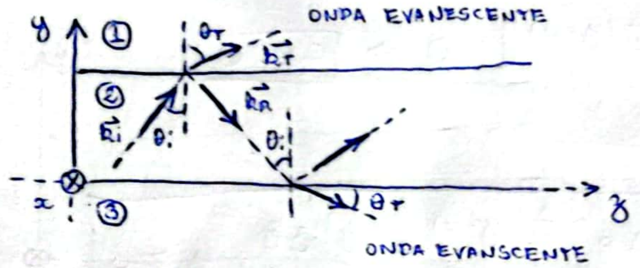
ONDA EVANESCENTE

RIT

Quando foi estudada a reflexão interna total, discutiu-se que o valor de $\text{sen}\,\theta_T > 1$ conduzia a uma onda transmitida com decaimento exponencial, mas que, entretanto, não apresentava potência real (transmitida entre os meios). Essa onda, igualmente solução da Eq. de onda, é conhecida como onda evanescente e, na prática, é um elemento que não se propaga pelo espaço, mas existe localmente na interface de fenômenos de reflexão interna total, satisfazendo as condições de contorno.



Dessa forma, guias de onda planares (dielétricos) e fibras óticas devem apresentar esse fenômeno interessante (e quase místico), pois operam, como discutido, a partir da RIT.

Novamente, o vetor de onda da onda evanescente é dado por:

$$\vec{k_T} = k_{Ty}\hat{y} + k_{Tz}\hat{z} = k_1\cos(\theta_T)\hat{y} + k_1\,\text{sen}(\theta_T)\hat{z}$$

Usando a lei de Snell e considerando $\mu_1 = \mu_2$:

$$k_{Tz} = k_1\,\text{sen}(\theta_T) \Rightarrow k_{Tz} = k_1\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\,\text{sen}(\theta_i)$$

Logo, verifica-se que k_{Tz} é uma quantidade real. Entretanto, como discutido, espera-se que $k_{Ty} = k_1\cos(\theta_T) = j k_1 \alpha$ seja puramente imaginário.

A onda evanescente será descrita por:

$$E_T(y, z, t) = E_0\, e^{-k_1\alpha y}\, e^{j\left(k_1\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\,\text{sen}(\theta_i) - \omega t\right)}$$

Haverá decaimento exponencial se afastando da interface, e a grandeza $\delta = \frac{1}{k_1\alpha}$, denominada profundidade de penetração peculiar (superficial), descreverá a escala da distância do decaimento ao longo do eixo y. Geralmente, δ assume valores menores do que o comprimento de onda em espaço livre.

Alguns autores se referem a onda evanescente como onda superficial (ou ainda do tipo onda superficial), visto que se encontra muito próxima à fronteira.

LISTA 2

⑤ Sejam as regiões 1, 2, 3 tipicamente denominadas de cobertura (revestimento), filme (núcleo) e substrato no guia planar, como discutido anteriormente, a existência do modo guiado por RIT induz a presença de ondas evanescentes na cobertura e no substrato.

Dessa forma, como deduzido na última ~~[illegible]~~ monitoria, a equação de Helmholtz para o campo Ex é:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + (k^2 - k_z^2) E_x = 0$$

com o campo da forma $E_x(y,z) = A(y) \cdot e^{-jk_z z}$. Assim, seja $k_y = \sqrt{k^2 - k_z^2}$, tem-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[A(y) \cdot e^{-jk_z z}\right] + k_y^2\left[A(y) \cdot e^{-jk_z z}\right] = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 A(y)}{\partial y^2} + k_y^2 A(y) = 0}$$

Aplicando o método geral de EDO:

$$\frac{\partial^2 A(y)}{\partial y^2} + k_y^2 A(y) = 0 \rightarrow r^2 + k_y^2 = 0 \Rightarrow r = \pm j k_y$$

A solução geral é, portanto, dada por:

$$A(y) = c_1 e^{r_1 y} + c_2 e^{r_2 y} \Rightarrow \boxed{A(y) = c_1 e^{+jk_y y} + c_2 e^{-jk_y y}}$$

Analisa-se então a solução geral para cada uma das três regiões:

(i) CAMADA 1 - COBERTURA ($y \geq d \Rightarrow y - d \geq 0$)

Como dito, nessa região, o campo deve ser evanescente, logo, $k_y = k_{Ty}^1$ deve ser puramente imaginário:

$$k_{Ty}^1 = \sqrt{k_1^2 - k_z^2} = \sqrt{-1(k_z^2 - k_1^2)} \Rightarrow k_{Ty}^1 = j\sqrt{k_z^2 - k_1^2} = j\frac{\alpha}{k_1}$$

Além disso, o decaimento exponencial da onda evanescente permite inferir que

$$\lim_{y \to +\infty} A(y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \to +\infty} \left[C_1 e^{-\frac{\alpha}{k_1}(y-d)} + C_2 e^{+\frac{\alpha}{k_1}(y-d)} \right] = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

Denominando $C_1 = A$, tem-se:

$$A_1(y) = A e^{-\frac{\alpha}{k_1}(y-d)} \quad , \; y \geq d \Rightarrow \boxed{E_x^1(y,z) = A e^{-\frac{\alpha}{k_1}(y-d)} e^{-jk_z z} \quad , \; y \geq d}$$

