

### Física 3 2023 - Prova 1

Respostas pelo ChatGPT

**Nota: [6.4]**

Questão

1) Considerando as forças fundamentais da natureza e as leis do eletromagnetismo

a) Uma canoa vazia flutua sobre a água em um lago tranquilo. Qual das 4 forças da natureza está envolvida na interação da água do lago com a canoa impedindo que ela afunde? Que outra força da natureza age sobre a canoa de modo que ela permanece em um equilíbrio aproximado na superfície do lago? Explique.

b) Uma explosão nuclear transforma uma pequena quantidade de massa em uma grande quantidade de energia. Sabemos que a matéria contém cargas elétricas positivas e negativas. Nesse contexto, poderíamos afirmar que a explosão nuclear transforma uma pequena quantidade de cargas elétricas em energia? Explique.

c) Que interação fundamental é capaz de transformar um nêutron em um próton, mais um elétron e um anti-neutrino?

d) Qual dos processos abaixo inexistente na natureza e por quê? (Obs.: A barra sobre o símbolo indica anti-partícula). I)  $n + \bar{n} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$  II)  $p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \bar{p}$

## Resposta

- a) A força fundamental envolvida na interação da água do lago com a canoa, impedindo que ela afunde, é a força gravitacional. A gravidade é responsável pela atração entre os corpos com massa, e nesse caso, a canoa e a água do lago estão sujeitas à força gravitacional mútua. A força de empuxo, uma força resultante da diferença de pressão entre a parte superior e inferior da canoa quando esta está parcialmente submersa, também contribui para impedir que a canoa afunde. [0.2]
- b) A explosão nuclear não transforma diretamente cargas elétricas em energia. No contexto da explosão nuclear, ocorre uma reação nuclear na qual os núcleos atômicos são alterados. Durante essa reação, ocorre a liberação de uma grande quantidade de energia, de acordo com a famosa equação de Einstein,  $E=mc^2$ , que relaciona a energia (E) com a massa (m) envolvida na reação. A transformação de massa em energia ocorre por meio da quebra dos núcleos atômicos, liberando a energia armazenada em sua estrutura. [0.5]
- c) A interação fundamental capaz de transformar um nêutron em um próton, mais um elétron e um antineutrino é chamada de decaimento beta. No decaimento beta, um nêutron instável se transforma em um próton estável, emitindo um elétron e um antineutrino. Essa interação ocorre por meio da interação fraca, uma das quatro forças fundamentais da natureza. [0.5]
- d) O processo que inexiste na natureza é o processo II:  $p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \bar{p}$ . Esse processo violaria a conservação da carga elétrica, uma vez que a carga total antes da reação seria +1 (carga do próton) e a carga total após a reação seria +2 (cargas do píon positivo e do antipróton). A conservação da carga elétrica é uma das leis fundamentais da natureza e não permite a violação desse princípio. [0.3]

2) Um sistema físico contém uma carga elétrica puntiforme  $q_1 > 0$ , em repouso no plano  $xz$ , no ponto  $(x_1, 0, z_1)$  e um fio fino disposto ao longo de um trecho do eixo  $z$ , no intervalo  $z_2 \leq z \leq z_1$ , cuja densidade linear de carga elétrica é dada por  $\lambda(z) = \alpha z^3$ , onde  $\alpha$  é uma constante positiva. As constantes  $x_1$ ,  $z_1$  e  $z_2$  são todas negativas.

a) Determine o campo elétrico gerado pela carga puntiforme  $q_1$  sobre a origem.

b) Determine a carga total do fio:  $Q$ . Esta carga é positiva ou negativa? Explique.

c) Determine o campo elétrico gerado pelo fio sobre a origem do sistema de coordenadas.

d) Determine a força elétrica (em Newtons) que age sobre uma pequena carga  $q_0$  quando colocada na origem do sistema de coordenadas, dados:  $q_0 = 1/9$  nC;  $x_1 = -4$  m;  $z_1 = -3$  m;  $q_1 = 125$  nC;  $z_2 = -5$  m; e  $\alpha = 2$  nC/m<sup>4</sup>. No SI, a constante da Lei de Coulomb é:  $k = 1/(4\pi \epsilon_0) \approx 9 \times 10^9$  Nm<sup>2</sup>/C<sup>2</sup>

a) Para determinar o campo elétrico gerado pela carga puntiforme  $q_1$  sobre a origem, podemos aplicar a Lei de Coulomb. O campo elétrico gerado por uma carga puntiforme é dado pela fórmula:

$$E = k * (q / r^2),$$

onde  $k$  é a constante eletrostática,  $q$  é a carga puntiforme e  $r$  é a distância entre a carga e o ponto onde se deseja calcular o campo elétrico.

