Derivadas, Derivadas de Ordem Superior, Derivadas de algumas funções
Aula 15

Primeiro Semestre de 2023

A derivada: Definição

Definição

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função e* $p \in D_f$ *um ponto de acumulação de* D_f.

- *Se existir o limite* $\lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = L \in \mathbb{R}$, *diremos que* L *é a* **derivada** *de* f *em* p *e escreveremos*

$$f'(p) = L = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

- *Se* f *admitir derivada* $f'(p)$ *em* p, *diremos que* f *é* **derivável** *ou* **diferenciável em** p.
- *Se* f *admitir derivada em todo ponto de* $A \subset D_f$, *diremos que* f *é* **derivável** *ou* **diferenciável em** $A \subset D_f$. *Se* $A = D_f$, *diremos simplesmente que* f *é* **derivável** *ou* **diferenciável**.

A função derivada

Já definimos a derivada de $f : D_f \to \mathbb{R}$ em pontos $p \in D_f$ que também são pontos de acumulação de D_f. Sendo assim, se

$$\boxed{D_{f'}} = \boxed{\Big\{ x \in D_f : \ x \text{ é um ponto de acumulação de } D_f}$$

$$\boxed{\text{e } \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ existe.} \Big\} \subset D_f}$$

definimos a função $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ por

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad x \in D_{f'}.}$$

Esta nova função f', é chamada **função derivada** ou, simplesmente, **derivada** de f.

Exemplo

Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt{x-1}$ e determine o domínio de f'.

Solução: Note que, $D_f = [1, \infty)$ e para todo $x > 1$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}}{h},$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-1) - (x-1)}{h} \frac{1}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

Logo $D_{f'} = (1, \infty)$

Notações alternativas. Seja $y = f(x)$, onde f é uma função derivável. Podemos escrever, alternativamente,

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(y) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

para denotar a derivada de y ou f em relação à variável x.

O símbolo $\boxed{\dfrac{dy}{dx} \text{ não é um quociente;}}$ trata-se de uma notação.

Utilizando a notação de incremento, podemos escrever a definição de derivada como

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.}$$

Daí, tomando $\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$, podemos escrever

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.}$$

O seguinte Teorema estabelece uma relação entre continuidade e diferenciabilidade.

Teorema

Se f for diferenciável em $p \in D_f$, então f será contínua em p.

Prova: Recorde que p é um ponto de acumulação de D_f. Vamos mostrar que $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$ ou que $\lim_{x\to p} (f(x) - f(p)) = 0$.

Escrevemos

$$f(x) - f(p) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p).$$

Assim

$$\lim_{x\to p} (f(x) - f(p)) = \lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot \lim_{x\to p} (x - p) = f'(p) \cdot 0 = 0.$$

Portanto f é contínua em p. □

Observação: Note que não vale a recíproca. A função

$f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$ mas não é diferenciável em $x = 0$.

Exemplo (Critério Negativo)

Se f não é contínua em p, então f não é derivável em p.

Exemplo

A função $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1, \\ 2 & x > 1 \end{cases}$ *é diferenciável em $x = 1$?*

Solução: Como

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x \to 1^+} f(x),$$

$f(x)$ não é contínua em $x = 1$, logo não é diferenciável em $x = 1$.

Derivadas de Ordens Superiores

Seja f uma função derivável em $D_{f'}$. A função $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ é dita **derivada** de f ou **derivada primeira de** f.

Então, podemos definir a derivada de f', que será chamada **derivada segunda de** f. Neste caso,

$$(f')'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

quando o limite existir. Escrevemos $f'' = f^{(2)} = (f')'$ para denotar a derivada segunda de f.

Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a **derivada n-ésima de** f será denotada por $f^{(n)}$, quando esta existir. $f^{(0)} = f$.

Alternativamente, podemos escrever

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d^2f}{dx^2}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

para denotar a derivada segunda, f'', de $y = f(x)$. Analogamente, usamos

$$\boxed{\frac{d^3y}{dx^3}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d^3f}{dx^3}}$$

para denotar a derivada de terceira, f''', de $y = f(x)$, e assim por diante.

Exemplo

Se a posição x de uma partícula é dada pela equação horária $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$. Encontre a aceleração $a(t)$ no instante t.

