Exercícios Extra Classe 4B - RESOLUÇÃO

1 Exercício 1

Suponha que um dado equilibrado é lançado três vezes, independentemente. Construa o espaço amostral para tal experimento. Qual a probabilidade de cada ponto amostral?

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1,1), & (1,1,2), & \cdots & (1,1,6), \\ (1,2,1), & (1,2,2), & \cdots & (1,2,6), \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1,6,1), & (1,6,2), & \cdots & (1,6,6), \\ (2,1,1), & (2,1,2), & \cdots & (2,1,6), \\ (2,2,1), & (2,2,2), & \cdots & (2,2,6), \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (2,6,1), & (2,6,2), & \cdots & (2,6,6), \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (6,1,1), & (6,1,2), & \cdots & (6,1,6), \\ (6,2,1), & (6,2,2), & \cdots & (6,2,6), \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (6,6,1), & (6,6,2), & \cdots & (6,6,6) \end{array} \right\}$$

O espaço amostral Ω tem tamanho 216, portanto, dado que trata-se de um dado equilibrado e todos os resultados do dado são igualmente prováveis, a probabilidade de cada ponto amostral é $\frac{1}{216} \approx 0,0046$.

2 Exercício 2

Sejam A e B dois eventos independentes. Mostre que B e A^C e B^C são independentes.

3 Exercício 3

As letras no código morse são formadas por uma sucessão de traços e pontos com repetições permissíveis. Quantas letras podem-se formar com dez símbolos ou menos? Considerando que temos dois símbolos (traço e ponto), a quantidade de letras que podemos formar com 10 símbolos é 2^{10}. Com 9 símbolos, podemos formar 2^9 letras. Esse padrão se repete até letras com um símbolo, que são $2^1 = 2$, ou seja, um traço ou um ponto. Somando tudo, temos a quantidade total Q:

$$Q = \sum_{n=1}^{10} 2^n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} = 2046$$

4 Exercício 4

Estando os números $1, 2, ..., n$ dispostos em ordem aleatória, determine a probabilidade de que os dígitos: (a) 1 e 2; (b) 1, 2, e 3 apareçam como vizinhos nessa ordem.
Primeiramente, podemos obter que o total de ordenamentos possíveis para n números é $n!$. A partir daí podemos calcular as possibilidades para os eventos (a) e (b), determinados no enunciado.

(a) Dado que temos n números, temos n posições possíveis para cada número. Como 1 e 2 são dois números e queremos que eles estejam lado a lado, nessa exata ordem, temos $n-1$ possibilidades de posicionamento para esse par de números, pois se o número 1 estivesse na posição n, o número 2 não estaria à sua direita, como queremos. Além das $n-1$ possibilidades de posição para os números 1 e 2, temos que os outros $n-2$ números podem ser permutados entre si. Dessa forma, temos que a probabilidade de que os números 1 e 2 apareçam como vizinhos nessa exata forma é:

$$\frac{(n-1)(n-2)!}{n!} = \frac{(n-1)(n-2)!}{n(n-1)(n-2)!} = \frac{1}{n}$$

(b) De forma análoga ao item anterior, como queremos que 1, 2, e 3 estejam lado a lado, nessa exata ordem, temos $n-2$ possibilidades de posicionamento para esse trio de números. Além disso, temos também que os outros $n-3$ números podem ser permutados entre si. Dessa forma, temos que a probabilidade de que os números 1, 2 e 3 apareçam como vizinhos nessa exata forma é:

$$\frac{(n-2)(n-3)!}{n!} = \frac{(n-2)(n-3)!}{n(n-1)(n-2)(n-3)!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

5 Exercício 5

Determine a probabilidade de que entre três dígitos aleatórios apareçam exatamente 1, 2 ou 3 algarismos distintos.

Para três números, o total de possibilidades é 10^3, dado que, para cada um dos três, temos 10 possibilidades. Para três números distintos, temos 10 possibilidades para o primeiro, 9 para o segundo e 8 para o terceiro, portanto temos a probabilidade de $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{10^3} = 0,72$. Para dois números distintos, temos 10 possibilidades para o primeiro, 9 para o segundo, e 1 para o terceiro. Além disso, temos 3 possíveis ordenamentos desses números (por exemplo: 112, 121, 211). Portanto temos a probabilidade $\frac{(10 \cdot 9 \cdot 1) \times 3}{10^3} = 0,27$. Por fim, para um algarismo distinto, temos que o primeiro tem 10 possibilidades e o segundo e o terceiro apenas uma (necessariamente o mesmo dígito do primeiro), portanto temos probabiliadde de $\frac{10 \cdot 1 \cdot 1}{10^3} = 0,01$.

