$$k \log r = \log(4{,}057803)$$

$$k = \frac{\log(4{,}057803)}{\log(1{,}0072)} = \frac{1{,}400642}{0{,}007174}$$

$$k = 195{,}2432 \text{ meses} \equiv 16{,}27027 \text{ anos}$$

Validação da resposta por implementação no Excel

193	377648,1
194	376472,9
195	375289,2
196	374097

c) $k = 15 \text{ anos} = 15 * 12 = 180 \text{ meses}$

$$a_k = r^k(a_0 - a^*) + a^*$$

$$= (1{,}0072)^{180} (500\,000 - 540\,879) + 540\,879$$

$$= 392\,182{,}7$$

$$r_{anual} = (1{,}075)^{(1/12)} = 1{,}006045$$

$\rightarrow$ + 15 anos

$$r^k = (1{,}006045)^{180} = 2{,}9858877$$

$$a^* = \frac{r^k}{(r^k - 1)} a_0 \leftarrow a_{180}$$

$$a^* = \frac{2{,}9858877}{1{,}9858877} * 392\,182{,}7 = 592\,390{,}5$$

$$b = a^* \cdot (1 - r) = 592\,390{,}5 \cdot (0{,}006045)$$

$$= -3580{,}95$$

Validação da resposta por implementação no Excel

a0	392182,7
r	1,006045
b	-3580,95

t	a_n			
0	392182,7		178	7105,255
1	390972,5		179	3567,256
2	389754,9	....	180	7,870075
			181	-3573,03

Questão 2 (3.5 pts) – A classe de modelos de interação de espécies predador-presa é utilizada em diversas aplicações. Considere o modelo aproximado utilizando a equação de diferenças:

$$x_{n+1} = ax_n - b * x_n * y_n$$
$$y_{n+1} = cy_n + d * x_n * y_n$$

Onde todas as constantes *a, b, c,* e *d* são positivas. A população das presas é representada por x_n e dos predadores por x_n.

a) (1.0pt) Encontre o ponto de equilíbrio não-nulo do modelo, em função dos parâmetros *a, b, c,* e *d.*

b) (1.0pt) Para *a = 1.2, b = 0.001, c = 0.8 e d = 0.002* encontre o valor do ponto de equilíbrio e simule o modelo mostrando que seu cálculo está correto.

c) (1.5pt) Aumente a população inicial de presas em 10% em relação ao ponto de equilíbrio e reduza a população inicial de predadores em 10% em relação ao valor de equilíbrio. Simule o modelo por 5 iterações. Qual a tendência observada?

Q2

a) $x_{n+1} = a x_n - b x_n y_n$

$y_{n+1} = c y_n + d x_n y_n$

Equilíbrio $x_{n+1} = x_n = x^*$

$y_{n+1} = y_n = y^*$

$x^* = a x^* - b x^* y^*$

$y^* = c y^* + d x^* y^*$

$(a-1)\, x^* - b x^* y^* = 0$

$(c-1)\, y^* + d x^* y^* = 0$

$[(a-1) - b y^*]\, x^* = 0$

$[(c-1) + d x^*]\, y^* = 0$

$(a-1) - b y^* = 0 \Rightarrow y^* = \dfrac{(a-1)}{b}$

$(c-1) + d x^* = 0 \Rightarrow x^* = \dfrac{(c-1)}{-d} = \dfrac{(1-c)}{d}$

b)

$a = 1,2$; $b = 0,001$

$c = 0,8$; $d = 0,002$

$$x^* = \frac{(1-0,8)}{0,002} = \frac{0,2}{0,002} = 100$$

$$y^* = \frac{(1,2-1)}{0,001} = \frac{0,2}{0,001} = 200$$

x_n	y_n	$x_n y_n$
100	200	20000

n	xn	yn	xn*yn
0	100	200	20000
1	100	200	

Implementando x* e y* no modelo obtém-se o mesmo resultado.

c)