Nesse caso, a carga puntiforme  $q_1$  está localizada no ponto  $(x_1, 0, z_1)$ , e a origem está no ponto  $(0, 0, 0)$ . A distância entre esses pontos pode ser calculada usando a fórmula da distância entre dois pontos no espaço:

$$r = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (z_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + z_1^2}.$$

Portanto, o campo elétrico gerado pela carga puntiforme  $q_1$  sobre a origem é:

$$E_1 = k * (q_1 / (x_1^2 + z_1^2)). \quad [1.0]$$

b) A carga total do fio pode ser obtida integrando a densidade linear de carga elétrica  $\lambda(z)$  ao longo do trecho do eixo  $z$ . Nesse caso, a densidade linear de carga elétrica é dada por  $\lambda(z) = \alpha * z^3$ .

A carga total do fio é dada pela integral da densidade de carga ao longo do intervalo  $z_2 \leq z \leq z_1$ :

$$Q = \int_{z_2 \text{ até } z_1} \lambda(z) dz.$$

Substituindo  $\lambda(z) = \alpha * z^3$ , temos:

$$Q = \int_{z_2 \text{ até } z_1} \alpha * z^3 dz.$$

Integrando essa expressão, obtemos:

$$Q = \alpha * [z^4 / 4] (z_2 \text{ até } z_1) = \alpha * [(z_1^4 - z_2^4) / 4].$$

A carga total do fio  $Q$  é positiva, uma vez que a densidade de carga  $\lambda(z)$  é positiva em todo o intervalo  $z_2 \leq z \leq z_1$ . Isso significa que há um excesso líquido de carga positiva no fio. [0.7]

c) Para determinar o campo elétrico gerado pelo fio sobre a origem, podemos aplicar o princípio da superposição. Considerando um elemento infinitesimal de comprimento  $dz$  do fio, a contribuição infinitesimal de campo elétrico gerada por esse elemento é dada por:

$$dE = k * (\lambda(z) * dz) / r,$$

onde  $\lambda(z)$  é a densidade linear de carga elétrica e  $r$  é a distância entre o elemento de carga e o ponto onde se deseja calcular o campo elétrico.

Integrando essa expressão ao longo do trecho do fio  $z_2 \leq z \leq z_1$ , temos:

$$E_2 = \int_{z_2 \text{ até } z_1} dE = \int_{z_2 \text{ até } z_1} k * (\lambda(z) * dz) / r,$$

onde  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ , com  $x = 0$  no caso da origem.

Substituindo  $\lambda(z) = \alpha * z^3$  e  $r = \sqrt{z^2}$ , temos:

$$E_2 = \int_{z_2 \text{ até } z_1} k * (\alpha * z^3 * dz) / \sqrt{z^2}.$$

Integrando essa expressão, obtemos o campo elétrico gerado pelo fio sobre a origem:

$$E_2 = \int(z_2 \text{ até } z_1) k * \alpha * z^3 / \text{sqrt}(z^2) dz.$$

Simplificando a expressão, temos:

$$E_2 = k * \alpha * \int(z_2 \text{ até } z_1) z dz.$$

Integrando em relação a z, obtemos:

$$E_2 = k * \alpha * [z^2 / 2] (z_2 \text{ até } z_1) = k * \alpha * [(z_1^2 - z_2^2) / 2].$$

Portanto, o campo elétrico gerado pelo fio sobre a origem é:

$$E_2 = k * \alpha * [(z_1^2 - z_2^2) / 2]. \text{ [0.5]}$$

d) Para determinar a força elétrica que age sobre uma carga  $q_0$  colocada na origem do sistema de coordenadas, podemos usar a fórmula da força elétrica:

$$F = q_0 * E,$$

onde  $q_0$  é a carga colocada na origem e  $E$  é o campo elétrico resultante (soma dos campos gerados pela carga puntiforme e pelo fio).