6 Exercício 6

Uma caixa contém noventa parafusos bons e 10 parafusos defeituosos. Se dez parafusos são escolhidos, qual a probabilidade de que nenhum seja defeituoso? Temos 100 parafusos no total, sendo que 90 são bons e 10 são defeituosos. Escolheremos 10 dentre os 100, dado que nenhum é defeituoso. Isso equivale a escolher 10 dentre 90 parafusos bons e 0 dentre os parafusos defeituosos. Podemos representar isso como:

$$\frac{\binom{90}{10} \cdot \binom{10}{0}}{\binom{100}{10}} = \frac{\frac{90!}{10!80!} \cdot \frac{10!}{0!10!}}{\frac{100!}{10!90!}} = \frac{90!}{100!} = \frac{1}{100 \times 99 \times 98 \times \cdots \times 91}$$

7 Exercício 7

8 Exercício 8

9 Exercício 9

Encontre a probabilidade de que, em cinco lançamentos de uma moeda honesta, resulte CARA em pelo menos três vezes sucessivamente.
A probabilidade de dar cara pelo menos três vezes sucessivamente é a probabilidade de dar cara três vezes sucessivamente mais a probabilidade de dar cara quatro vezes sucessivamente mais a probabilidade de dar cara cinco vezes. Temos três possibilidades de dar cara três vezes sucessivamente: começando na primeira tentativa, na segunda ou, no máximo, na terceira. Já quatro vezes cara sucessivamente pode acontecer começando na primeira ou na segunda. Cara cinco vezes só acontece uma vez dado que são cinco lançamentos. Denotando a probabilidade de dar cara por p, temos portanto:

$$3 \cdot p^3 \cdot (1-p)^2 + 2 \cdot p^4 \cdot (1-p) + p^5$$

10 Exercício 10

(IDÊNTICO AO EXERCÍCIO 6 DA LISTA 4A)

11 Exercício 11

Um estudante se submete a um exame de múltipla escolha no qual cada questão tem cinco respostas possíveis das quais exatamente uma é correta. O estudante seleciona a resposta correta se ele sabe a resposta. Caso contrário, ele seleciona ao acaso uma resposta entre as cinco possíveis. Suponha que o estudante saiba a resposta de 70% das questões.

(a) Qual a probabilidade de que o estudante escolha a resposta correta para uma dada questão?

Em 70% das questões, o aluno sabe a resposta, portanto tem probabilidade 1,0 de acertar. No restante das questões (30%), ele chuta uma resposta entre as cinco alternativas, portanto com probabilidade 0,2 de acerto. Dessa forma, a probabilidade do aluno acertar uma questão é:

$$0,70 \cdot 1,00 + 0,30 \cdot 0,20 = 0,70 + 0,06 = 0,76$$

(b) Se o estudante escolhe a resposta correta para uma dada questão, qual a probabilidade de que ele sabia a resposta?

Dado que saber (S) a reposta e acertar (A) a resposta são independentes, temos que:

$$P(S) = P(S|A) \cdot P(A) \implies P(S|A) = \frac{P(S)}{P(A)} = \frac{0,70}{0,76} \approx 0,92$$

12 Exercício 12

Suponha que automóveis são produzidos casualmente pelos cinco dias úteis da semana. As porcentagens de automóveis amarelos produzidos nos diferentes dias são: segunda - 4%; terça, quarta e quinta - 1%; sexta - 2%. Se você compra um automóvel amarelo, qual a probabilidade de que o mesmo foi produzido numa segunda feira?

$$\frac{0,04}{0,04 + 3 \cdot 0,01 + 0,02} = \frac{0,04}{0,09} \approx 0,44$$

13 Exercício 13

Uma caixa contém 10 bolas das quais 6 são pretas e 4 são brancas.

(a) Remove-se três bolas sem observar suas cores. Determine a probabilidade de que uma quarta bola removida da caixa seja branca. Assuma que as 10 bolas são igualmente prováveis de serem removidas.

Com essa configuração, a retirada das três primeiras bolas podem ter acontecido de 8 maneiras diferentes: PPP, PPB, PBP, BPP, PBB, BPB, BBP, BBB (sendo P bola preta e B bola branca). Como queremos saber a probabilidade da quarta bola ser branca, temos que calcular a probabilidade de cada cenário: PPPB, PPBB, PBPB, BPPB, PBBB, BPBB, BBPB, BBBB. Para o cenário PPPB, temos a seguinte probabilidade associada:

$$\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{480}{5040}$$

Para os cenários PPBB, PBPB e BPPB, temos a seguinte probabilidade associada:

$$\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{360}{5040}$$

Para os cenários PBBB, BPBB e BBPB, temos a seguinte probabilidade associada:

$$\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{144}{5040}$$

Por fim, para o cenário BBBB, temos a seguinte probabilidade associada:

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{24}{5040}$$

Somando todas as probabilidades, temos a probabilidade de que a quarta bola removida seja branca:

$$\frac{480}{5040} + 3 \cdot \frac{360}{5040} + 3 \cdot \frac{144}{5040} + \frac{24}{5040} = \frac{2016}{5040} = 0,40$$