Solução: Vamos calcular a derivada $v(t) = x'(t)$. Note que

$$\boxed{v(t)} = x'(t) = \lim_{r\to t} \frac{x(r)-x(t)}{r-t} = \lim_{r\to t} \left(\frac{r^3-t^3}{r-t} - 6\frac{r^2-t^2}{r-t} - \frac{9(r-t)}{r-t} \right)$$

$$= \lim_{r\to t} \left(r^2 + rt + t^2 - 6(r+t) - 9 \right) \boxed{= 3t^2 - 12t - 9.}$$

Agora, $\boxed{a(t)} = v'(t) = \lim_{r\to t} \left(3\frac{r^2-t^2}{r-t} - 12\frac{r-t}{r-t} - \frac{9-9}{r-t} \right) \boxed{= 6t - 12.}$

Exemplo

Seja $f(x) = 3x^2 - 4x$. *Calcule* f', f'' *e* f'''.

Solução: Note que

$$f'(x) = \lim_{r \to x} \frac{f(r) - f(x)}{r - x} = \lim_{r \to x} \left(3\frac{r^2 - x^2}{r - x} - 4\frac{r - x}{r - x}\right) = \lim_{r \to x} \left(3(r + x) - 4\right) = 6x - 4,$$

$$f''(x) = \lim_{r \to x} \frac{f'(r) - f'(x)}{r - x} = \lim_{r \to x} \left(6\frac{r - x}{r - x} - \frac{4 - 4}{r - x}\right) = 6$$

e $f'''(x) = 0$

Exemplo

Se $f(x) = \dfrac{1}{x}$, *então* $\boxed{f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}}$.

Solução: Faremos a prova por indução. Note que, se $x \neq 0$,

$$f'(x) = \lim_{r \to x} \frac{f(r) - f(x)}{r - x} = \lim_{r \to x} \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{x}}{r - x} = \lim_{r \to x} \frac{\frac{x-r}{rx}}{r - x} = -\lim_{r \to x} \frac{1}{rx} = -\frac{1}{x^2}.$$

Se $\boxed{f^{(k-1)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}}$ (hipótese de indução), então

$$\begin{aligned}
\boxed{f^{(k)}(x)} &= \lim_{r \to x} \frac{f^{(k-1)}(r) - f^{(k-1)}(x)}{r - x} = (-1)^{k-1}(k-1)! \lim_{r \to x} \frac{\frac{1}{r^k} - \frac{1}{x^k}}{r - x} \\
&= (-1)^{k-1}(k-1)! \lim_{r \to x} \frac{-(r^k - x^k)}{r - x} \frac{1}{r^k x^k} \\
&= (-1)^{k-1}(k-1)! \lim_{r \to x} (-1) \frac{r^{k-1} + r^{k-2}x + \cdots + x^{k-1}}{r^k x^k} \\
&= (-1)^k (k-1)! \frac{k x^{k-1}}{x^{2k}} = \boxed{(-1)^k k! \frac{1}{x^{k+1}}}.
\end{aligned}$$

Exemplo

Seja $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$. *Calcule* f' *e* f'' *quando existirem.*

Solução: Para $x < 0$, $f(x) = -x^2$, daí $f'(x) = -2x$. (Verfifique!)

Para $x > 0$, $f(x) = x^2$, daí $f'(x) = 2x$.

Para $x < 0$, $f(x) = -x^2$, daí $f'(x) = -2x$.

Em $x = 0$ aplicamos definição. Note que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{x} & \text{se } x < 0, \\ \dfrac{x^2}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0, \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases} = |x|$$

Portanto, $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$

Assim, $f'(x) = 2|x|$ para qualquer x.

Logo: $f''(x) = -2$ para $x < 0$, $f''(x) = 2$ para $x > 0$, e $f''(0) \nexists$

Fórmulas e Regras de Derivação

Teorema (Fórmulas de Derivação)

Se $k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, são válidas as fórmulas de derivação a seguir

(a) $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0,$

(b) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1},$

(c) $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1},$

(d) $f(x) = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x),$

(e) $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}(x),$

(f) $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x,$

(g) $f(x) = \ln(x) \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$

Prova: A afirmativa (a) é trivial.

Prova do item (b). Lembremos que

$$y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}).$$

Então,

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{y^n - x^n}{y - x} = \lim_{y \to x} (y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}) = nx^{n-1}.$$

Prova do item (c). Fazendo $u = \sqrt[n]{y}$ e $v = \sqrt[n]{x}$ temos, da continuidade de $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$, $y \to x \Rightarrow u \to v$. Assim

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}}{y - x} = \lim_{u \to v} \frac{u - v}{u^n - v^n} = \frac{1}{nv^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}.$$

Prova do item (d).

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{\mathrm{sen} y - \mathrm{sen} x}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{2sen\left(\frac{y-x}{2}\right)\cos\left(\frac{y+x}{2}\right)}{y-x} = \cos x.$$

Prova do item (e). Análoga ao item (d).

Prova do item (f).

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

pois, $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1.$

Prova do item (g).

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h/x} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$