(ii) CAMADA 3 - SUBSTRATO ($y \leq -d \Rightarrow y + d \leq 0$)

De forma análoga a camada 1, a existência da onda evanescente conduz a

$$k_y = k_{Ty}^3 = j\sqrt{k_z^2 - k_3^2} \Rightarrow k_{Ty}^3 = j\, \alpha / k_3$$

Logo:

$$\lim_{y \to -\infty} A(y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \to -\infty} \left[C_1 e^{-\frac{\alpha}{k_3}(y+d)} + C_2 e^{+\frac{\alpha}{k_3}(y+d)} \right] \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

Denominando $C_2 = B$,

$$\boxed{E_x^3(y,z) = B e^{+\frac{\alpha}{k_3}(y+d)} e^{-jk_z z} \quad , \; y \leq -d}$$

(iii) CAMADA 2 - FILME ($-d \leq y \leq d \Rightarrow$ $y < |d|$)

Na região 2 do guia planar, espera-se uma resposta semelhante ao que foi deduzido no núcleo do guia de placas paralelas (Resposta oscilatória). Logo, deve-se ter $k_y = k_{iy} = k_{Ry}$ real. Assim:

$$A(y) = c_1 e^{+jk_y y} + c_2 e^{-jk_y y} = c_1 [\cos(k_y y) + j \operatorname{sen}(k_y y)] + c_2 [\cos(k_y y) - j \operatorname{sen}(k_y y)]$$

$$A(y) = (c_1 + c_2)\cos(k_y y) + j(c_1 - c_2)\operatorname{sen}(k_y y)$$

Denominando-se $C = (c_1 + c_2)$ e $D = j(c_1 - c_2)$, tem-se:

$$\boxed{E_x^2(y,z) = [C\cos(k_y y) + D\operatorname{sen}(k_y y)]\, e^{-jk_z z} \quad , \quad y < |d|}$$

⑥ Como deduzido na monitoria passada (Questão 3a e 4a), tem-se:

$$H_z = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

Então, seja $k_1 = k_3 = k_0$,

(i) $$\boxed{H_z^1(y,z) = -\frac{A}{j\omega\mu_0} \cdot \frac{\alpha}{k_0} e^{-\frac{\alpha}{k_0}(y-d)} e^{-jk_z z} \quad , y \geq d}$$

(ii) $$\boxed{H_z^2(y,z) = \frac{1}{j\omega\mu_0}\left[-C k_y \operatorname{sen}(k_y y) + D k_y \cos(k_y y)\right] e^{-jk_z z} \quad , y < |d|}$$

(iii) $$\boxed{H_z^3(y,z) = \frac{B}{j\omega\mu_0} \cdot \frac{\alpha}{k_0} e^{+\frac{\alpha}{k_0}(y+d)} e^{-jk_z z} \quad , y \leq -d}$$

⑦ Considerando a continuidade dos campos:

(i) EM $y = d$:

$\rightarrow E_x^2(y=d, z) = E_x^1(y=d, z) \Rightarrow \boxed{A = C\cos(k_y d) + D\operatorname{sen}(k_y d)}$

$\rightarrow H_z^2(y=d, z) = H_z^1(y=d, z) \Rightarrow -A \cdot \frac{\alpha}{k_0} = -C k_y \operatorname{sen}(k_y d) + D k_y \cos(k_y d) \Rightarrow$

$$\boxed{A = C\frac{k_y \cdot k_0}{\alpha}\operatorname{sen}(k_y d) - D\frac{k_y k_0}{\alpha}\cos(k_y d)}$$

(ii) EM $y = -d$:

$\rightarrow E_x^2(y=-d, z) = E_x^3(y=-d, z) \Rightarrow \boxed{B = C\cos(-k_y d) + D\operatorname{sen}(-k_y d)}$

$\rightarrow H_z^2(y=-d, z) = H_z^3(y=-d, z) \Rightarrow B \cdot \frac{\alpha}{k_0} = -C k_y \operatorname{sen}(-k_y d) + D k_y \cos(-k_y d) \Rightarrow$

$$\boxed{B = -C\frac{k_y k_0}{\alpha}\operatorname{sen}(-k_y d) + D\frac{k_y k_0}{\alpha}\cos(-k_y d)}$$

Assim, encontra-se:

$$\boxed{D = C\,\frac{K\operatorname{sen}(k_y d) - \cos(k_y d)}{K\cos(k_y d) + \operatorname{sen}(k_y d)}} \quad \text{ou} \quad \boxed{D = C\,\frac{\cos(-k_y d) + K\operatorname{sen}(-k_y d)}{K\cos(-k_y d) - \operatorname{sen}(-k_y d)}}$$

com $K = \frac{k_y k_0}{\alpha}$. Dessa forma, é possível reescrever A e B em função de C.