$x_0 = 1,1 \times x^* = 1,1 \cdot 100 = 110$

$y_0 = 0,9 \times y^* = 0,9 \cdot 200 = 180$

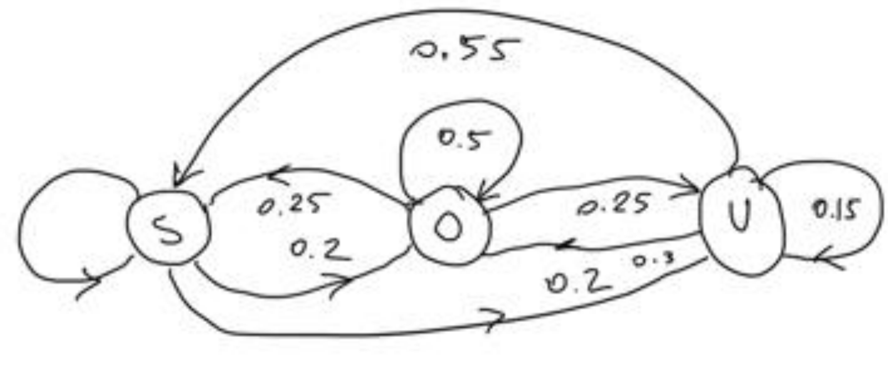
n	xn	yn	xn*yn
0	110	180	19800
1	112,2	183,6	20599,9
2	114,04	188,08	21448,6
3	115,399	193,361	22313,8
4	116,166	199,316	23153,7
5	116,245	205,761	23918,6

A população de presas continua crescendo se afastando do valor do equilíbrio. A população de predadores também cresce e se aproxima do valor de equilíbrio, mas a quinta iteração indica que ela irá continuar crescendo. Não se tem indicação de que o equilíbrio é estável.

Questão 3 (3 pts) – A cidade de Viena na Áustria tem um serviço de aluguel público de bicicletas. Os principais pontos de aluguel são a Catedral de São Estevão (S), a Ópera de Viena (O) e a sede das Nações Unidas (U). Das pessoas que alugam as bicicletas na catedral de São Estevão 60% devolvem as bicicletas no mesmo ponto, 20% na Ópera de Viena e 20% nas Nações Unidas. Das pessoas que alugam as bicicletas na Ópera, 50% devolvem as bicicletas no mesmo ponto, 25% devolvem na catedral de São Estevão e 25% nas Nações Unidas. Das pessoas que alugam as bicicletas nas Nações Unidas 15% devolvem as bicicletas no mesmo ponto, 55% na catedral de São Estevão e 30% na Ópera.

a) (1pt) Construa o modelo do fluxo de bicicletas diário entre os principais pontos.
b) (2pt) Qual é o ponto de equilíbrio não nulo do sistema?

Q3



a)

$$S_{n+1} = 0.6\, S_n + 0.25\, O_n + 0.55\, U_n$$

$$O_{n+1} = 0.2\, S_n + 0.5\, O_n + 0.3\, U_n$$

$$U_{n+1} = 0.2\, S_n + 0.25\, O_n + 0.15\, U_n$$

$U_{n+1} = \ldots$

b)

$$\begin{Bmatrix} S \\ O \\ U \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.25 & 0.55 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.25 & 0.15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S \\ O \\ U \end{Bmatrix}_{n}$$

Equilíbrio $\begin{Bmatrix} S \\ O \\ U \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{Bmatrix} S \\ O \\ U \end{Bmatrix}_{n} = \begin{Bmatrix} S \\ O \\ U \end{Bmatrix}^*$

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0.25 & 0.55 \\ 0.2 & -0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.25 & -0.85 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S \\ O \\ U \end{Bmatrix}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 + \frac{L_1}{2} \Rightarrow \\ L_3 + \frac{L_1}{2} \Rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} -0.4 & 0.25 & 0.55 \\ 0 & -0.375 & 0.575 \\ 0 & 0.375 & -0.575 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S \\ O \\ U \end{Bmatrix}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Linha 2 $\quad -0.375\,O^* + 0.575\,U^* = 0 \Rightarrow$

$$O^* = \frac{-0.575}{-0.375} U^*$$

$$O^* = 1.533\,U^*$$

$$-0.4\,S^* + 0.25\,O^* + 0.55\,U^* = 0$$

$$S^* = \frac{-0.25\,O^* - 0.55\,U^*}{-0.4} = \frac{-0.25 * 1.533 - 0.55}{-0.4} U^*$$

$$S^* = 2.333\,U^*$$

logo $\quad S = 2.333\,U^* \; ; \; O^* = 1.533\,U^*$

Validando a solução por implementação do Excel.

n	S	O	U
0	233,3333	153,3333	100
1	233,3333	153,3333	100
2	233,3333	153,3333	100
3	233,3333	153,3333	100