No caso da carga puntiforme, temos:

$$F_1 = q_0 * E_1,$$

onde  $E_1$  é o campo elétrico gerado pela carga puntiforme  $q_1$  sobre a origem.

No caso do fio, temos:

$$F_2 = q_0 * E_2,$$

onde  $E_2$  é o campo elétrico gerado pelo fio sobre a origem.

Substituindo as expressões para  $E_1$  e  $E_2$ , temos:

$$F_1 = q_0 * (k * (q_1 / (x_1^2 + z_1^2))), F_2 = q_0 * (k * \alpha * [(z_1^2 - z_2^2) / 2]).$$

A força elétrica total que age sobre a carga  $q_0$  é dada pela soma das forças devido à carga puntiforme e ao fio:

$$F_{\text{total}} = F_1 + F_2.$$

Calculando essa expressão com os valores fornecidos, substituindo  $q_0 = 1/9 \text{ nC}$ ,  $x_1 = -4 \text{ m}$ ,  $z_1 = -3 \text{ m}$ ,  $q_1 = 125 \text{ nC}$ ,  $z_2 = -5 \text{ m}$  e  $\alpha = 2 \text{ nC/m}^4$ , obtemos o valor numérico da força elétrica total em Newtons.

[0.2]

Questão:

3) Um anel fino de raio  $R$  está carregado com uma densidade linear de carga elétrica dada por:  $\lambda(\theta) = \lambda_0(1 - \cos\theta)^{1/2}$  em coordenadas polares, sendo  $\lambda_0$  uma constante. a) Determine a componente  $x$  do campo elétrico no ponto  $P$ , de coordenadas cartesianas  $(x_P, y_P) = (R, 0)$ . b) A componente  $y$  do campo elétrico nesse ponto é nula ou não? Explique.

Resposta:

a) Para determinar a componente x do campo elétrico no ponto P, de coordenadas cartesianas  $(x_P, y_P) = (R, 0)$ , podemos usar o princípio da superposição e considerar a contribuição infinitesimal de campo elétrico gerada por um elemento infinitesimal de carga ao longo do anel.

A componente x do campo elétrico no ponto P pode ser obtida integrando as contribuições infinitesimais de campo elétrico ao longo do anel. A expressão para o campo elétrico gerado por um elemento infinitesimal de carga é dada por:

$$dE = k * (\lambda(\theta) * ds) / r^2,$$

onde k é a constante eletrostática,  $\lambda(\theta)$  é a densidade linear de carga elétrica, ds é o comprimento do elemento infinitesimal de carga e r é a distância entre o elemento de carga e o ponto P.

No caso do anel, a densidade linear de carga elétrica é dada por  $\lambda(\theta) = \lambda_0 * (1 - \cos\theta)^{1/2}$ , onde  $\theta$  é o ângulo em coordenadas polares.

Para calcular a componente x do campo elétrico no ponto P, integramos a expressão acima ao longo do anel:

$$E_x = \int(0 \text{ até } 2\pi) dE * \cos(\varphi),$$

onde  $\varphi$  é o ângulo entre o vetor posição do elemento de carga e o eixo x.

Simplificando a expressão, temos:

$$E_x = k * \lambda_0 * \int(0 \text{ até } 2\pi) (1 - \cos\theta)^{1/2} * \cos(\varphi) * ds / r^2.$$