Igualando:

$$D = D \Rightarrow \frac{K\,\text{sen}(k_y d) - \cos(k_y d)}{K\cos(k_y d) + \text{sen}(k_y d)} = \frac{\cos(-k_y d) + K\,\text{sen}(-k_y d)}{K\cos(-k_y d) - \text{sen}(-k_y d)} \Rightarrow$$

$$\frac{K\,\text{sen}(k_y d) - \cos(k_y d)}{K\cos(k_y d) + \text{sen}(k_y d)} = \frac{\cos(k_y d) - K\,\text{sen}(k_y d)}{K\cos(k_y d) + \text{sen}(k_y d)} \Rightarrow$$

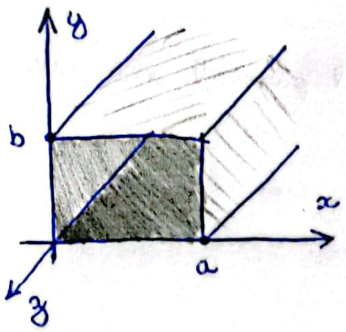
$$K\,\text{sen}(k_y d) - \cos(k_y d) = \cos(k_y d) - K\,\text{sen}(k_y d) \Rightarrow$$

$$2K\,\text{sen}(k_y d) = 2\cos(k_y d) \Rightarrow \text{tg}(k_y d) = \frac{1}{K} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{tg}(k_y d) = \frac{\alpha}{k_y \cdot k_0}}$$

EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA DOS MODOS TE SIMÉTRICOS

GUIA DE ONDA RETANGULAR METÁLICO



O guia de onda retangular compõe o conjunto dos guias metálicos, como é o caso do guia de placas paralelas. Seu funcionamento é semelhante aos demais guias: confinamento e condução da energia eletromagnética de um ponto para outro por meio de RIT em placas metálicas.

Considere um guia de seção retangular com largura a e altura b, $a > b$, formado por placas de condutor perfeito ($\sigma \to \infty$). Como visto no guia de placas paralelas, espera-se que, dentro do guia, haja a presença de modos de propagação, ou seja, arranjos únicos de campos elétricos e magnético que satisfazem as Eqs. de Maxwell e as condições de contorno impostas pela geometria da estrutura.

Nesse sentido, para a polarização TE (modo TE), observa-se que as componentes do campo elétrico não-nulas estarão no plano transversal ao de propagação (x ou y), portanto $E_z = 0$ e, por consequência, $H_z \neq 0$. Para a polarização TM (modo TM), tem-se o análogo para o campo magnético: $H_z = 0$ e $E_z \neq 0$.

O modo TEM (Eletro Magnético Transversal) seria relativo às componentes de E e H não-nulas que estarão no plano transversal ao de propagação, ou seja, tem-se $E_z = H_z = 0$. O modo TEM é aceito no guia de placas paralelas, mas não pode ser propagado no guia retangular, pois apenas um condutor está presente.

Assim, analisando as soluções de onda para os modos aceitos:

① MODO TE

Devido a estrutura do guia retangular, no modo TE, espera-se que o campo magnético assuma a forma dada abaixo para a componente em z:

$$H_z(x,y,z) = A(x,y)\cdot e^{-jk_z z}$$

Assim, deve-se encontrar uma Eq. de Helmholtz equivalente a:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + (k^2 - k_z^2) H_z = 0$$

ou então:

$$\frac{\partial^2 A(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A(x,y)}{\partial y^2} + k_c^2 A(x,y) = 0$$

com $k_c = \sqrt{k^2 - k_z^2}$. Nesse sentido, a equação diferencial parcial pode ser solucionada pelo método de separação de variáveis, definindo:

$$A(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

A solução geral pode ser, então, escrita como:

$$A(x,y) = [C_1 \cos(k_x x) + C_2 \operatorname{sen}(k_x x)][C_3 \cos(k_y y) + C_4 \operatorname{sen}(k_y y)]$$

onde $k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$.

Nesse sentido, as componentes do campo elétrico serão:

$$E_x(x,y,z) = \frac{\omega\mu}{j k_c^2} k_y [C_1 \cos(k_x x) + C_2 \operatorname{sen}(k_x x)][-C_3 \operatorname{sen}(k_y y) + C_4 \cos(k_y y)] e^{-jk_z z}$$

$$E_y(x,y,z) = -\frac{\omega\mu}{j k_c^2} k_x [-C_1 \operatorname{sen}(k_x x) + C_2 \cos(k_x x)][C_3 \cos(k_y y) + C_4 \operatorname{sen}(k_y y)] e^{-jk_z z}$$

De forma semelhante ao guia de placas paralelas, é possível determinar as seguintes condições de contorno:

(i) $E_x(x,y,z) = 0$ em $y = 0$ e $y = b$

(ii) $E_y(x,y,z) = 0$ em $x = 0$ e $x = a$

Dessa forma, deduz-se que:

$$\boxed{E_x(x,y,z) = -\frac{\omega\mu n\pi}{j k_c^2 b} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jk_z z}}$$

$$\boxed{E_y(x,y,z) = \frac{\omega\mu m\pi}{j k_c^2 a} A_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jk_z z}}$$

$$\boxed{E_z(x,y,z) = 0}$$

$$\boxed{H_x(x,y,z) = -\frac{k_z m\pi}{j k_c^2 a} A_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jk_z z}}$$

$$\boxed{H_y(x,y,z) = -\frac{k_z n\pi}{j k_c^2 b} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jk_z z}}$$

$$\boxed{H_z(x,y,z) = A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jk_z z}}$$

Logo, a constante de propagação assume a forma:

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_c^2} \Rightarrow \boxed{k_z = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}$$ RELAÇÃO DE DISPERSÃO

Para cada conjunto de inteiros (m, n) existe uma solução (modo) da equação de onda. Os modos são denominados TE_{mn}

Cada modo apresentará igualmente uma frequência de corte f_{cmn} dada por:

$$f_{cmn} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}} \Rightarrow \boxed{f_{cmn} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}$$

O modo com a menor frequência de corte é chamado o modo dominante ou modo fundamental. Como foi assumido que $a > b$, o modo dominante será o TE_{10}:

$$\boxed{TE_{10} \rightarrow f_{c10} = \frac{1}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}}}$$

~~Obs~~ É válido observar que o modo TE_{00} não existe, pois está vinculado a campos E e H nulos. Em uma da frequência de operação f, apenas os modos possuindo $f > f_c$ serão propagados no guia. Se $f < f_c$, então k_z é conduzido a uma grandeza imaginária e ocorre decaimento exponencial no sentido $+z$.

② MODO TM

No modo TM, tem-se $H_z = 0$ e E_z assume a forma:

$$E_z(x,y,z) = A(x,y) \cdot e^{-jk_z z}$$

~~sendo~~ satisfazendo a equação de Helmholtz abaixo:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0$$

com $k_c = \sqrt{k^2 - k_z^2}$. Utilizando o mesmo procedimento usado para o modo TE, deve-se encontrar que:

$$A(x,y) = [C_1 \cos(k_x x) + C_2 \operatorname{sen}(k_x x)][C_3 \cos(k_y y) + C_4 \operatorname{sen}(k_y y)]$$

De forma semelhante, as condições de contorno conduzem a:

(i) $A(x,y) = 0$ em $x = 0$ e $x = a$

(ii) $A(x,y) = 0$ em $y = 0$ e $y = b$

Logo, tem-se:

$$\boxed{E_x(x,y,z) = \frac{k_z m\pi}{j k_c^2 a} B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jk_z z}}$$

$$\boxed{E_y(x,y,z) = \frac{k_z n\pi}{j k_c^2 b} B_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jk_z z}}$$

$$\boxed{E_z(x,y,z) = B_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jk_z z}}$$

$$\boxed{H_x(x,y,z) = -\frac{\omega \varepsilon n\pi}{j k_c^2 b} B_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jk_z z}}$$

$$\boxed{H_y(x,y,z) = \frac{\omega \varepsilon m\pi}{j k_c^2 a} B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jk_z z}}$$

Equivalentemente ao modo TE, a relação de dispersão assume a forma:

$$\boxed{k_z = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)}}$$

A frequência de corte também será equivalente ao apresentado no modo TE. Constata-se, contudo, que os modos TM_{00}; TM_{01} e TM_{10} conduzem a valores de campos identicamente nulos. Dessa forma, o modo TM dominante será o modo TM_{11}, com frequência

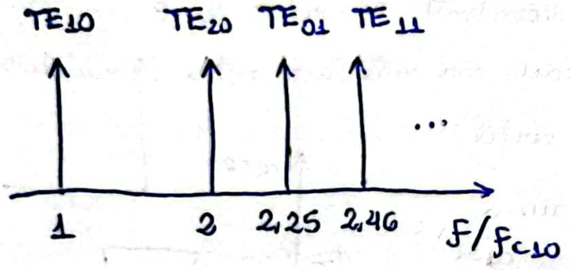
$$\boxed{f_{c11} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} > f_{c10}\,(TE_{10})}$$

LISTA 4

(1) Seja a = 2,29 cm e b = 1,02 cm, calcula-se inicialmente a frequência de corte do modo dominante TE_{10}:

$$\text{(i)} \quad f_{c_{10}} = \frac{\pi}{2\pi a\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \Rightarrow f_{c_{10}} = \frac{c}{2a} \Rightarrow \boxed{f_{c10} = 6,55 \text{ GHz}}$$

Em seguida, busca-se descobrir qual o próximo modo na sequência de modos de propagação do guia



$$\text{(ii)} \quad f_{c_{01}} = \frac{c}{2b} = 14,71 \text{ GHz}$$

$$\text{(iii)} \quad f_{c_{11}} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} = 16,10 \text{ GHz}$$

$$\text{(iv)} \quad f_{c_{20}} = \frac{c}{a} = 13,10 \text{ GHz}$$

Assim, verifica-se que o próximo modo é o TE_{20}, logo:

$$1,25\, f_{c10} \leq f \leq 0,95\, f_{c20}$$

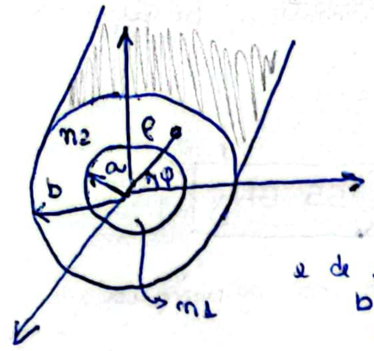
$$\boxed{8,19 \text{ GHz} \leq f \leq 12,45 \text{ GHz}}$$