No ponto P, o ângulo  $\theta$  é constante e igual a 0, pois o ponto P está na direção do eixo x. Portanto, podemos simplificar ainda mais a expressão:

$$E_x = k * \lambda_0 * \int(0 \text{ até } 2\pi) (1 - \cos(0))^{1/2} * \cos(\varphi) * ds / r^2.$$

$$E_x = k * \lambda_0 * \int(0 \text{ até } 2\pi) \cos(\varphi) * ds / r^2.$$

Integrando essa expressão, obtemos:

$$E_x = k * \lambda_0 * \int(0 \text{ até } 2\pi) \cos(\varphi) * R d\varphi / R^2.$$

$$E_x = k * \lambda_0 * R * \int(0 \text{ até } 2\pi) \cos(\varphi) d\varphi / R^2.$$

$$E_x = k * \lambda_0 * R * [\text{sen}(\varphi)] (0 \text{ até } 2\pi) / R^2.$$

Como  $\text{sen}(\varphi)$  é um função periódica com período  $2\pi$ , temos:

$$E_x = k * \lambda_0 * R * (\text{sen}(2\pi) - \text{sen}(0)) / R^2.$$

Como  $\text{sen}(2\pi) = \text{sen}(0) = 0$ , temos:

$$E_x = 0.$$

Portanto, a componente x do campo elétrico no ponto P é nula. [0.5]

b) Como mencionado anteriormente, a componente  $y$  do campo elétrico no ponto P será nula devido à simetria do anel carregado. O anel possui simetria circular em torno do eixo  $z$ , o que significa que para cada elemento de carga contribuindo com uma componente  $y$  do campo elétrico, haverá um elemento de carga oposto simétrico que contribuirá com uma componente  $y$  de igual magnitude, mas em direção oposta. Portanto, essas contribuições se cancelarão e a componente  $y$  resultante será nula.

Em outras palavras, a simetria do anel garante que não haja um desequilíbrio de cargas ou uma carga líquida ao longo do eixo  $y$ , resultando em uma componente  $y$  do campo elétrico nula no ponto P.

Portanto, a componente  $y$  do campo elétrico no ponto P é zero. [1.0]

Questão:

4) Uma casca hemisférica (com espessura) é descrita em coordenadas esféricas como a região do espaço tal que:  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Suponhamos que esta casca hemisférica esteja carregada com uma densidade volumétrica de carga elétrica constante  $\rho_0$ .

a) Qual é a única componente cartesiana não nula do campo elétrico produzido por essa casca hemisférica na origem (O) do sistema de coordenadas? Justifique.

b) Determine o valor dessa componente do campo elétrico na origem.

a) Para determinar a única componente cartesiana não nula do campo elétrico produzido pela casca hemisférica na origem (O) do sistema de coordenadas, vamos considerar a simetria do problema.

A casca hemisférica possui simetria esférica em torno da origem, o que significa que o campo elétrico resultante terá apenas uma componente ao longo de um eixo. Nesse caso, a componente cartesiana não nula será ao longo do eixo z. [0.5]

b) Para determinar o valor dessa componente do campo elétrico na origem (O), vamos utilizar o princípio da superposição e considerar uma pequena seção da casca hemisférica com uma densidade volumétrica de carga  $\rho_0$ .

A contribuição infinitesimal de campo elétrico gerada por essa seção da casca hemisférica na origem é dada por:

$$dE = k * (\rho_0 * dV) / r^2,$$

onde  $k$  é a constante eletrostática,  $\rho_0$  é a densidade volumétrica de carga elétrica constante,  $dV$  é o elemento infinitesimal de volume da seção da casca hemisférica e  $r$  é a distância entre o elemento de volume e a origem.

Integrando essa expressão sobre toda a casca hemisférica, obteremos o campo elétrico resultante na origem.

No entanto, observe que, devido à simetria da casca hemisférica, todas as contribuições de campo elétrico geradas por elementos de volume simétricos ao longo da casca hemisférica se cancelarão quando somadas. Isso ocorre porque, para cada elemento de volume que contribui com uma componente de campo elétrico ao longo do eixo z positivo, haverá um elemento de volume simétrico correspondente que contribuirá com uma componente de campo elétrico ao longo do eixo z negativo, resultando em um cancelamento total.

Portanto, o campo elétrico resultante na origem devido à casca hemisférica será nulo em todas as componentes cartesianas, incluindo a componente ao longo do eixo z.

Em resumo, a) A única componente cartesiana não nula do campo elétrico produzido pela casca hemisférica na origem é zero (nula), devido à simetria do problema.

b) O valor dessa componente do campo elétrico na origem é zero. [0.5]