(2) Seja b > a, o modo dominante será TE_{01}, e a menor frequência de corte do guia será:

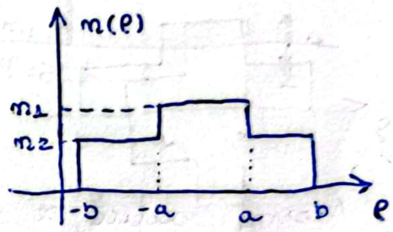
$$f_{c01} = \frac{c}{2b} \Rightarrow \boxed{f_{c01} = 9,38 \text{ MHz}}$$

Dessa forma, observa-se que para os sinais modulados dados $f_{AM} < f_{c01}$ e $f_{FM} > f_{c01}$. Logo, apenas o sinal FM se propagará no guia. O sinal AM será atenuado.

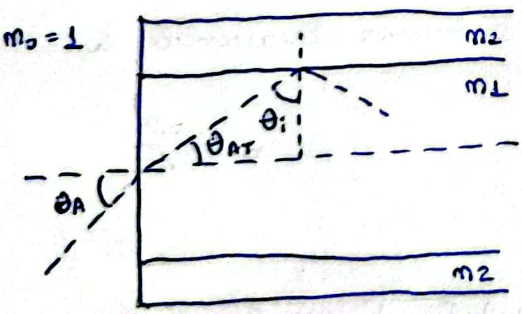
GUIA DE ONDA CIRCULAR (FIBRA ÓTICA)



A fibra ótica consiste em guia de onda dielétrico voltado para frequências ópticas. Com estrutura semelhante ao cabo coaxial, considere um tubo cilíndrico de raio a e índice de refração n_1, denominado núcleo. Considere que o núcleo está revestido por uma cobertura de índice e de raio b de refração n_2, denominada casca. Considere que o índice de refração do núcleo é constante e uniforme, independente do valor de ρ, e passa por uma mudança abrupta, como uma função degrau, na interface entre o núcleo e a casca. Esse tipo de fibra é conhecido fibra de perfil de índice degrau. Constate igualmente que, para que a fibra opere com RIT, pela lei de Snell, o índice n_2 deve ser menor que n_1. Nesse sentido, pode-se definir o parâmetro Δ, denominado diferença de índice, tal que:



$$\boxed{n_2 = n_1(1-\Delta) \Rightarrow \Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}}$$



Ainda na discussão sobre RIT, considera que um raio incide na abertura da fibra com ângulo de admissão θ_A, vinda de um meio com índice $n_0 = 1$ (AR, VÁCUO). Esse raio sofre refração na abertura da fibra e passa a se propagar dentro do núcleo. Contudo, para que haja um funcionamento correto do guia, o ângulo de incidência θ_i desse raio com a interface núcleo/casca deve ser maior que o ângulo crítico θ_c, como discutido na ocasião da reflexão total. Nessa perspectiva, se θ_A for muito grande é possível que $\theta_i < \theta_c$, logo deve existir um ângulo de admissão $\theta_{A,max}$ máximo. Seja $\theta_i + \theta_{AT} = \pi/2$,

$$n_0 \operatorname{sen} \theta_A = n_1 \operatorname{sen} \theta_{AT} \Rightarrow n_0 \operatorname{sen} \theta_A = n_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) \Rightarrow \operatorname{sen} \theta_A = n_1 \cos \theta_i$$

Para $\theta_{A,max}$, espera-se que $\theta_i = \theta_c = \operatorname{arcsen}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$, logo:

$$\operatorname{sen} \theta_{A,max} = n_1 \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta_c} = n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \theta_{A,max} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

O valor do seno do ângulo de ~~ato~~ admissão máximo é denominado abertura numérica (NA) da fibra:

$$\boxed{NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

Constata-se que o ângulo $\theta_{A,max}$ determina um cone de admissão na abertura da fibra: raios incidentes fora desse cone, ou seja, com $\theta_A > \theta_{A,max}$, serão refratados para a casca, causando perdas de transmissão.

LISTA 3

4 Caso a diferença de índice Δ seja muito menor do que 1, tem-se:

$$\frac{n_1 - n_2}{n_1} << 1 \Rightarrow \boxed{n_1 \approx n_2}$$

Logo,

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{(n_1 + n_2)(n_1 - n_2)} = \sqrt{2n_1(n_1 - n_2)} = \sqrt{2n_1^2\left(\frac{n_1 - n_2}{n_1}\right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{NA = n_1\sqrt{2\Delta}}$$

1 MODOS DE PROPAGAÇÃO

Como a fibra ótica apresenta uma geometria cilíndrica, seria mais apropriado trabalhar com coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z). De forma semelhante aos demais guias estudados, os campos transversais em coordenadas cilíndricas podem ser descritos em função de E_z e H_z. Assim, sejam os campos dados pela forma

$$\vec{E} = \vec{A}(\rho, \varphi)\, e^{-jk_z z}$$

$$\vec{H} = \vec{B}(\rho, \varphi)\, e^{-jk_z z}$$

Pelas equações de Maxwell, encontra-se que, sendo $k_c = \sqrt{k^2 - k_z^2}$,

$$\begin{cases} E_\rho = \dfrac{1}{j k_c^2}\left(k_z \dfrac{\partial E_z}{\partial \rho} + \dfrac{\omega \mu}{\rho}\dfrac{\partial H_z}{\partial \varphi}\right) \\ E_\varphi = \dfrac{1}{j k_c^2}\left(\dfrac{k_z}{\rho}\dfrac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \omega\mu \dfrac{\partial H_z}{\partial \rho}\right) \\ H_\rho = -\dfrac{1}{j k_c^2}\left(\dfrac{\omega \varepsilon}{\rho}\dfrac{\partial E_z}{\partial \varphi} - k_z \dfrac{\partial H_z}{\partial \rho}\right) \\ H_\varphi = \dfrac{1}{j k_c^2}\left(\omega\varepsilon \dfrac{\partial E_z}{\partial \rho} + \dfrac{k_z}{\rho}\dfrac{\partial H_z}{\partial \varphi}\right) \end{cases} \quad (**)$$

Em coordenadas cilíndricas, o rotacional de um campo é dado por:

$$\nabla \times \vec{F}(\rho, \varphi, z) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho F_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{z}$$

Em fibras óticas, além dos modos TE e TM já discutidos para outros guias, a estrutura cilíndrica e as condições de contorno da interface núcleo/casca fazem aparecer também modos híbridos, frutos do acoplamento entre os campos elétrico e magnético. Nesses modos, $E_z \neq 0$ e $H_z \neq 0$ e serão denominados de EH ou HE, dependendo de qual dos campos é maior para o modo em questão.

Assim, as equações de onda em coordenadas cilíndricas podem ser deduzidas como:

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k_c^2 \right) B(\rho, \varphi) = 0$$

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k_c^2 \right) A(\rho, \varphi) = 0$$

Como feito antes, pode-se aplicar o método de separação de variáveis. Para o campo elétrico:

$$A(\rho, \varphi) = R(\rho) P(\varphi)$$

Retornando na equação de onda:

$$\frac{\rho^2}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{dR}{d\rho} + \rho^2 k_c^2 = -\frac{1}{P} \frac{d^2 P}{d\varphi^2}$$

Percebe-se que o lado esquerdo da equação depende apenas de ρ, enquanto o lado direito, de φ. Logo, cada lado deve ser igual a uma constante, que será denominada γ. Dessa forma:

$$\boxed{\frac{d^2 P}{d\varphi^2} + \gamma^2 P = 0} \quad (I) \qquad e \qquad \boxed{\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + (\rho^2 k_c^2 - \gamma^2) R = 0} \quad (II)$$

A solução geral de (I) é dada por $P(\varphi) = A \operatorname{sen}(\gamma \varphi) + B \cos(\gamma \varphi)$, onde A e B são constantes (não confundir com a função $A(\rho, \varphi)$...). Contudo, como $A(\rho, \varphi)$ deve ser periódica em φ, ou seja, $A(\rho, \varphi) = A(\rho, \varphi \pm 2m\pi)$, então γ deve ser um inteiro m. Tem-se, portanto:

$$\boxed{P(\varphi) = A \operatorname{sen}(m\varphi) + B \cos(m\varphi)}$$

Já (II) é da forma da equação diferencial de Bessel e, portanto, assume como soluções canônicas no núcleo e na casca:

$$R(\rho) = \begin{cases} C J_m(k_c\rho) + D Y_m(k_c\rho), & \rho \leq a \\ E K_m(k_a\rho) + F I_m(k_a\rho), & a < \rho < b \end{cases}$$

onde C, D, E e F são constantes; J_m e Y_m são funções de Bessel do primeiro e segundo tipo; K_m e I_m são funções de Bessel modificadas do primeiro e segundo tipo; e $k_a = \sqrt{k_z^2 - k^2}$

Algumas simplificações ocorrem quando se consideram as condições de contorno. Espera-se que o modo seja finito em $\rho = 0$ e seja atenuado para zero em $\rho \to \infty$, assim, como $Y_m(k_c\rho)$ torna-se infinito (singularidade) em $\rho = 0$, esse termo é fisicamente inaceitável, logo $D = 0$. Além disso, $R(\rho)$ torna-se nulo no infinito apenas se $F = 0$. Logo, a solução geral é:

$$\boxed{E_z = \begin{cases} J_m(k_c\rho)\left[A_1 \operatorname{sen}(m\varphi) + B_1 \cos(m\varphi)\right] e^{-\delta k_z z}, & \rho \leq a \\ K_m(k_a\rho)\left[A_2 \operatorname{sen}(m\varphi) + B_2 \cos(m\varphi)\right] e^{-\delta k_z z}, & a < \rho < b \end{cases}}$$

Aglutinando as constantes em A_1, B_1, A_2, B_2.

Utilizando o mesmo método deve-se encontrar:

$$\boxed{H_z = \begin{cases} J_m(k_c\rho)\left[A_3 \operatorname{sen}(m\varphi) + B_3 \cos(m\varphi)\right] e^{-\delta k_z z}, & \rho \leq a \\ K_m(k_a\rho)\left[A_4 \operatorname{sen}(m\varphi) + B_4 \cos(m\varphi)\right] e^{-\delta k_z z}, & a < \rho < b \end{cases}}$$

As demais componentes são encontradas com o sistema (**).

Como feito na questão 7 da lista 2 para o guia dielétrico planar, é possível determinar as constantes A_{1-4} e B_{1-4} através da continuidades dos campos H_z, E_z, H_φ e E_φ na fronteira do núcleo com a casca ($\rho = a$). A derivação levará ao polinômio característico:

$$\left[\frac{J'_m(k_c a)}{k_c J_m(k_c a)} + \frac{K'_m(k_a a)}{k_a K_m(k_a a)}\right]\left[\frac{J'_m(k_c a)}{k_c J_m(k_c a)} + \frac{n_2^2}{n_1^2}\frac{K'_m(k_a a)}{k_a K_m(k_a a)}\right] = \left(\frac{m k_z}{n_1 a k_0}\right)^2 \left(\frac{1}{k_c^2} + \frac{1}{k_a}\right)^2 \qquad \text{(III)}$$

Digitalizado com CamScanner

onde $J'_m(k_c\rho)$ e $K'_m(k_a\rho)$ indicam as derivadas de J_m e K_m com relação aos seus argumentos. O polinômio característico permitirá portanto encontrar k_z em função de k_0, a, n_1 e n_2. Em geral, deve-se encontrar múltiplas soluções para cada valor inteiro de n, logo, pode-se enumerar as soluções como $k_{z\,mn}$ para um dado m ($m = 1, 2, 3, \ldots$).

Cada ~~valor~~ valor de $k_{z\,mn}$ corresponderá a um único modo possível de propagação na fibra. Nesse sentido, como geralmente $H_z \neq 0$ e $E_z \neq 0$, os modos da fibra podem ser denotados EH_{mn} ou HE_{mn}, dependendo se $E_z > H_z$ ou o contrário. Para o caso especial $m = 0$, HE_{0m} e EH_{0m} são denotados TE_{0m} e TM_{0m}, respectivamente, visto que correspondem ao modo TE ($E_z = 0$) e modo TM ($H_z = 0$).

2 FREQUÊNCIA DE CORTE

Se definida a quantidade $\tilde{n} = \dfrac{k_z}{k_0}$, chamada índice efetivo, é possível afirmar que um modo se propaga quando $n_1 > \tilde{n} > n_2$. Nesse sentido, se $\tilde{n} \leq n_2$, o modo deve parar de se propagar na fibra; pois o decaimento exponencial (onda evanescente) na casca deixa de acontecer e as condições de contorno não são mais satisfeitas. Para verificar isso, observa-se que para $\tilde{n} \leq n_2 \Rightarrow k_a^2 \leq 0$, logo seja:

$$K_m(k_a\rho) \approx \left(\frac{\pi}{2k_a\rho}\right)^{1/2} e^{-k_a\rho}, \quad \text{para } k_a\rho \gg 1$$

nas condições referidas perde-se a atenuação exponencial. Assim, pode-se dizer que o modo atinge a frequência de corte quando k_a atinge zero ($\tilde{n} = n_2$). Nessa situação, $\tilde{n} = \dfrac{k_z}{k_0} = n_2 \Rightarrow k_z = k_0 n_2 \Rightarrow k_c = \sqrt{k^2 - k_z^2} = k_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.

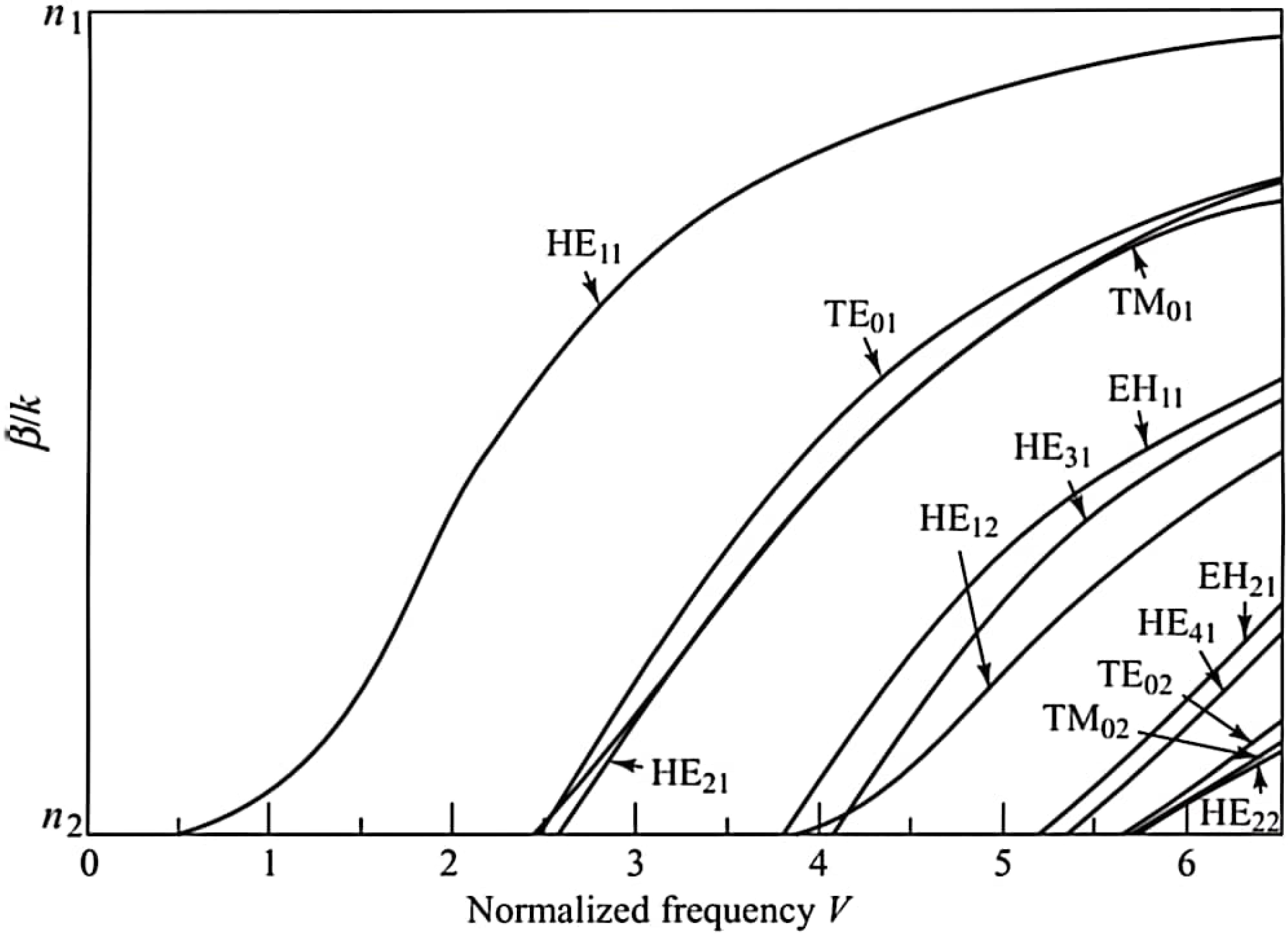
Para melhor avaliar a frequência de corte, pode-se definir um novo parâmetro: a frequência normalizada V ($V \propto 2\pi f_c$), dada por:

$$V^2 = k_c^2 \cdot a^2 \Rightarrow V = k_0 a\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \Rightarrow \boxed{V = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

A frequência normalizada é adimensional e determina igualmente o número M de modos que uma fibra suporta através da expressão aproximada:

$$\boxed{M \approx \frac{V^2}{2}}$$

Nesse panorama, haverá fibras multimodo e fibras monomodo. Uma fibra monomodo só aceita um modo de propagação em seu núcleo, que, no caso, deve ser o modo dominante HE_{11} (figura a seguir).


n_1
n_2
β/k
HE$_{11}$
TE$_{01}$
TM$_{01}$
EH$_{11}$
HE$_{31}$
HE$_{12}$
EH$_{21}$
HE$_{41}$
TE$_{02}$
TM$_{02}$
HE$_{21}$
HE$_{22}$
0
1
2
3
4
5
6
Normalized frequency V

Logo, a condição de um único modo existente é determinada para o valor de V em que TE_{01} e TM_{01} entram em corte. Utilizando o polinômio característico (III), é possível encontrar para $n = 0$:

$$\text{modo } TE_{0m}: \quad k_c J_0(k_c a) K_0'(k_a a) + k_a J_0'(k_c a) K_0(k_a a) = 0$$

$$\text{modo } TM_{0m}: \quad k_c n_2^2 J_0(k_c a) K_0'(k_a a) + k_a n_1^2 J_0'(k_c a) K_0(k_a a) = 0$$

O modo entra em corte quando $k_a = 0$. Como $V = k_c a$ quando $k_a = 0$, então para ambos os modos, a condição de corte é dada para:

$$J_0(V) = 0$$

A menor raiz da função de Bessel $J_0(x)$ é 2,405, logo, uma fibra projetada com $\boxed{V < 2,405}$ suporta apenas o modo fundamental HE_{11}, sendo portanto monomodo.

LISTA 3

5 a) Seja ~~o~~ o número total de modos M dado por:

$$M = \frac{V^2}{2} \Rightarrow M = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 \left(\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)^2 = M = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 NA^2 \Rightarrow$$

$$a = \frac{\lambda}{2\pi \cdot NA}\sqrt{2M} \Rightarrow a = \frac{850 \cdot 10^{-9}}{2\pi \cdot 0,2} \cdot \sqrt{2 \cdot 1000} \Rightarrow \boxed{a = 30,25\ \mu m}$$

Logo, $d = 2a \Rightarrow \boxed{d = 60,50\ \mu m}$